ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI

1904

SERIE QUINTA

MEMORIE

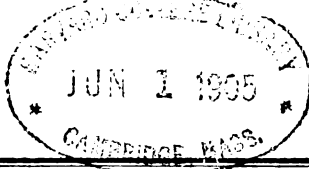
DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME V.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCI

SERIE QUINTA — VOLUME V — FASCICOLO I.

ERNESTO CESÀRO

NUOVA TEORIA INTRINSECA
DEGLI SPAZII CURVI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1904

Nuova teoria intrinseca degli spazii curvi.

Memoria del Corrispondente ERNESTO CESÀRO

presentata nella seduta del 6 marzo 1904.

§ 1. Curvature assolute.

Per dare un parziale svolgimento ad un'idea fugacemente accennata in fine d'una recente nostra comunicazione [1] all'Accademia delle Scienze di Napoli, ci proponiamo di riprendere in esame, da un nuovo e più generale punto di vista, le basi stesse dell'analisi intrinseca delle superficie e di altri spazii curvi, in qualsivoglia spazio lineare, investigando in qual modo possano le linee d'un tale spazio esser messe insieme per comporne altri spazii continui, *in guisa che le linee costituenti rimangano le sole possibili nello spazio costruito*. Così una superficie si verrà a considerare, non come *generata* da una linea mobile, sì bene come *costruita* collocando ciascuna delle sue linee, niuna esclusa, nel posto che le spetta. Come un tal posto si possa assegnare a linee, note solo intrinsecamente, è ciò che faremo vedere in primo luogo; e condurremo la ricerca senza nulla presupporre intorno alle superficie, col fine di dare un rapido saggio d'una teoria di questi enti, applicabile a qualsiasi altro spazio curvo.

Lungo una linea qualunque d'uno spazio lineare ad n dimensioni siano $q_1, q_2, \dots, q_\nu$ non più di n funzioni dell'arco s, tali che il quadrato dell'arco elementare della linea stessa sia esprimibile nella forma

$$(1)\qquad ds^2 = Q_1^2\,dq_1^2 + Q_2^2\,dq_2^2 + \cdots + Q_\nu^2\,dq_\nu^2,$$

con $Q_1, Q_2, \dots, Q_\nu$ funzioni note delle q. Evidentemente le q, come funzioni di s, non sono tutte arbitrarie, poichè fra le loro derivate intercede il vincolo

$$(2)\qquad Q_1^2\,q_1'^2 + Q_2^2\,q_2'^2 + \cdots + Q_\nu^2\,q_\nu'^2 = 1\,;$$

ma in infiniti modi è possibile esprimerle mediante altre ν variabili, delle quali $\nu - 1$ siano *funzioni assolutamente arbitrarie dell'arco*. Queste verranno designate

[1] *Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie* (7 novembre 1903; Atti, volume XII, serie 2ª, n. 7).

in seguito sempre con $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}$, sia che si voglia pensarle come funzioni (arbitrarie) di s, sia che si debba invece considerarle come funzioni (note, quantunque *scelte* ad arbitrio) di $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$. Derivando le σ nel loro duplice aspetto si ottiene

$$(3) \qquad \frac{\partial\sigma_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial\sigma_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial\sigma_i}{\partial q_\nu} q'_\nu = \sigma'_i$$

per $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$; poi da queste equazioni, aggregando loro la (2), si possono trarre le q', espresse in funzione delle q e delle σ'. Ne segue che qualunque funzione delle q e delle loro successive derivate si può esprimere mediante le q e le successive derivate delle σ rispetto ad s. Siffatte espressioni saranno per brevità designate anteponendo il relativo simbolo funzionale alla parentesi $[(q), (\sigma)^m]$, in cui m indica l'*ordine* dell'espressione, ossia l'ordine più elevato delle derivate $\sigma', \sigma'', \sigma''', \ldots$, che in essa compariscono.

Intanto i ν parametri q, sebbene funzionalmente vincolati, restano numericamente indipendenti, dimodochè, se si conviene di raccogliere, *in un punto solo*, quelli fra i punti delle infinite linee d'un insieme, nei quali accade che il sistema dei parametri prende il medesimo sistema di valori, i punti di tutte le linee potranno formare uno spazio a ν dimensioni. Ora, se per due linee, condotte a tagliarsi in un punto $(q_1, q_2, \ldots, q_\nu)$, si trova che, in questo, le σ' (e per conseguenza le q') hanno sull'una e sull'altra gli stessi valori, è chiaro che, per la convenzione fatta, le due linee debbono avere in comune l'elemento ds, debbono cioè toccarsi nel punto che si considera; e se anche le σ'' coincidono, è ovvio che l'angolo di contingenza è lo stesso per entrambe, sicchè l'espressione generale della *prima* curvatura $1/\varrho_1$ deve riuscire del secondo ordine. Più generalmente, se le successive derivate delle σ, fino alle $\sigma^{(i+1)}$, per $i < n - 1$, prendono, nel detto punto, i medesimi valori sulle due linee, queste hanno in comune le normali principali, le binormali principali, ecc., fino alle i-normali principali. Infatti la conoscenza delle predette derivate, fino alle $\sigma^{(i)}$, è necessaria e sufficiente perchè sia determinato lo spazio i-normale (lineare ad $n - i$ dimensioni); ma per discernere in tale spazio la i-normale *principale*, definita in esso come perpendicolare allo spazio $(i + 1)$-normale (lineare ad $n - i - 1$ dimensioni), si richiede inoltre la conoscenza delle $\sigma^{(i+1)}$. Ne segue che basta conoscere le derivate delle σ, fino alle $\sigma^{(n-1)}$, perchè restino determinati tutti gli spigoli dell' n-edro fondamentale; e però, se coincidono anche i valori delle $\sigma^{(n)}$ sulle due linee, queste si possono considerare come aventi in comune i predetti spigoli nell'uno come nell'altro estremo dell'elemento ds, d'onde segue che tutte le curvature debbono rimaner determinate in modo unico per entrambe le linee. In particolare deve l'*ultima* curvatura $1/\varrho_{n-1}$ certamente dipendere dalle $\sigma^{(n)}$, giacchè per calcolare l'angolo di due $(n - 1)$-normali infinitamente vicine si richiede la conoscenza di n elementi consecutivi, ossia appunto delle $\sigma^{(n)}$. L'ultima curvatura è dunque dell'ordine n. Per $i < n - 1$, siccome la conoscenza dell'i-normale *principale* dipende dalle $\sigma^{(i+1)}$, è ovvio che l'angolo di due simili rette, negli estremi di ds, dipende dalle $\sigma^{(i+2)}$. D'altra parte, se si rappresenta con Φ_i l'espressione

di $1/\varrho_i$, si sa [1] che il quadrato del rapporto del predetto angolo a ds è misurato (per $i = 1, 2, \ldots, n-2$) da $\Phi_i^2 + \Phi_{i+1}^2$. Questa espressione è dunque dell'ordine $i+2$; e poichè Φ_1 è del secondo ordine, si vede (per $i = 1$) che Φ_2 è del terzo; poi (per $i = 2$) che Φ_3 è del quarto ordine, e così via, fino a Φ_{n-1}, che deve, come già si è visto, risultare dell'ordine n. Dunque, per $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\frac{1}{\varrho_i} = \Phi_i\left[(q), (\sigma)^{i+1}\right]. \tag{4}$$

Le considerazioni precedenti pongono bene in chiaro che, se con infinite linee, note intrinsecamente in un dato spazio lineare ad n dimensioni, è possibile costituire uno spazio continuo, che si distenda in ν dimensioni dello spazio dato, le linee stesse si debbono poter rappresentare mediante il sistema (4), per tutti i possibili modi di esprimere $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-1}$ in funzione di s. Il detto sistema definisce sempre infinite linee (una per ciascun sistema di funzioni σ); ma le definisce solo nel senso intrinseco, prescindendo cioè dalla loro situazione relativa. Quando si tenta di legare una linea all'altra, nel modo già descritto, il sistema (4) non vale nemmeno a far sapere come le varie linee debbono esser distribuite intorno a ciascun punto; ed agevolmente si prevede che, qualunque legge di orientamento si voglia adottare, le costruzioni iniziate partendo da punti diversi condurranno a risultati generalmente incompatibili in un medesimo punto, salvo che le funzioni Φ_i non abbiano forme specialissime. Del resto si vedrà nel § 3 che la distribuzione delle infinite linee intorno a ciascun punto obbedisce a leggi ben determinate. Per giungere a scoprire queste forme e queste leggi è indispensabile associare alle (4) le note *condizioni d'immobilità*, per mezzo delle quali la posizione degli elementi immobili dello spazio vien definita nell'n-edro fondamentale di ciascuna linea; e se questa determinazione si può eseguire simultaneamente per *tutte* le linee (4), siccome in tal modo si viene precisamente ad affermar l'identità degli infiniti punti, corrispondenti ad un medesimo sistema di valori delle q, e ciò per tutti i sistemi di ν numeri indipendenti che si possano immaginare, è chiaro che le linee (4) si troveranno collegate in guisa da costituire uno spazio continuo a ν dimensioni, in cui vige la (1) come legge fondamentale delle distanze.

§ 2. Curvature spaziali.

Siano α_0 ed α_1 i coseni degli angoli che la tangente e la $(n-1)$-normale fanno con una direzione dello spazio; ed α_i sia l'analogo coseno per la $(n-i)$-normale principale. Siccome la conoscenza delle σ' è necessaria e sufficiente perchè la tangente resti determinata, è chiaro che, se la direzione che si considera è invariabile nello spazio, ed arbitraria, α_0 *deve* dipendere dalle σ', ma non dalle derivate d'un ordine superiore. L'espressione di α_0 è dunque del primo ordine. Analogamente si riconosce che α_1 è dell'ordine $n-1$; ma per le altre α risulta da precedenti osser-

[1] *Geometria intrinseca*, pag. 230.

vazioni sulle i-normali *principali* che l'ordine di α_{n-i} è $i+1$. Dunque gli ordini delle α si possono rappresentare nel seguente modo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1\ , & \underbrace{n-1}\ , & n-2\ , & n-3\ , & n-4\ , & \ldots\ldots , & 3\ , & 2 \\ \alpha_0 & \alpha_1\ ,\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \ldots\ldots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1}\,. \end{array}$$

Ciò premesso, affinchè la direzione definita dai coseni α, nell'n-edro fondamentale d'una linea qualunque, non varii nello spazio, è noto [1] che sono necessarie e sufficienti le condizioni

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha'_0 = \dfrac{\alpha_{n-1}}{\varrho_1}\ ,\ \alpha'_1 = \dfrac{\alpha_2}{\varrho_{n-1}}\quad ,\quad \alpha'_{n-1} = -\dfrac{\alpha_0}{\varrho_1} - \dfrac{\alpha_{n-2}}{\varrho_2}\ ; \\ \alpha'_i = -\dfrac{\alpha_{i-1}}{\varrho_{n-i+1}} + \dfrac{\alpha_{i+1}}{\varrho_{n-i}}\quad ,\quad (i = 2\,,3\,,\ldots\ldots,n-2)\,. \end{array}\right.$$

Da queste condizioni si distacchino le due che si riferiscono alle α di ordine massimo

$$(6)\qquad \alpha'_1 = \alpha_2\,\Phi_{n-1}\quad ,\quad \alpha'_2 = -\,\alpha_1\,\Phi_{n-1} + \alpha_3\,\Phi_{n-2}\,,$$

e si osservi che i primi membri sono lineari nelle $\sigma^{(n)}$. Infatti la derivata, rispetto ad s, di qualunque funzione f, dell'ordine $m \geqq 1$, è

$$(7)\qquad f' = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial f}{\partial q_i}\, q'_i + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'_i}\, \sigma''_i + \frac{\partial f}{\partial \sigma''_i}\, \sigma'''_i + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \sigma_i^{(m)}}\, \sigma_i^{(m+1)} \right).$$

ed è perciò dell'ordine $m+1$, e lineare nelle $\sigma^{(m+1)}$. Ora le (6) mostrano immediatamente che *l'ultima curvatura* $1/\varrho_{n-1}$ *è sempre esprimibile linearmente nelle* $\sigma^{(n)}$. Sia dunque

$$(8)\qquad \Phi_{n-1} = \varphi_0 + \varphi_1\sigma_1^{(n)} + \varphi_2\sigma_2^{(n)} + \cdots + \varphi_{\nu-1}\,\sigma_{\nu-1}^{(n)}\,,$$

dove le funzioni $\varphi_0\,,\varphi_1\,,\varphi_2\,,\ldots,\varphi_{\nu-1}$ son tutte dell'ordine $n-1$. Dalle (6) si deduce, uguagliando tra loro i coefficienti di $\sigma_i^{(n)}$ nei due membri,

$$(9)\qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial \sigma_i^{(n-1)}} = \alpha_2\,\varphi_i\quad ,\quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \sigma_i^{(n-1)}} = -\,\alpha_1\,\varphi_i\,,$$

per $i = 1\,,2\,,\ldots,\nu-1$. Ne segue facilmente che dev'essere

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma_j^{(n-1)}} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \sigma_i^{(n-1)}}$$

per tutte le coppie di valori possibili di i ed j; e però esiste una funzione Φ, necessariamente dell'ordine $n-1$, tale che

$$(10)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_1^{(n-1)}} = \varphi_1\quad ,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_2^{(n-1)}} = \varphi_2\,,\ldots,\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\nu-1}^{(n-1)}} = \varphi_{\nu-1}\,;$$

ed importa notare che questa funzione *rimane arbitraria* nelle q e nelle derivate

[1] *Geometria intrinseca*, pag. 229.

delle σ, d'un ordine inferiore ad $n-1$. Se i precedenti valori delle φ si sostituiscono in (8), si vede, tenendo presente la (7), che la funzione $w=\Phi_{n-1}-\Phi'$ è anch'essa dell'ordine $n-1$. Finalmente, servendosi delle (9) e ricordando le (10), si riconosce che le funzioni

$$\beta_1=\alpha_1\cos\Phi-\alpha_2\operatorname{sen}\Phi \quad , \quad \beta_2=\alpha_1\operatorname{sen}\Phi+\alpha_2\cos\Phi$$

sono indipendenti dalle $\sigma^{(n-1)}$. Dunque, se l'n-edro fondamentale si fa rotare dell'angolo Φ, parallelamente al piano $(n-2)$-normale, l'ordine massimo dei coseni direttori scenderà ad $n-2$; e però, designando per uniformità mediante la lettera β anche gli $n-2$ coseni che rimangono inalterati, gli ordini dei coseni si troveranno modificati come segue:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & , \underbrace{n-2} & , n-3 & , n-4 & , \ldots\ldots , & 3 & , & 2 \\ \beta_0 & \beta_1 , \beta_2 , \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & \beta_{n-2} & & \beta_{n-1} . \end{array}$$

Prendiamo ora a considerare le β di ordine massimo, per le quali le condizioni (5) si riducono alla forma

$$\beta_1'=w\beta_2-v\beta_3 \quad , \quad \beta_2'=u\beta_3-w\beta_1 \, , \tag{11}$$
$$\beta_3'=v\beta_1-u\beta_2+\beta_4\Phi_{n-3} \, ,$$

ponendo

$$u=\frac{\cos\Phi}{\varrho_{n-2}} \quad , \quad v=\frac{\operatorname{sen}\Phi}{\varrho_{n-2}} \, . \tag{12}$$

Bastano le (11) per far vedere che u, v, w *sono lineari nelle* $\sigma^{(n-1)}$. Tali sono infatti i primi membri, e tali perciò debbono essere le varie parti dei secondi membri, giacchè ciascuno dei coseni $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ può variare indipendentemente dagli altri quando si passa da una direzione all'altra dello spazio. Ora, se in u, v, w si pongono in evidenza le $\sigma^{(n-1)}$ scrivendo

$$u=u_0+\sum_{i=1}^{i=\nu-1}u_i\sigma_i^{(n-1)} \quad , \quad v=v_0+\sum_{i=1}^{i=\nu-1}v_i\sigma_i^{(n-1)} \quad , \quad w=w_0+\sum_{i=1}^{i=\nu-1}w_i\sigma_i^{(n-1)},$$

le (11) dànno, uguagliando tra loro i coefficienti di $\sigma_i^{(n-1)}$ nei due membri, le equazioni

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma_i^{(n-2)}}=\beta_2 w_i-\beta_3 v_i \, , \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\sigma_i^{(n-2)}}=\beta_3 u_i-\beta_1 w_i \, , \quad \frac{\partial\beta_3}{\partial\sigma_i^{(n-2)}}=\beta_1 v_i-\beta_2 u_i \, , \tag{13}$$

per l'integrabilità delle quali si richiede che sia

$$\frac{\partial u_i}{\partial\sigma_j^{(n-2)}}-\frac{\partial u_j}{\partial\sigma_i^{(n-2)}}=v_i w_j-w_i v_j \, ,$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial\sigma_j^{(n-2)}}-\frac{\partial v_j}{\partial\sigma_i^{(n-2)}}=w_i u_j-u_i w_j \, ,$$
$$\frac{\partial w_i}{\partial\sigma_j^{(n-2)}}-\frac{\partial w_j}{\partial\sigma_i^{(n-2)}}=u_i v_j-v_i u_j \, .$$

Soddisfatte queste condizioni, le (13) ammettono evidentemente, oltre la terna $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, infinite altre soluzioni. Per ogni terna a_1, a_2, a_3, soddisfacente alle (13), si ha

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i^{(n-2)}}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, \nu - 1)$$

e però $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ è indipendente dalle $\sigma^{(n-2)}$; e se si considera un'altra terna b_1, b_2, b_3 di funzioni soddisfacenti alle (13), si trova analogamente che $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ non dipende dalle $\sigma^{(n-2)}$. Dunque, se ([1]) per un determinato sistema di valori delle $\sigma^{(n-2)}$ si assumono le a e le b in modo da soddisfare alle relazioni

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad , \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \quad , \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$

queste, al variare delle $\sigma^{(n-2)}$, non cesseranno di vincolare le sei funzioni. Se poi si prende un'altra terna c_1, c_2, c_3, soddisfacente alle (13), e tale che

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad , \quad a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \quad , \quad b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0,$$

si riesce in tal modo a costruire il determinante d'una sostituzione ortogonale; ed applicando questa alla terna degli assi $(n-3)$-normali si vedono $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cambiarsi nei coseni $\gamma_1 = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$, ecc., i quali, per un'osservazione precedente, *non dipendono dalle* $\sigma^{(n-2)}$. Si trova così abbassato ad $n-3$ l'ordine massimo dei coseni direttori. Designando ora questi coseni mediante la lettera γ, si vede che i loro ordini sono:

$$\begin{matrix} 1\,, & \overbrace{\qquad n-3 \qquad} & , n-4, \dots, & 3 & , & 2 \\ \gamma_0 & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 & \gamma_5 \;\; \cdots\cdots & \gamma_{n-2} & & \gamma_{n-1}\,. \end{matrix}$$

Bisogna poi notare che la sostituzione adoperata implica la rotazione Φ, già eseguita nel piano $(n-2)$-normale, poichè Φ è rimasta arbitraria nelle $\sigma^{(n-2)}$; e per analoga ragione essa conserva un'arbitrarietà illimitata per le ulteriori riduzioni, appunto perchè i suoi elementi restano arbitrarii nelle q, e nelle derivate delle σ, d'un ordine inferiore ad $n-2$.

Per le γ di ordine massimo, se si pone

$$b_1 c_1' + b_2 c_2' + b_3 c_3' = -(b_1' c_1 + b_2' c_2 + b_3' c_3) = a_1 u + a_2 v + a_3 w - a \text{ , ecc.}$$

le condizioni (5) diventano

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= c\gamma_2 - b\gamma_3 + a_3\gamma_4\,\Phi_{n-3}\,, \\ \gamma_2' &= a\gamma_3 - c\gamma_1 + b_3\gamma_4\,\Phi_{n-3}\,, \\ \gamma_3' &= b\gamma_1 - a\gamma_2 + c_3\gamma_4\,\Phi_{n-3}\,, \\ \gamma_4' &= -(a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3)\,\Phi_{n-3} + \gamma_5\,\Phi_{n-4}\,. \end{aligned}$$

([1]) Cfr. Darboux: *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, pag. 51.

Siccome i primi membri sono lineari nelle $\sigma^{(n-2)}$, altrettanto si può affermare di a, b, c, ed anche di

$$(14) \qquad \frac{a_3}{\varrho_{n-3}} \;,\; \frac{b_3}{\varrho_{n-3}} \;,\; \frac{c_3}{\varrho_{n-3}} \,.$$

Da ciò si può trarre profitto per ottenere, con procedimento del tutto analogo a quello già svolto in due casi particolari, un terzo abbassamento dell'ordine massimo; e così proseguendo si perviene a coseni che son tutti, tranne il primo, dell'ordine 2; poi finalmente, con una nuova sostituzione, che per la prima volta trasforma anche l'ultimo coseno α_{n-1} in $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} \lambda_{n-1}$, si ottengono coseni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, *tutti del primo ordine*, come $\lambda_0 = \alpha_0$, e tali che nelle loro espressioni comparisce α_{n-1}, moltiplicato rispettivamente per $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Ne segue, derivando e ponendo $a_i \Phi_i = a_{0i}$, che le condizioni (5) assumono la forma

$$\lambda'_i = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{ij} \lambda_j \quad , \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

con $a_{ij} + a_{ji} = 0$. I primi membri sono lineari nelle σ'', e però tale dev'essere ciascun coefficiente a_{ij}, ed in particolare il prodotto di Φ_1 per ognuno dei coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Sommando i quadrati di questi prodotti si ottiene Φ_1^2, ed operando analogamente sulle (12), sulle (14), ecc., si riconosce che $\Phi_1^2, \Phi_2^2, \ldots, \Phi_{n-3}^2, \Phi_{n-2}^2$ *sono dei polinomii del secondo grado nelle* $\sigma'', \sigma''', \ldots, \sigma^{(n-2)}, \sigma^{(n-1)}$ *rispettivamente*. Ora, se si pone

$$(15) \qquad a_{ij} = a_{0ij} + \sum_{r=1}^{r=\nu-1} a_{rij}\, \sigma''_r \,,$$

dalle precedenti condizioni si deduce

$$(16) \qquad \frac{\partial \lambda_j}{\partial \sigma'_i} = \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{ijk} \lambda_k \,;$$

e per l'integrabilità di queste si richiede che sia

$$(17) \qquad \frac{\partial a_{ikl}}{\partial \sigma'_j} - \frac{\partial a_{jkl}}{\partial \sigma'_i} = \sum_{r=0}^{r=n-1} (a_{ikr}\, a_{jlr} - a_{jkr}\, a_{ilr}) \,.$$

Tutti i possibili spostamenti infinitesimi della tangente, definiti da sistemi di variazioni infinitesime delle σ', generano intorno alla posizione iniziale (arbitraria) un elemento d'uno spazio lineare a ν dimensioni, nel quale spazio è sempre lecito ricondurre $\nu - 1$ assi normali (per esempio quelli che rispondono agli indici $1, 2, \ldots, \nu - 1$) mediante una rotazione dell'intero sistema degli assi normali nel proprio spazio lineare (ad $n - 1$ dimensioni), purchè le funzioni a_{ijk} non cessino di soddisfare alle (17). Ora, partendo da un sistema *qualunque* di valori delle σ', se a questi valori si attribuiscono variazioni infinitesime, i coseni $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ varieranno linearmente nei coseni stessi, mentre gli altri coseni rimarranno invariati,

dimodochè si potrà scrivere

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \sigma'_i} = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} a_{ijk} \lambda_k \quad \text{o} \quad \frac{\partial \lambda_j}{\partial \sigma'_i} = 0, \tag{18}$$

secondo che $j < \nu$ o $j \geqq \nu$. È questa una forma che si può sempre dare alle (16). In altri termini è lecito supporre $a_{ijk} = 0$, per $i > 0$, tutte le volte che almeno uno degli indici j, k, non è minore di ν, sicchè, per le (15), *restano del secondo ordine le sole funzioni* a_{ij} *con indici inferiori a* ν. Ed infatti le (17) si riducono alla forma

$$\frac{\partial a_{ikl}}{\partial \sigma'_j} - \frac{\partial a_{jkl}}{\partial \sigma'_i} = \sum_{r=0}^{r=\nu-1} (a_{ikr} a_{jlr} - a_{jkr} a_{ilr}), \tag{19}$$

con k ed l minori di ν, e sono identicamente soddisfatte negli altri casi. Siccome poi le (18) sussistono per *qualunque* sistema di valori attribuiti alle σ', si vede che $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_{n-1}$ *sono indipendenti dalle* σ'. Gli assi ai quali si riferiscono questi coseni sono dunque normali a *tutte* le linee che passano nel punto considerato, e però determinano uno *spazio lineare normale* (ad $n - \nu$ dimensioni), mentre gli altri assi determinano lo *spazio lineare tangente* (a ν dimensioni). Restano così fissati gli assi nella maniera più utile per lo studio delle singole linee dello spazio che si considera; ma per lo studio dello spazio stesso conviene liberare dalle σ' anche gli altri coseni, e ciò noi faremo nel § 4 mediante una rotazione dei soli assi tangenti nel proprio spazio.

Alle funzioni a_{ij} ben si può dare il nome di *curvature spaziali*, in quanto che servono appunto a misurare altrettante curvature o deviazioni angolari d'una linea immersa in un dato spazio, considerata nei suoi rapporti con lo spazio stesso. Per avere infatti il significato geometrico d'una funzione a_{ij} basta supporre tutte le altre uguali a zero, in un punto M, ed osservare che tali saranno anche, nel medesimo punto, tutte le λ', tranne $\lambda'_i = a_{ij} \lambda_j$, $\lambda'_j = -a_{ij} \lambda_i$. Se la direzione (invariabile) definita dalle λ è quella dell'asse j, in M, si ha $d\lambda_i = a_{ij}\, ds$, d'onde segue che, quando M percorre l'elemento ds, l'asse i rota, verso la direzione iniziale dell'asse j, per un angolo $a_{ij}\, ds$. Scambiando i con j bisognerà cambiare il segno di a_{ij}, e però si vede che la coppia degli assi i ed j rota rigidamente nel proprio piano. Se i ed j sono entrambi minori di ν, le a_{ij} misurano dunque le deviazioni (unitarie) degli assi tangenti, nell'interno del proprio spazio. A tali deviazioni (le sole che *non* abbiano un valore unico per tutte le linee che si toccano in un punto) si può dare il nome di *curvature geodetiche*, e converrà in seguito designarle con la lettera $\mathfrak{G}$. Per i ed j non minori di ν, le a_{ij} misurano invece le deviazioni angolari degli assi normali nel proprio spazio, deviazioni analoghe alla rotazione (in sè) del piano normale ad una curva storta nello spazio lineare a tre dimensioni, ond'è che sembra conveniente dar loro il nome di *torsioni esterne*, e designarle con la lettera $\mathcal{E}$. Finalmente, se un indice solo è minore di ν, a_{ij} misura il mutuo scorrimento angolare fra un asse normale ed un asse tangente. Secondo che questo è la tangente ($i = 0$) alla linea, o una normale ($i > 0$), si hanno le *curvature normali* $\mathfrak{N}$ o le *torsioni geodetiche* $\mathfrak{T}$, dovute perciò ad altrettanti spostamenti dello spazio tangente, reso rigido, verso lo spazio normale, immobilizzato per un istante.

§ 3. Linee coordinate.

Fra le innumerevoli linee che passano per ciascun punto è utile distinguere quelle ν, lungo le quali varia, solo, l'uno o l'altro dei ν parametri q; ed è naturale assumerle come *linee coordinate*, riferendo al ν-edro, che in ciascun punto formano le loro tangenti, ogni altra linea dello spazio che si considera. Che un tal ν-edro sia ortogonale risulta subito dalla forma stessa della (1), la quale inoltre ci dice che l'arco elementare della linea q_i è $ds_i = Q_i dq_i$; e poichè $ds_1, ds_2, \ldots, ds_\nu$ sono le coordinate dell'altro estremo dell'arco elementare ds d'una linea qualunque, si vede che il coseno dell'angolo che la tangente a questa linea fa con la tangente alla linea q_i è $ds_i/ds = Q_i q_i'$. Dunque i coseni direttori della retta definita, nello spazio tangente, da un determinato sistema di valori delle σ', sono

$$x_1 = Q_1 q_1' \quad , \quad x_2 = Q_2 q_2' \ , \ \ldots\ldots \ , \ x_\nu = Q_\nu q_\nu' \ ,$$

sono cioè dati da espressioni del primo ordine, la cui forma nelle σ' si deve poter precisare. All'uopo si riprendano le (3) sotto la forma

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial s_1} x_1 + \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_\nu} x_\nu = \sigma_i' \ , \tag{20}$$

aggregando loro la relazione $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 = 1$. A questa si può sostituire un'equazione lineare osservando che

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \ldots\ldots\ldots & x_\nu \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_2} \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_\nu} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_1} & \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_2} \ldots\ldots & \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_\nu} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1' & \sigma_2' \ldots\ldots\ldots \sigma_{\nu-1}' \\ \sigma_1' & \Delta\sigma_1 & \Delta(\sigma_1, \sigma_2) \ldots \Delta(\sigma_1, \sigma_{\nu-1}) \\ \sigma_2' & \Delta(\sigma_2, \sigma_1) & \Delta\sigma_2 \ldots\ldots \Delta(\sigma_2, \sigma_{\nu-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{\nu-1}' & \Delta(\sigma_{\nu-1}, \sigma_1) & \Delta(\sigma_{\nu-1}, \sigma_2) \ldots \Delta\sigma_{\nu-1} \end{vmatrix} , \tag{21}$$

dove

$$\Delta(\sigma_i, \sigma_j) = \sum_{k=1}^{k=\nu} \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_k} \frac{\partial \sigma_j}{\partial s_k} ,$$

e $\Delta\sigma_i = \Delta(\sigma_i, \sigma_i)$. Infatti, se si pone

$$\Theta = \begin{vmatrix} \Delta\sigma_1 & \Delta(\sigma_1, \sigma_2) \ldots \Delta(\sigma_1, \sigma_{\nu-1}) \\ \Delta(\sigma_2, \sigma_1) & \Delta\sigma_2 \ldots\ldots \Delta(\sigma_2, \sigma_{\nu-1}) \\ \ldots & \ldots \\ \Delta(\sigma_{\nu-1}, \sigma_1) & \Delta(\sigma_{\nu-1}, \sigma_2) \ldots\ldots \Delta\sigma_{\nu-1} \end{vmatrix} ,$$

e se si rappresenta con θ_{ij} il complemento algebrico di $\Delta(\sigma_i, \sigma_j)$ in Θ, il secondo

membro della (21) vale

$$\theta = \Theta - \sum_{i,j}^{\nu-1} \theta_{ij} \sigma'_i \sigma'_j ;$$

sicchè, designando con $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ i determinanti maggiori della matrice

$$\left\| \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_1} \; \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_2} \cdots\cdots \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_\nu} \right\| , \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

la (21) ci dà

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_\nu x_\nu = \sqrt{\theta} . \tag{22}$$

Ora, risolvendo il sistema che questa equazione forma con le (20), dopo avere osservato che il determinante di questo sistema è

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots\cdots & \theta_\nu \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_1} & \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_\nu} \end{vmatrix} = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots\cdots + \theta_\nu^2 = \Theta ,$$

si ottiene

$$\Theta x_i = \theta_i \sqrt{\theta} + \sum_{j,k}^{\nu-1} \frac{\partial \sigma_j}{\partial s_i} \theta_{jk} \sigma'_k , \tag{23}$$

e si vede che *i coseni x si esprimono in forma lineare ed omogenea mediante le variabili $\sqrt{\theta}, \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{\nu-1}$*, fra le quali intercede una relazione quadratica.

Se tutte le σ' si pongono uguali a zero, la direzione corrispondente (che per poco chiameremo principale) è definita dai coseni

$$\theta_1/\sqrt{\Theta} \; , \; \theta_2/\sqrt{\Theta} , \ldots , \theta_\nu/\sqrt{\Theta} .$$

Dopo ciò la (22) mostra che, se ϑ è l'angolo di questa direzione con un'altra qualsiasi, si ha $\cos\vartheta = \sqrt{\theta/\Theta}$, e per conseguenza

$$\sum_{i,j}^{\nu-1} \theta_{ij} \sigma'_i \sigma'_j = \Theta \operatorname{sen}^2 \vartheta .$$

In particolare, qualunque sia k, la direzione corrispondente ai valori

$$\sigma'_1 = \frac{\Delta(\sigma_1, \sigma_k)}{\sqrt{\Delta\sigma_k}} \; , \; \sigma'_2 = \frac{\Delta(\sigma_2, \sigma_k)}{\sqrt{\Delta\sigma_k}} \; , \ldots , \; \sigma'_{\nu-1} = \frac{\Delta(\sigma_{\nu-1}, \sigma_k)}{\sqrt{\Delta\sigma_k}} \tag{24}$$

è ortogonale alla direzione principale, perchè, essendo

$$\sum_{i=1}^{i=\nu-1} \theta_{ij} \Delta(\sigma_i, \sigma_k) = \left| \begin{matrix} \Theta \; , & \text{per } j = k , \\ 0 \; , & \text{»} \;\; j \lesseqgtr k , \end{matrix} \right.$$

si ha

$$\sum_{i,j}^{\nu-1} \theta_{ij}\,\sigma'_i\,\sigma'_j = \frac{1}{\Delta\sigma_k}\sum_{i,j}^{\nu-1} \theta_{ij}\,\Delta(\sigma_i\,,\sigma_k)\,\Delta(\sigma_j\,,\sigma_k) = \Theta\,,$$

e per conseguenza $\vartheta = {}^1/_2\,\pi$. I coseni direttori della tangente definita dai valori (24) delle σ' sono, per le (23),

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta\sigma_k}}\frac{\partial\sigma_k}{\partial s_1}\,,\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta\sigma_k}}\frac{\partial\sigma_k}{\partial s_2}\,,\;\ldots\,,\; x_\nu = \frac{1}{\sqrt{\Delta\sigma_k}}\frac{\partial\sigma_k}{\partial s_\nu} \tag{25}$$

L'angolo di due simili rette, corrispondenti ai valori i ed j di k, ha dunque per coseno

$$\frac{\Delta(\sigma_i\,,\sigma_j)}{\sqrt{\Delta\sigma_i\,.\,\Delta\sigma_j}}\,. \tag{26}$$

Ne segue che le $\nu-1$ tangenti ($k=1\,,2\,,\ldots,\nu-1$) così ottenute formano con la tangente principale un ν-edro, generalmente obliquo, che si può sempre costruire assumendo ad arbitrio lo spigolo principale, e distribuendo gli altri, nello spazio lineare normale al detto spigolo, in guisa che i coseni dei loro angoli risultino espressi dalle (26). Dopo ciò, per costruire la tangente definita da un sistema qualunque di valori delle σ', basta conoscerne gli angoli con le $\nu-1$ tangenti già fissate. Intanto il coseno dell'angolo d'una tangente qualunque con la tangente (25) è $\sigma'_k/\sqrt{\Delta\sigma_k}$, in virtù delle (20). Gli angoli che servono a fissare la posizione della tangente fra le $\nu-1$ tangenti (25) hanno dunque i coseni

$$\sigma'_1/\sqrt{\Delta\sigma_1}\;,\quad \sigma'_2/\sqrt{\Delta\sigma_2}\;,\;\ldots\;,\; \sigma'_{\nu-1}/\sqrt{\Delta\sigma_{\nu-1}}\,.$$

In tal modo si riesce a colmare una lacuna lasciata nel § 1 per quanto riguarda la distribuzione delle tangenti nello spazio tangente, ed in pari tempo si scopre il significato geometrico delle σ'. In particolare per le superficie ($\nu=2$), in qualunque spazio, si ha una sola funzione σ, e si è condotti a costruire sul diametro $\sqrt{\Delta\sigma}$, tangenzialmente alla retta principale ($\sigma'=0$), una circonferenza, la quale determina su ciascheduna tangente una corda di lunghezza σ'.

Ora, data una funzione f, del primo ordine, proponiamoci di calcolarne i quozienti differenziali, relativi alle linee coordinate, supponendo *note* le sue derivate rispetto alle σ', ed anche la derivata rispetto all'arco, calcolata mentre restano costanti le σ', ossia, ricordando la (7),

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{\partial f}{\partial q_i}\,q'_i = \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{\partial f}{\partial s_i}\,x_i\,.$$

Fra i ν quozienti differenziali, che si tratta di calcolare, si ha già una relazione

$$\frac{\partial f}{\partial s_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial s_\nu}x_\nu = \frac{\partial f}{\partial s}\,; \tag{27}$$

e per trovarne altre $\nu - 1$ basta osservare che

$$\frac{\partial}{\partial \sigma'_i}\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{j=1}^{j=\nu}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s_j \partial \sigma'_i} x_j + \frac{\partial f}{\partial s_j}\frac{\partial x_j}{\partial \sigma'_i}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial \sigma'_i} + \sum_{j=1}^{j=\nu}\frac{\partial f}{\partial s_j}\frac{\partial x_j}{\partial \sigma'_i},$$

cioè

$$\frac{\partial f}{\partial s_1}\frac{\partial x_1}{\partial \sigma'_i} + \frac{\partial f}{\partial s_2}\frac{\partial x_2}{\partial \sigma'_i} + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial s_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial \sigma'_i} = \frac{\partial}{\partial \sigma'_i}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial \sigma'_i}, \tag{28}$$

per $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$. In particolare si noti che

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{\partial \sigma_k}{\partial s_i}\frac{\partial x_i}{\partial \sigma'_j} = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ per } j = k, \\ 0, \;\; \text{»} \;\; j \lesseqgtr k. \end{array}\right. \tag{29}$$

Nel sistema che la (27) forma con le (28) conosciamo, per ipotesi, i secondi membri, ci sono note le x mercè le (23), e ci resta perciò da calcolare le derivate delle x rispetto alle σ'. Queste si deducono subito dalle stesse (23):

$$\Theta \frac{\partial x_i}{\partial \sigma'_j} = -\frac{\theta_i \tau_j}{\sqrt{\theta}} + \sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{\partial \sigma_k}{\partial s_i}\theta_{jk}. \tag{30}$$

Per brevità si è posto

$$\tau_j = \theta_{j1}\sigma'_1 + \theta_{j2}\sigma'_2 + \cdots + \theta_{j,\nu-1}\sigma'_{\nu-1},$$

sicchè

$$\tau_1\sigma'_1 + \tau_2\sigma'_2 + \cdots + \tau_{\nu-1}\sigma'_{\nu-1} = \Theta - \theta.$$

Dalla (30) segue

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{\partial x_i}{\partial \sigma'_j}\theta_i = -\frac{\tau_j}{\sqrt{\theta}}, \tag{31}$$

come, del resto, risulta direttamente dalla (22), per derivazione. Ciò premesso, per calcolare il determinante del sistema (27 , 28), basta eseguire la moltiplicazione

$$\left|\begin{array}{cccc} \theta_1 & \theta_2 & \ldots\ldots & \theta_\nu \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_1} & \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_2} & \ldots & \frac{\partial \sigma_{\nu-1}}{\partial s_\nu} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_\nu \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma'_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial x_\nu}{\partial \sigma'_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma'_{\nu-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma'_{\nu-1}} & \ldots & \frac{\partial x_\nu}{\partial \sigma'_{\nu-1}} \end{array}\right|,$$

tenendo presenti le relazioni (20 , 22 , 29 , 31). Come valore del prodotto si trova facilmente

$$\sqrt{\theta} + \frac{1}{\sqrt{\theta}}(\tau_1\sigma'_1 + \tau_2\sigma'_2 + \cdots + \tau_{\nu-1}\sigma'_{\nu-1}) = \frac{\Theta}{\sqrt{\theta}}.$$

Ora, poichè il primo determinante è uguale a Θ, si vede che il determinante del

sistema (27, 28) vale $1/\sqrt{\theta}$. Con procedimento analogo si trova che il complemento algebrico di x_i è $x_i/\sqrt{\theta}$, e che quello di qualunque altro elemento $\partial x_j/\partial\sigma'_i$ è

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\sigma_i}{\partial s_j}-x_j\sigma'_i$$

diviso per $\sqrt{\theta}$. Dunque, per $i=1,2,\dots,\nu$,

$$\frac{\partial f}{\partial s_i}=x_i\frac{\partial f}{\partial s}+\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\sigma_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma'_k}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial\sigma'_k}\right). \tag{32}$$

§ 4. Curvature fondamentali.

Applichiamo le formole (32) ai coseni λ, richiamando le relazioni

$$\frac{\partial\lambda_j}{\partial\sigma'_i}=\sum_{k=0}^{k=\nu-1}a_{ijk}\lambda_k\quad,\quad\frac{\partial\lambda_j}{\partial s}=\sum_{k=0}^{k=n-1}a_{0jk}\lambda_k, \tag{33}$$

e ricordando che, per $i\geqq\nu$, si ha $a_{ijk}=0$ ed $a_{0jk}=a_{jk}$. Del resto la prima somma si può anche estendere, come la seconda, fino a $k=n-1$. Un calcolo facile riduce la (32), nel caso attuale, alla forma

$$\frac{\partial\lambda_j}{\partial s_i}=\sum_{k=0}^{k=n-1}A_{jk}^{(i)}\lambda_k, \tag{34}$$

ponendo

$$A_{jk}^{(i)}=x_i a_{0jk}+\sum_{r=1}^{r=\nu-1}\sigma_{ri}\left(\frac{\partial a_{0jk}}{\partial\sigma'_r}-\frac{\partial a_{rjk}}{\partial s}-\sum_{l=0}^{l=\nu-1}(a_{0jl}a_{rkl}-a_{0kl}a_{rjl})\right). \tag{35}$$

Intanto si osservi che le (33) sussistono quando alle λ si dà il significato di coordinate cartesiane d'un *punto fisso*, purchè dal secondo membro dell'eguaglianza di destra, per $j=0$, si sottragga 1. D'altra parte si facciano rotare gli assi tangenti in guisa da renderli, nell'origine, tangenti alle linee coordinate; e con $x_1, x_2, \dots, x_n$ si designino le nuove coordinate del punto fisso, intendendo riferite le prime ν agli assi tangenti, le altre agli assi normali, dimodochè $\lambda_j=x_{j+1}$ per $j\geqq\nu$, e

$$\lambda_j=g_{j1}x_1+g_{j2}x_2+\cdots+g_{j\nu}x_\nu \tag{36}$$

per $j=0,1,\dots,\nu-1$. In particolare $g_{0i}=x_i$; ma per $\nu\geqq3$ resta sempre qualche cosa di arbitrario nelle altre g, obbligate soltanto a costituire, con le x, un determinante ortogonale. Sostituendo l'espressione (36) nella (33) di sinistra si ottengono le relazioni

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial\sigma'_i}=\sum_{r=0}^{r=\nu-1}a_{ijr}g_{rk},$$

sempre integrabili, in virtù delle (19). È facile dedurne le formole

$$a_{ijk} = \sum_{r=1}^{r=\nu} g_{kr} \frac{\partial g_{jr}}{\partial \sigma'_i} = - \sum_{r=1}^{r=\nu} g_{jr} \frac{\partial g_{kr}}{\partial \sigma'_i}, \tag{37}$$

le quali servono al calcolo delle curvature geodetiche.

È chiaro che le condizioni (34), relative alle x, debbono presentarsi in forma analoga

$$\frac{\partial x_j}{\partial s_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{A}^{(i)}_{jk} x_k - \varepsilon_{ij}, \tag{38}$$

con ε_{ij} uguale ad 1 per $i=j$, a 0 per $i \lesseqgtr j$, e le $\mathfrak{A}$ funzioni, come le x, dell'ordine *zero*, ossia indipendenti dalle $\sigma', \sigma'', \ldots\ldots$ Il confronto delle (38) con le (34) mostra che, per $k > \nu$, si ha

$$A^{(i)}_{j,k-1} = \left| \begin{array}{ll} \mathfrak{A}^{(i)}_{j+1,k} & , \text{ se } j \geqq \nu, \\ \sum_{r=1}^{r=\nu} \mathfrak{A}^{(i)}_{rk} g_{jr} & , \text{ » } j < \nu; \end{array} \right. \tag{39}$$

e per $k \leqq \nu$

$$\sum_{r=0}^{r=\nu-1} A^{(i)}_{jr} g_{rk} = \left| \begin{array}{ll} \mathfrak{A}^{(i)}_{j+1,k} & , \text{ se } j \geqq \nu \\ \sum_{r=1}^{r=\nu} \mathfrak{A}^{(i)}_{rk} g_{jr} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial s_i} & , \text{ » } j < \nu. \end{array} \right.$$

Di queste quattro formole la seconda e la terza si equivalgono; e la quarta, se si pone

$$g_{ijk} = \sum_{r=1}^{r=\nu} g_{kr} \frac{\partial g_{jr}}{\partial s_i} = - \sum_{r=1}^{r=\nu} g_{jr} \frac{\partial g_{kr}}{\partial s_i},$$

dà, per j e k minori di ν,

$$A^{(i)}_{jk} = \sum_{l,m}^{\nu} \mathfrak{A}^{(i)}_{lm} g_{jl} g_{km} + g_{ijk}. \tag{40}$$

Tutte queste relazioni, insieme alle (35), servono in ciascun caso a mostrare, quando sian note le g, come le a_{ijk} (e per conseguenza le a_{jk}) dipendono dalle σ', giacchè le $\mathfrak{A}$ sono funzioni delle sole q. In particolare dalla (35) si ha sempre

$$a_{0jk} = x_1 A^{(1)}_{jk} + x_2 A^{(2)}_{jk} + \cdots + x_\nu A^{(\nu)}_{jk}. \tag{41}$$

Ne segue, per j e k non minori di ν, che i coefficienti a_{jk} (torsioni esterne) hanno, nelle σ', la stessa forma delle x, giacchè essi sono *lineari nelle* x. Invece per $j=0$, pur essendo $k \geqq \nu$, si ha

$$a_{0k} = \sum_{i=1}^{i=\nu} A^{(i)}_{0k} x_i = \sum_{i,j}^{\nu} \mathfrak{A}^{(i)}_{j,k+1} x_i x_j, \tag{42}$$

vale a dire che i coefficienti a_{0k} (curvature normali) sono esprimibili mediante *forme quadratiche delle* x. Dall'ultimo risultato apparisce anche l'eguaglianza necessaria $\mathfrak{a}_{jk}^{(i)} = \mathfrak{a}_{ik}^{(j)}$ per i ed j non maggiori di ν, e $k > \nu$. Ma questa ed altre proprietà delle funzioni $\mathfrak{a}$ saranno ben presto stabilite per altra via. Se poi j e k sono minori di ν, basta sostituire in (41) i valori (40) per ottenere la parte del primo ordine nell'espressione della curvatura geodetica a_{jk}, quella del secondo ordine essendo già nota per le (37).

Affinchè le (38) siano integrabili occorre e basta che si abbia, per qualunque x,

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j},$$

ossia

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathfrak{G}_{ij}\right)\frac{\partial x}{\partial s_i} = \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathfrak{G}_{ji}\right)\frac{\partial x}{\partial s_j}, \tag{43}$$

dove

$$\mathfrak{G}_{ij} = \frac{1}{Q_i Q_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}. \tag{44}$$

Intanto dalle (38) si deduce, derivando e ponendo tutte le x uguali a zero,

$$\frac{\partial x_j}{\partial s_i} = -\varepsilon_{ij} \quad , \quad \frac{\partial^2 x_j}{\partial s_i \partial s_k} = -\mathfrak{a}_{jk}^{(i)};$$

quindi la (43), applicata ad x_k, dà

$$\mathfrak{a}_{kj}^{(i)} + \varepsilon_{ik}\mathfrak{G}_{ij} = \mathfrak{a}_{ki}^{(j)} + \varepsilon_{jk}\mathfrak{G}_{ji}. \tag{45}$$

Bisogna poi notare che, se per poco si restituisce alle x il significato di coseni direttori, la somma

$$\sum_{j=1}^{j=n} x_j \frac{\partial x_j}{\partial s_i} = \sum_{j,k}^{n} \mathfrak{a}_{jk}^{(i)} x_j x_k$$

deve ridursi identicamente a zero, e per conseguenza

$$\mathfrak{a}_{jk}^{(i)} = -\mathfrak{a}_{kj}^{(i)}. \tag{46}$$

Siccome gli indici inferiori delle $\mathfrak{a}$ possono variare da 1 ad n, mentre l'indice superiore non può oltrepassare ν, in (45) si deve supporre che tanto i quanto j non siano maggiori di ν. Se non è $k > \nu$, può accadere che k sia uguale ad i o ad j; ed allora dalle (45) segue subito $\mathfrak{a}_{ij}^{(i)} = -\mathfrak{G}_{ij}$, e si ottiene così un *primo* gruppo di coefficienti $\mathfrak{a}$, uguali alle $\nu(\nu-1)$ funzioni (44). Se poi k, pur non essendo maggiore di ν, è diverso da i e da j, la proprietà $\mathfrak{a}_{kj}^{(i)} = \mathfrak{a}_{ki}^{(j)}$, che in virtù della (46) dà pure $\mathfrak{a}_{jk}^{(i)} = \mathfrak{a}_{ik}^{(j)}$, ci permette di scrivere

$$-\mathfrak{a}_{jk}^{(i)} = \mathfrak{a}_{kj}^{(i)} = \mathfrak{a}_{ki}^{(j)} = \mathfrak{a}_{ji}^{(k)} = \mathfrak{a}_{jk}^{(i)},$$

e per conseguenza $\mathfrak{A}_{jk}^{(i)}=0$. Invece per $k>\nu$ la (45) dà sempre $\mathfrak{A}_{kj}^{(i)}=\mathfrak{A}_{ki}^{(j)}$; e però, se con $\mathfrak{T}_{ij}^{(k-\nu)}$ si rappresentano i coefficienti $\mathfrak{A}_{kj}^{(i)}$, si può soltanto affermare che $\mathfrak{T}_{ij}=\mathfrak{T}_{ji}$, qualunque sia l'indice superiore. In particolare conviene rappresentare con $\mathfrak{M}_i$ i coefficienti $\mathfrak{T}_{ii}$, cambiati di segno, e muniti del medesimo indice superiore. Abbiamo così un *secondo* gruppo di funzioni $\mathfrak{A}$, costituito da $\nu(n-\nu)$ funzioni $\mathfrak{M}$ ed $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(n-\nu)$ funzioni $\mathfrak{T}$. Il *terzo* ed ultimo gruppo è costituito dalle $\frac{1}{2}\nu(n-\nu)(n-\nu-1)$ funzioni $\mathfrak{A}_{jk}^{(i)}$ con j e k maggiori di ν. Torna utile distinguere queste dalle altre $\mathfrak{A}$ designandole con $\mathfrak{E}_{j-\nu,k-\nu}^{(i)}$. Così avviene che $\frac{1}{2}\nu n(n+\nu)-\nu(\nu-1)$ coefficienti $\mathfrak{A}$ son sempre nulli, mentre gli altri $\frac{1}{2}\nu n(n-\nu)+\nu(\nu-1)$, generalmente diversi da zero, si ripartiscono in tre gruppi di funzioni, dalle quali dipendono in vario modo le curvature di tutte le linee dello spazio che si considera. Nello spazio lineare ($n=\nu$) sussistono le sole funzioni del primo gruppo. Se lo spazio si curva, restando immerso in uno spazio lineare con una dimensione di più, appariscono le funzioni del secondo gruppo. Continuando lo spazio a curvarsi, anche fuori del detto spazio lineare ($n\geqq\nu+2$), compariscono finalmente le funzioni $\mathfrak{E}$, costituenti il terzo ed ultimo gruppo. Ciò basterebbe per far dare ai varii coefficienti $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{E}$ il nome di *curvature fondamentali*, che del resto si trova giustificato, anche per le $\mathfrak{G}$, dalle relazioni mediante le quali da questi coefficienti dipendono le curvature spaziali di qualunque linea dello spazio. Così, per esempio, la (42) mostra immediatamente (ponendo tutte le x uguali a zero, tranne $x_i=1$) che, per la linea q_i, le curvature normali $a_{0\nu}, a_{0,\nu+1},\ldots$ sono appunto, a prescindere dal segno, $\mathfrak{M}_i^{(1)}, \mathfrak{M}_i^{(2)},\ldots$; ed analogamente dalla (41) segue che le torsioni esterne della medesima linea son date dalle varie funzioni $\mathfrak{E}^{(i)}$.

Qui non occorre insistere sui risultati dell'applicazione completa delle (43) alle formole (38). Ci basterà segnalare la formola universale di Codazzi

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\mathfrak{G}_{ij}\right)\mathfrak{A}_{kl}^{(i)}-\left(\frac{\partial}{\partial s_i}+\mathfrak{G}_{ji}\right)\mathfrak{A}_{kl}^{(j)}=\sum_{r=1}^{r=n}\left(\mathfrak{A}_{kr}^{(i)}\mathfrak{A}_{lr}^{(j)}-\mathfrak{A}_{kr}^{(j)}\mathfrak{A}_{lr}^{(i)}\right),$$

dalla quale si ricavano, con procedimento del tutto analogo a quello adoperato altrove (¹) in un caso particolare ($n=\nu$), varii gruppi di formole; e per $n\geqq\nu+2$ compariscono anche nuove formole

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\mathfrak{G}_{ij}\right)\mathfrak{E}_{kl}^{(i)}-\left(\frac{\partial}{\partial s_i}+\mathfrak{G}_{ji}\right)\mathfrak{E}_{kl}^{(j)}$$
$$=\sum_{r=1}^{r=\nu}\left(\mathfrak{T}_{ir}^{(k)}\mathfrak{T}_{jr}^{(l)}-\mathfrak{T}_{ir}^{(l)}\mathfrak{T}_{jr}^{(k)}\right)+\sum_{r=1}^{r=n-\nu}\left(\mathfrak{E}_{kr}^{(i)}\mathfrak{E}_{lr}^{(j)}-\mathfrak{E}_{kr}^{(j)}\mathfrak{E}_{lr}^{(i)}\right),$$

identicamente soddisfatte per $n=\nu+1$. Vogliamo soltanto far notare che molte di queste formole sono da considerare come aspetti varii d'una formola unica, secondo

(¹) *Geometria intrinseca*, pag. 238.

la scelta che si fa degli assi nello spazio normale. Rimane infatti ancora in nostro arbitrio l'orientamento degli assi normali, sicchè ci è sempre lecito cambiare ogni $x_{\nu+i}$ in $e_{i1} x_{\nu+1} + e_{i2} x_{\nu+2} + \dots$, designando con e_{ij} gli elementi d'un determinante ortogonale. Per tale sostituzione non variano le $\mathcal{G}$, ma le (38) mostrano che ogni $\mathcal{T}^{(i)}$ si cambia in $e_{i1} \mathcal{T}^{(1)} + e_{i2} \mathcal{T}^{(2)} + \dots$, ed ogni $\mathcal{E}^{(i)}_{jk}$ in un'espressione simile alla (40):

$$\sum_{l,m}^{n-\nu} \mathcal{E}^{(i)}_{lm} e_{jl} e_{km} + e_{ijk} .$$

Ora è chiaro che ognuna delle formole di Codazzi, applicata ai nuovi coefficienti $\mathcal{A}$, se involge anche le e_{ij}, si risolve in più formole analoghe, relative agli antichi coefficienti, secondo le varie possibili determinazioni delle e_{ij}. Le medesime considerazioni, applicabili anche alle g_{ij} nello spazio tangente, conducono a riguardare le varie curvature $\mathcal{A}$ soltanto come *parziali*, ossia come altrettante curvature componenti delle curvature propriamente dette; e ciò noi vedremo con maggior chiarezza prendendo ad esaminare un caso particolare.

§ 5. Applicazione alle superficie.

Nel caso d'una superficie, ossia per $\nu = 2$, una è la funzione σ da considerare; e si ha

$$\Theta = \Delta\sigma \quad , \quad \theta = \Delta\sigma - \sigma'^2 \quad , \quad \theta_1 = \frac{\partial\sigma}{\partial s_2} \quad , \quad \theta_2 = -\frac{\partial\sigma}{\partial s_1} .$$

I coseni $x_1 = \cos\omega$, $x_2 = \operatorname{sen}\omega$ si esprimono dunque, in virtù delle (23), nel seguente modo:

$$(47) \quad x_1 = \frac{1}{\Delta\sigma}\left(\sigma' \frac{\partial\sigma}{\partial s_1} + \sqrt{\Delta\sigma - \sigma'^2}\,\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}\right) \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\Delta\sigma}\left(\sigma' \frac{\partial\sigma}{\partial s_2} - \sqrt{\Delta\sigma - \sigma'^2}\,\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}\right) .$$

Inoltre le g son tutte determinate, giacchè

$$g_{11} = -g_{02} = -x_2 \quad , \quad g_{12} = g_{01} = x_1 .$$

Limitiamoci, per semplicità, a considerare una superficie immersa in uno spazio lineare a quattro dimensioni, supponiamo cioè, con $\nu = 2$, anche $n = 4$, nella quale ipotesi basta una sola funzione χ, arbitraria, per esprimere le funzioni e:

$$e_{11} = e_{22} = \cos\chi \quad , \quad e_{12} = -e_{21} = \operatorname{sen}\chi .$$

Le curvature spaziali d'una linea qualunque sono la curvatura geodetica $a_{01} = \mathcal{G}$, la torsione esterna $a_{23} = \mathcal{E}$, e le componenti $a_{02} = \mathcal{N}^{(1)}$, $a_{03} = \mathcal{N}^{(2)}$, e $-a_{12} = \mathcal{T}^{(1)}$, $-a_{13} = \mathcal{T}^{(2)}$ della curvatura normale e della torsione geodetica. Le curvature fonda-

mentali, quando a $\mathcal{G}_{ij}$, $\mathcal{E}^{(i)}$, $\mathcal{T}_{12}$ si sostituiscono i simboli più semplici $\mathcal{G}_i$, $(-1)^i \mathcal{E}_i$, $\mathcal{T}_*$, vengono espresse nel seguente modo:

$$\mathfrak{a}_{12}^{(1)} = -\mathcal{G}_1 \;,\quad \mathfrak{a}_{12}^{(2)} = \mathcal{G}_2 \;,\quad \mathfrak{a}_{34}^{(1)} = -\mathcal{E}_1 \;,\quad \mathfrak{a}_{34}^{(2)} = \mathcal{E}_2 ,$$

$$\mathfrak{a}_{13}^{(1)} = \mathcal{N}_1^{(1)} \;,\quad \mathfrak{a}_{23}^{(2)} = \mathcal{N}_2^{(1)} \;,\quad \mathfrak{a}_{14}^{(1)} = \mathcal{N}_1^{(2)} \;,\quad \mathfrak{a}_{24}^{(2)} = \mathcal{N}_2^{(2)} ,$$

$$\mathfrak{a}_{23}^{(1)} = \mathfrak{a}_{13}^{(2)} = -\mathcal{T}_*^{(1)} \;,\quad \mathfrak{a}_{24}^{(1)} = \mathfrak{a}_{14}^{(2)} = -\mathcal{T}_*^{(2)} .$$

D'altra parte, per le formole (39, 40),

$$A_{01}^{(1)} = \frac{\partial \omega}{\partial s_1} - \mathcal{G}_1 \;,\quad A_{01}^{(2)} = \frac{\partial \omega}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2 \;,\quad A_{23}^{(1)} = -\mathcal{E}_1 \;,\quad A_{23}^{(2)} = \mathcal{E}_2 ,$$

$$A_{02}^{(1)} = \mathcal{N}_1^{(1)} \cos \omega - \mathcal{T}_*^{(1)} \operatorname{sen} \omega \;,\quad A_{02}^{(2)} = \mathcal{N}_2^{(1)} \operatorname{sen} \omega - \mathcal{T}_*^{(1)} \cos \omega ,$$

$$A_{03}^{(1)} = \mathcal{N}_1^{(2)} \cos \omega - \mathcal{T}_*^{(2)} \operatorname{sen} \omega \;,\quad A_{03}^{(2)} = \mathcal{N}_2^{(2)} \operatorname{sen} \omega - \mathcal{T}_*^{(2)} \cos \omega ,$$

$$A_{12}^{(1)} = -\mathcal{N}_1^{(1)} \operatorname{sen} \omega - \mathcal{T}_*^{(1)} \cos \omega \;,\quad A_{12}^{(2)} = \mathcal{N}_2^{(1)} \cos \omega + \mathcal{T}_*^{(1)} \operatorname{sen} \omega ,$$

$$A_{13}^{(1)} = -\mathcal{N}_1^{(2)} \operatorname{sen} \omega - \mathcal{T}_*^{(2)} \cos \omega \;,\quad A_{13}^{(2)} = \mathcal{N}_2^{(2)} \cos \omega + \mathcal{T}_*^{(2)} \operatorname{sen} \omega .$$

Ciò premesso, per calcolare la curvatura geodetica, si ha dalle formole (41, 37)

$$a_{001} = x_1 A_{01}^{(1)} + x_2 A_{01}^{(2)} \;,\quad a_{101} = x_1 \frac{\partial x_2}{\partial \sigma'} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial \sigma'} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma'} ;$$

poi la (15) dà

$$\mathcal{G} = \frac{\sigma''}{\sqrt{\theta}} + \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) x_2 - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) x_1 ,$$

e questa, mediante sostituzione dei valori (47), e tenendo presente che

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \frac{\partial}{\partial s_1} + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \frac{\partial}{\partial s_2} \;,\quad 0 = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \frac{\partial}{\partial s_2} - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \frac{\partial}{\partial s_1} ,$$

si trasforma agevolmente nella *formola di Bonnet* generalizzata:

$$\mathcal{G} = \frac{\sigma''}{\sqrt{\Delta\sigma - \sigma'^2}} - \frac{\Delta^2\sigma}{\Delta\sigma} \sqrt{\Delta\sigma - \sigma'^2} + \frac{2}{\sqrt{\Delta\sigma}} \left\{ \frac{\sigma'^2 - {}^1\!/_2 \Delta\sigma}{\sqrt{\Delta\sigma - \sigma'^2}} \Delta\left(\sigma, \frac{1}{\sqrt{\Delta\sigma}}\right) - \sigma' \frac{\partial\left(\sigma, \frac{1}{\sqrt{\Delta\sigma}}\right)}{\partial(s_1, s_2)} \right\} .$$

Molto più semplice riesce il calcolo delle altre curvature, giacchè si ha

$$\mathcal{E} = a_{023} \;,\quad \mathcal{N}^{(1)} = a_{002} \;,\quad \mathcal{N}^{(2)} = a_{003} \;,\quad \mathcal{T}^{(1)} = -a_{012} \;,\quad \mathcal{T}^{(2)} = -a_{013} ,$$

e per conseguenza, applicando la formola (41),

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \operatorname{sen} \omega - \mathcal{E}_1 \cos \omega \tag{48}$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cos^2 \omega - 2\mathcal{T}_* \cos \omega \operatorname{sen} \omega + \mathcal{N}_2 \operatorname{sen}^2 \omega ,$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_* \cos^2 \omega + (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \cos \omega \operatorname{sen} \omega - \mathcal{T}_* \operatorname{sen}^2 \omega ,$$

purchè a tutti i simboli, nelle ultime due formole, si attribuisca il medesimo indice superiore 1 o 2.

Ora le condizioni (38), necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (x_1, x_2, x_3, x_4), prendono la forma

$$
(49)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial x_1}{\partial s_1} = -\mathcal{G}_1 x_2 + \mathfrak{M}_1^{(1)} x_3 + \mathfrak{M}_1^{(2)} x_4 - 1 \,, & \dfrac{\partial x_1}{\partial s_2} = \mathcal{G}_2 x_2 - \mathfrak{T}_*^{(1)} x_3 - \mathfrak{T}_*^{(2)} x_4 \,, \\
\dfrac{\partial x_2}{\partial s_1} = \mathcal{G}_1 x_1 - \mathfrak{T}_*^{(1)} x_3 - \mathfrak{T}_*^{(2)} x_4 \,, & \dfrac{\partial x_2}{\partial s_2} = -\mathcal{G}_2 x_1 + \mathfrak{M}_2^{(1)} x_3 + \mathfrak{M}_2^{(2)} x_4 - 1 \,, \\
\dfrac{\partial x_3}{\partial s_1} = -\mathfrak{M}_1^{(1)} x_1 + \mathfrak{T}_*^{(1)} x_2 - \mathcal{E}_1 x_4 \,, & \dfrac{\partial x_3}{\partial s_2} = \mathfrak{T}_*^{(1)} x_1 - \mathfrak{M}_2^{(1)} x_2 + \mathcal{E}_2 x_4 \,, \\
\dfrac{\partial x_4}{\partial s_1} = -\mathfrak{M}_1^{(1)} x_1 + \mathfrak{T}_*^{(2)} x_2 + \mathcal{E}_1 x_3 \,, & \dfrac{\partial x_4}{\partial s_2} = \mathfrak{T}_*^{(2)} x_1 - \mathfrak{M}_2^{(2)} x_2 - \mathcal{E}_2 x_3 \,.
\end{array}
\right.
$$

In particolare se ne deduce che, quando il punto M si sposta, sulla superficie, nella direzione definita dall'angolo ω, il *piano normale* $(x_1 = 0 \,,\ x_2 = 0)$ rota intorno al punto (x_3, x_4) definito, nel piano stesso, dalle equazioni

$$\mathfrak{M}^{(1)} x_3 + \mathfrak{M}^{(2)} x_4 = 1 \quad , \quad \mathfrak{T}^{(1)} x_3 + \mathfrak{T}^{(2)} x_4 = 0 \,.$$

Se si elimina ω, si trova l'equazione della *conica di curvatura*

$$(50)\quad \left(\mathfrak{M}_1^{(1)} x_3 + \mathfrak{M}_1^{(2)} x_4 - 1\right)\left(\mathfrak{M}_2^{(1)} x_3 + \mathfrak{M}_2^{(2)} x_4 - 1\right) - \left(\mathfrak{T}_*^{(1)} x_3 + \mathfrak{T}_*^{(2)} x_4\right)^2 = 0 \,,$$

luogo dei punti d'intersezione del piano normale in M con tutti i piani normali infinitamente vicini. Evidentemente ogni invariante di questa conica deve rimanere inalterato quando alla coppia degli assi normali s'imprime una rotazione nel proprio piano, e deve perciò riuscire indipendente dalla funzione arbitraria χ. È facile verificare che ciò avviene per l'invariante ortogonale $\mathcal{K}$, somma dei coefficienti estremi nella parte quadratica $K^{(1)} x_3^2 + K^* x_3 x_4 + K^{(2)} x_4^2$ di (50), giacchè la rotazione χ del piano normale in sè cambia simultaneamente $K^{(1)}$ e $K^{(2)}$ in

$$K^{(1)} \cos^2\chi + K^* \cos\chi \,\mathrm{sen}\,\chi + K^{(2)} \mathrm{sen}^2\chi \ , \ K^{(2)} \cos^2\chi - K^* \cos\chi \,\mathrm{sen}\,\chi + K^{(1)} \mathrm{sen}^2\chi \,,$$

e però lascia invariata la somma $\mathcal{K}$. Questa può dunque servire a misurare una prima curvatura o *flessione* della superficie, rispondente a quella che si suol considerare nello spazio lineare a tre dimensioni. Resta inalterata anche l'espressione

$$\mathfrak{J} = \left(\mathfrak{M}_1^{(2)} - \mathfrak{M}_2^{(2)}\right)\mathfrak{T}_*^{(1)} - \left(\mathfrak{M}_1^{(1)} - \mathfrak{M}_2^{(1)}\right)\mathfrak{T}_*^{(2)} \,,$$

che sembra più particolarmente adatta a dar la misura d'una parziale *torsione*, analoga a quella delle curve immerse in uno spazio lineare a tre dimensioni. Il determinante della conica (50) è appunto uguale ad $\frac{1}{4}\mathfrak{J}^2$; e ciò dimostra l'indipendenza di $\mathfrak{J}$ da χ, che si può del resto constatare direttamente, poichè si ha

$$\mathfrak{J} = \begin{vmatrix}
0 & \mathfrak{T}_*^{(1)} \cos\chi + \mathfrak{T}_*^{(2)} \mathrm{sen}\,\chi & -\mathfrak{T}_*^{(1)} \mathrm{sen}\,\chi + \mathfrak{T}_*^{(2)} \cos\chi \\
1 & \mathfrak{M}_1^{(1)} \cos\chi + \mathfrak{M}_1^{(2)} \mathrm{sen}\,\chi & -\mathfrak{M}_1^{(1)} \mathrm{sen}\,\chi + \mathfrak{M}_1^{(2)} \cos\chi \\
1 & \mathfrak{M}_2^{(1)} \cos\chi + \mathfrak{M}_2^{(2)} \mathrm{sen}\,\chi & -\mathfrak{M}_2^{(1)} \mathrm{sen}\,\chi + \mathfrak{M}_2^{(2)} \cos\chi
\end{vmatrix} \,,$$

qualunque sia χ.

Per trovare le formole di Codazzi basta applicare alle (19) la condizione d'integrabilità

$$(51)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial s_2}+\mathfrak{G}_1\right)\frac{\partial x}{\partial s_1}=\left(\frac{\partial}{\partial s_1}+\mathfrak{G}_2\right)\frac{\partial x}{\partial s_2},$$

alla quale si riducono, nel caso attuale, tutte le (48). Se questa condizione si applica ad x_2, la considerazione dei coefficienti di x_3 ed x_4 conduce alla prima coppia di formole:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_2^{(1)}}{\partial s_1}+\frac{\partial \mathfrak{T}_*^{(1)}}{\partial s_2}+2\mathfrak{T}_*^{(1)}\mathfrak{G}_1=\left(\mathfrak{M}_1^{(1)}-\mathfrak{M}_2^{(1)}\right)\mathfrak{G}_2-\mathcal{E}_1\,\mathfrak{M}_2^{(2)}+\mathcal{E}_2\,\mathfrak{T}_*^{(2)},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{M}_2^{(2)}}{\partial s_1}+\frac{\partial \mathfrak{T}_*^{(2)}}{\partial s_2}+2\mathfrak{T}_*^{(2)}\mathfrak{G}_1=\left(\mathfrak{M}_1^{(2)}-\mathfrak{M}_2^{(2)}\right)\mathfrak{G}_2+\mathcal{E}_1\,\mathfrak{M}_2^{(1)}-\mathcal{E}_2\,\mathfrak{T}_*^{(1)}.$$

Operando analogamente sopra x_1 si ottiene invece

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_1^{(1)}}{\partial s_2}+\frac{\partial \mathfrak{T}_*^{(1)}}{\partial s_1}+2\mathfrak{T}_*^{(1)}\mathfrak{G}_2=\left(\mathfrak{M}_2^{(1)}-\mathfrak{M}_1^{(1)}\right)\mathfrak{G}_1-\mathcal{E}_1\,\mathfrak{T}_*^{(2)}+\mathcal{E}_2\,\mathfrak{M}_1^{(2)},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{M}_1^{(2)}}{\partial s_2}+\frac{\partial \mathfrak{T}_*^{(2)}}{\partial s_1}+2\mathfrak{T}_*^{(2)}\mathfrak{G}_2=\left(\mathfrak{M}_2^{(2)}-\mathfrak{M}_1^{(2)}\right)\mathfrak{G}_1+\mathcal{E}_1\,\mathfrak{T}_*^{(1)}-\mathcal{E}_2\,\mathfrak{M}_1^{(1)}.$$

Se poi si osserva che la rotazione χ cambia $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ rispettivamente in

$$(52)\qquad \mathcal{E}_1-\frac{\partial\chi}{\partial s_1}\quad,\quad \mathcal{E}_2+\frac{\partial\chi}{\partial s_2},$$

è facile constatare che le quattro formole si riducono sostanzialmente a due:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1}+\mathfrak{G}_2\right)\left(\mathfrak{M}_2^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{M}_2^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)+\left(\frac{\partial}{\partial s_2}+\mathfrak{G}_1\right)\left(\mathfrak{T}_*^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{T}_*^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)$$
$$=\left(\mathfrak{M}_1^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{M}_1^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)\mathfrak{G}_2-\left(\mathfrak{T}_*^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{T}_*^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)\mathfrak{G}_1$$
$$+\left(\mathfrak{M}_2^{(1)}\operatorname{sen}\chi-\mathfrak{M}_2^{(2)}\cos\chi\right)\left(\mathcal{E}_1-\frac{\partial\chi}{\partial s_1}\right)-\left(\mathfrak{T}_*^{(1)}\operatorname{sen}\chi-\mathfrak{T}_*^{(2)}\cos\chi\right)\left(\mathcal{E}_2+\frac{\partial\chi}{\partial s_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2}+\mathfrak{G}_1\right)\left(\mathfrak{M}_1^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{M}_1^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)+\left(\frac{\partial}{\partial s_1}+\mathfrak{G}_2\right)\left(\mathfrak{T}_*^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{T}_*^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)$$
$$=\left(\mathfrak{M}_2^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{M}_2^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)\mathfrak{G}_1-\left(\mathfrak{T}_*^{(1)}\cos\chi+\mathfrak{T}_*^{(2)}\operatorname{sen}\chi\right)\mathfrak{G}_2$$
$$-\left(\mathfrak{M}_1^{(1)}\operatorname{sen}\chi-\mathfrak{M}_1^{(2)}\cos\chi\right)\left(\mathcal{E}_2+\frac{\partial\chi}{\partial s_2}\right)+\left(\mathfrak{T}_*^{(1)}\operatorname{sen}\chi-\mathfrak{T}_*^{(2)}\cos\chi\right)\left(\mathcal{E}_1-\frac{\partial\chi}{\partial s_1}\right).$$

Queste corrispondono alle prime due della ben nota [1] terna di Codazzi. Per trovare la terza (formola di Gauss) basta considerare il coefficiente di x_2 nella relazione che si ottiene applicando la condizione (51) ad x_1. Applicandola invece ad x_3,

[1] *Geometria intrinseca*, pag. 158.

e considerando il coefficiente di x_4, si trova una *quarta* ed ultima formola, che ha per la torsione l'importanza stessa, che la formola di Gauss ha per la flessione:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2}+\mathcal{G}_1\right)\mathcal{G}_1+\left(\frac{\partial}{\partial s_1}+\mathcal{G}_2\right)\mathcal{G}_2+\mathcal{K}=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2}+\mathcal{G}_1\right)\mathcal{E}_1+\left(\frac{\partial}{\partial s_1}+\mathcal{G}_2\right)\mathcal{E}_2+\mathcal{J}=0,$$

L'ultima formola rimette in evidenza il carattere invariantivo di $\mathcal{J}$, giacchè, per la (51), la somma dei primi due termini non viene alterata quando alle $\mathcal{E}$ si sostituiscono i valori (52). Essa è identicamente soddisfatta negli spazii lineari a tre dimensioni, perchè in questi $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{J}$ si riducono a zero. Reciprocamente, se $\mathcal{J}=0$, la detta formola esprime la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'una funzione χ, tale che

$$\mathcal{E}_1=\frac{\partial\chi}{\partial s_1}\quad,\quad \mathcal{E}_2=-\frac{\partial\chi}{\partial s_2}; \tag{53}$$

e però, facendo rotare appunto di χ la coppia degli assi normali, si vede che le nuove torsioni esterne fondamentali, espresse dalle (52), si riducono a zero. Nel caso generale d'uno spazio curvo si può sempre, per una conveniente rotazione del piano normale in sè, trovare una funzione ψ, tale che

$$\mathcal{E}_1=-\frac{\partial\psi}{\partial s_2}\quad,\quad \mathcal{E}_2=-\frac{\partial\psi}{\partial s_1},$$

e per conseguenza $\mathcal{J}=\Delta^2\psi$. Inoltre la (48) mostra che la derivata di ψ in qualunque direzione tangente misura la torsione esterna delle curve tracciate, sulla superficie, normalmente alla direzione stessa.

L'identico annullarsi delle torsioni esterne non permette di asserire che la superficie è tutta immersa in uno spazio lineare a tre dimensioni. Affinchè ciò avvenga non basta, infatti, che si annulli $\mathcal{J}$; bisogna che si annulli anche l'altro invariante

$$\mathrm{K}^{*2}-4\mathrm{K}^{(1)}\mathrm{K}^{(2)}=(\mathfrak{M}_1^{(1)}\mathfrak{M}_2^{(2)}-\mathfrak{M}_1^{(2)}\mathfrak{M}_2^{(1)})^2+$$
$$+\left[(\mathfrak{M}_1^{(2)}+\mathfrak{M}_2^{(2)})\mathfrak{T}_*^{(1)}-(\mathfrak{M}_1^{(1)}+\mathfrak{M}_2^{(1)})\mathfrak{T}_*^{(2)}\right]^2-\mathcal{J}^2,$$

che per $\mathcal{J}=0$ è la somma di due quadrati. Occorre perciò che vi sia proporzionalità fra le quadriche $\mathfrak{M}^{(1)}$ ed $\mathfrak{M}^{(2)}$. Ora, posto $\mathfrak{M}^{(1)}=\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{(2)}=k\mathfrak{M}$, dalle prime formole di Codazzi risulta che dev'essere

$$\mathfrak{M}_2\frac{\partial k}{\partial s_1}+\mathfrak{T}_*\frac{\partial k}{\partial s_2}=0\quad,\quad \mathfrak{M}_1\frac{\partial k}{\partial s_2}+\mathfrak{T}_*\frac{\partial k}{\partial s_1}=0,$$

e per conseguenza $k=$ *costante*, almeno per $\mathrm{K}\gtrless 0$. D'altra parte si noti che, anche dopo quella particolare rotazione χ, che riduce a zero le $\mathcal{E}$, si resta liberi di fare ulteriormente rotare d'un *medesimo* angolo tutte le coppie di assi normali, giacchè χ si può far variare d'una costante, senza che ne vengano alterate le (53). Una con-

veniente rotazione costante permette dunque di ridurre k a 0, sicchè riescano uguali a zero $\mathfrak{N}_1^{(2)}, \mathfrak{N}_2^{(2)}, \mathfrak{T}_*^{(2)}$. Dopo ciò le condizioni per l'invariabilità della direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha_1}{\partial s_1} = \mathfrak{N}_1\alpha_3 - \mathfrak{G}_1\alpha_2\,, \quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_1} = \mathfrak{G}_1\alpha_1 - \mathfrak{T}_*\alpha_3\,, \quad \frac{\partial\alpha_3}{\partial s_1} = \mathfrak{T}_*\alpha_2 - \mathfrak{N}_1\alpha_1\,, \quad \frac{\partial\alpha_4}{\partial s_1} = 0\,, \\ &\frac{\partial\alpha_1}{\partial s_2} = \mathfrak{G}_2\alpha_2 - \mathfrak{T}_*\alpha_3\,, \quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_2} = \mathfrak{N}_2\alpha_3 - \mathfrak{G}_2\alpha_1\,, \quad \frac{\partial\alpha_3}{\partial s_2} = \mathfrak{T}_*\alpha_1 - \mathfrak{N}_2\alpha_2\,, \quad \frac{\partial\alpha_4}{\partial s_2} = 0\,, \end{aligned}\right.$$

e sono soddisfatte per $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$. L'asse delle x_4 ha dunque una direzione invariabile nello spazio lineare a quattro dimensioni; e l'asse delle x_3 è l'ordinaria normale alla superficie nell'interno d'uno spazio lineare a tre dimensioni, che chiude in sè l'intera superficie. In questo caso la conica di curvatura è costituita dalle perpendicolari condotte al detto spazio lineare per i due centri principali di curvatura; ed in ogni altro caso, quando si spezza, essa consta sempre di due rette *reali*.

Osserviamo, per finire, che dal confronto tra le (49) e le analoghe formole, relative ad uno spazio curvo ([1]) a tre dimensioni, immerso in uno spazio lineare, viene maggior luce al significato geometrico dei coefficienti, che compariscono in queste ultime formole. Si vede, in primo luogo, che per le superficie costituenti un triplo sistema ortogonale, nel predetto spazio curvo, la curvatura $\mathfrak{T}_*^{(1)}$, relativa ad una coppia di linee coordinate, deve risultare uguale a zero sopra ciascuna delle tre superficie coordinate; ed in ciò consiste, come si sa, il teorema di Dupin. Invece la curvatura $\mathfrak{T}_*^{(2)}$ di tale coppia rappresenta, a prescindere dal segno, la torsione esterna dell'una come dell'altra linea sulle altre due superficie. Si vede inoltre che la curvatura $\mathfrak{N}^{(2)}$ d'una linea coordinata ha un valore unico sulle due superficie coordinate che vi s'incrociano, e che la curvatura $\mathfrak{N}^{(1)}$ della linea stessa, su ciascuna di queste superficie, coincide, in valore assoluto, con la curvatura geodetica sull'altra. È facile riconoscere, dopo ciò, che le quattordici formole di Codazzi, negli spazii curvi considerati, altro non sono che le analoghe formole, relative alle superficie coordinate di tali spazii.

([1]) *Geometria intrinseca*, pag. 222.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIII. (1892-1904) 2° Sem. Fasc. 6°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. (1892-1904). Fasc. 3°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCI

SERIE QUINTA — VOLUME V — FASCICOLO II.

R. NASINI, F. ANDERLINI E R. SALVADORI

RICERCHE SULLE EMANAZIONI TERRESTRI ITALIANE

II.

GAS DEL VESUVIO E DEI CAMPI FLEGREI, DELLE ACQUE ALBULE DI TIVOLI, DEL BULICAME DI VITERBO DI PERGINE, DI SALSOMAGGIORE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1904

Ricerche sulle emanazioni terrestri italiane.

II.

Gas del Vesuvio e dei Campi Flegrei, delle Acque Albule di Tivoli, del Bulicame di Viterbo, di Pergine, di Salsomaggiore.

Memoria del Corrispondente R. NASINI, di F. ANDERLINI e R. SALVADORI

letta nella seduta del 20 marzo 1904.

(Con quattro tavole).

Le ricerche che vengono esposte in questa Memoria sono una continuazione di quelle già stampate sino dal 1897. Il grande ritardo nella pubblicazione è da imputarsi principalmente al fatto che noi speravamo di poter ripetere le nostre osservazioni spettrali con uno spettrografo a reticolo e di poter tentare dei frazionamenti di alcuni dei gas da noi studiati alle bassissime temperature che si possono ottenere coll'aria liquida. La mancanza di mezzi impedì sin qui l'acquisto degli apparecchi necessarî e quindi crediamo opportuno di pubblicare intanto i risultati ottenuti, colla speranza di poter presto completare i nostri studî riguardo ai gas che si son manifestati come più interessanti. Una Nota preliminare sopra i gas della solfatara di Pozzuoli e del Vesuvio comparve nel 1898 nei Rendiconti dell'Accademia ed in essa annunziammo di avere scoperto alcune righe nuove nello spettro di queste emanazioni, righe nuove che potevano far ritenere probabile in esse la presenza del coronio e di altri nuovi elementi gassosi.

Le ricerche sui gas del Vesuvio e dei Campi Flegrei, dove ci recammo nel marzo 1897, si poterono intraprendere solo mediante il sussidio di lire 500 che ci concesse l'Accademia nella seduta del 7 febbraio 1897, dietro proposta del prof. Cannizzaro, appoggiata dall'illustre e compianto Presidente prof. Brioschi. All'Accademia rinnoviamo vivissimi ringraziamenti, lieti che i nostri studî abbiano già condotto a risultati interessanti e ne promettano dei molto più interessanti ancora per l'avvenire.

Le ricerche al Vesuvio ci furono rese molto più facili dal prof. E. Semmola, allora vice-direttore dell' Osservatorio vesuviano, e dall'ing. V. Tascone coadiutore allora nell'Osservatorio stesso, i quali misero a disposizione nostra tutto il personale e ci furono larghi di consigli e di aiuti: speciali ringraziamenti dobbiamo all'inserviente Andrea Verbasco e alle guide fratelli Pizzo di S. Sebastiano. Di somma utilità

ci fu poi l'opera e l'aiuto continuo del prof. V. R. Matteucci, per la grande conoscenza sua di tutto ciò che riguarda il vulcano, cosicchè egli potè ottimamente guidarci nella scelta e nella prelevazione dei campioni, sia dei minerali, sia dei gas, conducendoci là dove noi non saremmo mai giunti. Al giovane ed entusiasta scienziato, che con grande soddisfazione vediamo adesso direttore dell'Osservatorio, diciamo ancora una volta — grazie — in nome della scienza che coltiviamo. L'ing. Enrico Treiber, direttore della funicolare vesuviana, ci facilitò in ogni modo il trasporto del materiale e lui pure sentitamente ringraziamo.

Vivissime grazie dobbiamo al dott. Alfonso Ragnisco di Pozzuoli, al sig. Ambrogio Capomazza, allora sindaco, e al sig. Gennaro Romoli, allora assessore del comune di Pozzuoli, i quali tutti ci furono larghissimi di gentilezze e grandemente ci coadiuvarono nei nostri studî alla Solfatara. Ringraziamo pure il prof. Giovanni Giorgis e il dott. Camilla per aver raccolto per noi i gas delle Acque Albule di Tivoli, alla quale sorgente molte facilitazioni furono usate grazie alla squisita cortesia del sig. Carlo Dubois, console del Belgio a Roma e allora direttore della Società anonima delle Acque Albule. Il dott. Camilla fu anche così cortese di raccogliere per noi i gas del Bulicame di Viterbo.

Gas del Vesuvio e dei Campi Flegrei.

In una precedente Memoria [1] fu fatto cenno delle difficoltà che si incontrano in talune località nel raccogliere dei gas naturali, e purtroppo non possiamo affermare di averle vinte che in parte soltanto, specialmente per quanto riguarda le emanazioni del Vesuvio, perchè nessun terreno è forse meno atto a prestarsi quanto il cono di un vulcano per simili lavori e meno ancora una discesa di lava fluente. Agevolmente comprende e si forma un concetto di tali difficoltà chi vide una colata di lava anche consolidata; meglio ancora chi la vide scendere colle sue mille accidentalità di forme e di aspetti, ed avvicinandovisi ne ha provato gli effetti dell'urente calore. Nondimeno ci affrettiamo a soggiungere che è possibile di poter fare delle raccolte di gas lavici purchè non facciano difetto tempo e soprattutto mezzi adeguati. Quivi non si tratta di pericoli da evitare, perchè o non sono gravi o non ve ne sono affatto. Ciò che è assolutamente necessario non è il coraggio, ma lo sono invece dei mezzi e metodi di raccolta del tutto speciali, perchè non bastano i pochi centimetri cubici di gas, sufficienti per un'analisi eudiometrica. Questo genere di analisi dice troppo poco ora, per modo che si rendono assolutamente necessarie delle ricerche eseguite con metodi nuovi i quali vanno al di là dei soliti praticati in simili lavori. Le recenti scoperte di nuovi gas hanno aperto un campo che è necessario di coltivare perchè nel loro studio, ne siamo più che mai convinti, sarà possibile trovare la chiave per sciogliere molti problemi scientifici, e forse trarne delle pratiche applicazioni, quando meglio saranno conosciute le emanazioni terrestri.

[1] Atti Acc. Lincei, II, 1897.

Se la raccolta dei gas delle lave presenta delle difficoltà, ben altre e più gravi si affacciano quando si tratta di fare tale raccolta in un cratere in istato sia pure di moderata attività, come si trovava quello del Vesuvio al momento della nostra visita. Tuttavia la possibilità di penetrare nel cratere non sarebbe esclusa qualora fosse dato di premunirsi, fin dove si può, contro i pericoli che simile impresa presenta. Davanti a quella voragine che si sprofonda per centinaia di metri l'entusiasmo vince ogni timore, la paura diventa un sentimento ignoto; si vorrebbe poter afferrare colle mani quelle colonne di fumo, che qua e là dalle fessure della roccia, si sprigionano ora bianchissime, ora verdi, ora azzurre, si innalzano tortuose nell'aria, svaniscono nelle profondità dell'atmosfera e per sempre sfuggono. Vi sono gas acidissimi e deleterî, pezzi di lava spinti a centinaia di metri di altezza che ricadono entro e anche fuori del cratere; scoscendimenti dell'orlo, se non molto frequenti per lo meno possibili e non facili a prevedersi, e finalmente la difficoltà di trovare una via accessibile alle singole emanazioni crateriche costituiscono delle vere difficoltà materiali da superare. Da ciò si comprende che senza una preparazione sufficiente sarebbe vano sperare in una riuscita favorevole.

La lunga fessura prodottasi nel 1895 nel cono vesuviano che parte dall'orlo del cratere e scende fino alla base, lasciava sfuggire qua e là delle fumarole, però le più potenti si trovavano a circa 200 metri sotto l'orlo ed emanavano sopra una lunghezza di circa 70-80 metri. Queste emanazioni le chiameremo *grandi fumarole*. In questo punto l'operazione della raccolta fu meno disagevole, quantunque poca fosse la speranza di poter raccogliere gas dalle vere emanazioni endogene e non dei miscugli di queste con forti proporzioni di aria esterna.

La Solfatara di Pozzuoli offre delle emanazioni in vari punti, la più importante è la Fumarola grande, o Bocca della Solfatara. Disgraziatamente una grotta artificiale sottraeva alla vista questo interessantissimo fenomeno naturale, e non si comprende perchè non si demolisca, una volta che si è rinunziato alla speculazione, che ne aveva consigliata la costruzione. Per giungere ora fino alla fumarola è necessario entrare carponi nella grotta per evitare di essere investiti dai vapori caldissimi che si sprigionano con violenza e occupano tutta la parte superiore dell'antro fino a metà l'altezza di un uomo. Deploriamo un simile stato di cose perchè questa fumarola offrirebbe agli studiosi, ed anche ai curiosi, una immagine in piccole proporzioni di quello che avviene in grande sul fondo dei crateri vulcanici nello stadio solfatarico più o meno violento. In fatto il fondo del cratere del Vesuvio, nei giorni in cui l'abbiamo veduto, offriva lo stesso aspetto, ma enormemente ingrandito, della Fumarola grande della Solfatara di Pozzuoli, nella quale si poteva perfino vedere in qualche momento il getto di minuscoli lapilli e la formazione di conetti detritici, meno le riprese intermittenti di energia presentate dal cratere vesuviano. Benchè in tutti i libri di geologia si parli della solfatara di Pozzuoli, non è facile trovare una descrizione della Fumarola grande e perciò non crediamo del tutto inutile esporla in seguito tal quale l'abbiamo trovata.

Nelle emanazioni terrestri le proporzioni, e non di rado anche i componenti, sembrano variare anche per la stessa emanazione, cosicchè le nostre analisi eudiometriche sono talora alquanto diverse anche per quei gas raccolti dalle più antiche

e perenni. Nondimeno è lecito il dubbio se le variazioni sieno sempre intrinseche dei gas o non dipendano dai modi di raccolta ed anche dai metodi di analisi.

Nello studio delle emanazioni del distretto vulcanico dei Campi Flegrei e del Vesuvio veniva a presentarsi spontaneo un problema se, cioè, era possibile constatare per mezzo dello spettroscopio l'elio, ed eventualmente qualche altro gas, introducendo nella fiamma di un becco Bunsen le sostanze minerali che si riscontrano attorno alle fumarole e da esse in qualsiasi modo formate. Come ben si vede, era un ritornare sulla questione della emissione di radiazioni visibili allo spettroscopio da parte dei corpi gasosi portati alla temperatura delle fiamme. Tale questione sarebbe stata implicitamente risoluta in senso positivo dal Palmieri colla sua affermazione di aver veduto la riga D^3 dell'elio fin dal 1881 (1) e confermata con breve Nota dallo stesso autore introducendo nella fiamma di un becco di Bunsen un po' di sostanza semisolida da esso rinvenuta sul Vesuvio.

Fu specialmente in vista di ciò che facemmo raccolta di tutti quei materiali che parvero apparentemente somigliare a quello descritto dal Palmieri e in genere di tutti quelli che non fossero frammenti di lava inalterata.

Abbiamo ripetuto alcune esperienze di altri esperimentatori e qualcuna ne abbiamo eseguite di nuove, come quelle sugli idruri metallici, i quali se per avventura avessero permesso di vedere alla fiamma lo spettro dell'idrogeno avrebbero servito di appoggio alla presunta scoperta del Palmieri. Più direttamente abbiamo fatto dei tentativi con minerali che contengono l'elio e dai quali quasi esclusivamente ancor oggi si estrae. Questo argomento verrà però trattato separatamente, mentre qui verranno esposte le esperienze che si riferiscono allo studio dei gas naturali.

Raccolta dei gas nei Campi Flegrei.

Solfatara di Pozzuoli.

Incominciammo le operazioni di raccolta dei gas dalla Solfatara di Pozzuoli e precisamente dalla Fumarola grande detta *Bocca della Solfatara*. Questa emanazione giace ai piedi di una roccia che in quel punto strapiomba per qualche metro. È difficile ora formarsi un concetto esatto dell'aspetto che doveva presentare la grande Fumarola prima che venisse deturpata colla costruzione di cui si terrà parola. Essa si trova sul fondo di un piccolo avvallamento e vi si giunge per una scarpata, infossata fra due muri a secco. L'apertura della grotta ha forma d'una porticina dalla quale escono dei globi di vapore e gas molto caldi che ne ingombrano la metà superiore. La volta della grotta è stata formata per la sovrapposizione di massi di lava sopra i quali si distese uno strato di detrito metamorfosato in parte e quasi cementato dalle incrostazioni prodotte dalla fumarola stessa. Per giungere alle emanazioni fa d'uopo passare carponi attraverso la porticina e gettarsi per ultimo letteralmente bocconi onde evitare il contatto dei vapori la cui temperatura si aggira intorno ai 100°. I vapori escono da varî punti dalla grotta, dalle pareti come dal piano; è appunto dal piano che il

(1) Rendiconti Acc. di sc. di Napoli, anno XX, fasc. 10-12.

getto maggiore esce con grande violenza fischiando, ciò che dinota una pressione rilevante.

La temperatura fu misurata introducendo il bulbo di un termometro in un piccolo cumulo di detrito nel punto dove più violento sembrava il getto. Le letture furono fatte a più riprese e si trovò un minimo di 130° e un massimo di 132°.

L'interno della grotta è tappezzato qua e là da incrostazioni di vario colore e gradazioni, bianche, grigie, gialle, ranciate, rosse, ecc., il più spesso stratificate, raramente cristalline in modo deciso. Le più abbondanti incrostazioni e stratificazioni si formano nelle anfrattuosità delle pareti e dove i gas e vapori escono senza pressione apprezzabile. Non v'ha dubbio che tali produzioni naturali sarebbero assai più abbondanti e le cristallizzazioni più sviluppate se si lasciasse loro il tempo di formarsi; ma invece vengono tolte, di mano in mano che si depositano in quantità sufficientemente grandi da potersi staccare, per farne commercio coi visitatori.

La temperatura nell'interno della grotta non è eccessivamente alta rasente terra e si può agevolmente tollerare; ciò dipende dalla corrente d'aria abbastanza energica che dall'esterno viene richiamata dai vapori e gas caldissimi che la pressione spinge verso la volta ed escono attraverso gli interstizi fra i massi di lava e dalla porta occupandone, come si disse, quasi la metà superiore del vano.

È singolare il fenomeno, che le guide non mancano mai di mostrare ai visitatori, della formazione dei vapori resi visibili facendo scorrere rapidamente la fiamma di un fascetto di paglia sui muri, che incassano la scarpata, dalle cui fessure si vedono uscire per alcuni minuti dei vapori bianchi che prima erano invisibili. Dalle fessure della roccia sovrastante alla grotta e dagli interstizi dei massi che ne formano la volta escono dei vapori, che determinarono un processo di metamorfismo più o meno profondo; si trovano degli strati di materia colorata in un bel verde, sotto i quali specialmente la roccia è molto alterata e ridotta in una pasta gialliccia. Anche il De Luca [1] segnalò questa sostanza verde.

La raccolta del gas, ove il getto era più forte, fu effettuata coprendolo con un imbuto metallico ad apertura abbastanza ampia. Siccome il getto tendeva a rovesciarlo, per mantenere l'imbuto fermo al suo posto si dovette caricare all'esterno con dei pezzi di roccia. I gas e vapori vennero condotti fuori della grotta mediante un tubo di piombo fissato all'imbuto. Il vapore fu fatto condensare per mezzo di un serpentino adattato ad una bottiglia a due colli; in questa si raccolse il liquido, mentre i gas furono raccolti in palloni e in tubi da chiudere alla lampada.

Non fu necessario praticare nessuna aspirazione perchè la pressione che il gas esercitava era sufficiente a spostare una colonna di un po' più di un cent. di acqua.

Una parte del gas raccolto in tubi fu destinato all'analisi eudiometrica, i cui risultati sono i seguenti:

Acido solfidrico.	0,60
Anidride carbonica.	98,43
Ossigeno	0,15
Residuo	0,82

[1] *Ricerche sperimentali sulla Solfatara di Pozzuoli.* Napoli, Tip. Morano, 2ª ediz., 1882.

Riportiamo qui alcune analisi che furono eseguite da varî autori.

Il De Luca ([1]) in una serie di analisi sul gas raccolto in varî tubi, alcuni dei quali contenevano dell'aria, trovò i numeri seguenti:

Acido solfidrico	0,9 e	0,9
Anidride carbonica	99,0 e	99,1
Aria	0,0 e	0,0

Da una piccola fumarola, sovrastante alla precedente ad un'altezza di circa 70-80 metri, abbiamo raccolto una quantità di gas limitato per le analisi volumetriche per formarci un'idea delle differenze che eventualmente si potevano riscontrare nelle altre emanazioni della Solfatara.

I risultati furono i seguenti:

Acido solfidrico	0,88
Anidride carbonica	28,35
Ossigeno	13,33
Residuo	57,44

Tra le analisi dei gas eseguite da S. De Luca ([2]), a scopo non scientifico, delle emanazioni della Solfatara riproduciamo quelle che possono presentare un qualche interesse per mettere in vista la variabilità di composizione.

Delle fumarole sul piano del cratere che il De Luca esaminò, fra le altre ne trovò due alla temperatura di 97° al punto di uscita; il gas fu raccolto in tubi e fra questi quello che mostrò contenere meno aria era costituito di

	I.	II.
Acido solfidrico	0,3	0,5
Anidride carbonica	8,7	6,9
Aria	90,8	92,3

L'aria era rappresentata dal residuo inassorbibile dalla potassa e costituito così

	I.	II.
Gas non assorbibile	90,8	92,3
Ossigeno trovato	15,3	16,2

Ch. S. Claire Deville e Leblanc ([3]) fin dal 1856 eseguirono delle analisi dei gas di varie località, e fra queste anche di quelli del distretto vulcanico dei Campi Flegrei. Per alcune emanazioni della Solfatara trovarono:

	1	2			3	
Acido solfidrico	1,8	1,8	2,7	0,8	16,5	
Anidride carbonica	7,5	2,5	16,5	4,3	32,4	56,3
Azoto e ossigeno	90,7	95,7	80,8	94,9	51,1	43,7

([1]) Acc. scienze di Napoli, 1871.

([2]) Ric. sp. sulla Solfatara di Pozzuoli. Napoli, Stab. del Cav. Morando, 1882.

([3]) Jahresber. 1857-714.

Anche il Fouqué [1] pubblicò le analisi dei gas di due emanazioni della Solfatara, una colla temperatura *a*) di 96°, l'altra *b*) di 77°,5:

	a) t° 96°	*b*) t° 77°,5
Acido solfidrico	11,43	0,00
Anidride carbonica	56,67	15,09
Ossigeno.	5,72	15,51
Azoto.	26,28	69,40

Altre analisi dei gas della Solfatara di Pozzuoli non ci fu dato di poter raccogliere. Poco possiamo dire intorno alle analisi del Deville e Leblanc e di quelle del Fouquè anche perchè è difficile comprendere a quale delle emanazioni si riferiscono, mentre invece fra quelle del De Luca e le nostre si rileva un certo accordo; per cui si può concludere che probabilmente dal 1871, anno in cui il De Luca eseguì le sue, al 1897, anno in cui furono eseguite le nostre, la composizione del gas della fumarola della bocca della Solfatara, quale viene data dall'analisi eudiometrica, non ha subito modificazioni permanenti sensibili.

Trattamento del gas della Solfatara.

Il gas era stato raccolto in palloni e sottoposto sul luogo ad una prima depurazione facendolo passare attraverso la calce sodata dopo privato del vapor d'acqua nel modo anzidescritto. In laboratorio fu privato dall'ossigeno passandolo sul rame rovente, indi sul magnesio e per ultimo nel solito pallone da scintillare. Si ottennero. circa 4 cc. di residuo inassorbibile da 100 cc. di azoto, che servì a caricare 2 tubi di Geissler abbinati.

La depurazione di questo gas riescì soddisfacente, perchè il suo volume permise di far uso del solito depuratore; esso conteneva un po' di azoto e di idrogeno che però scomparvero dai tubi facendo passare la scintilla. L'idrogeno anzi scomparve facendo passare la scintilla dopo un primo caricamento mentre i tubi erano ancora attaccati alla pompa. Estratto il gas colla pompa una prima volta, alla seconda introduzione non si vide più l'idrogeno. Ciò dimostra che l'idrogeno, il quale così di frequente accompagna i gas, il più delle volte è contenuto nei poli di metallo che ne trattengono delle traccie anche dopo scaldati vicino a 400° nel vuoto. A questo proposito ricordiamo che prima di caricare i tubi li scaldiamo sempre mentre sono attaccati alla pompa per molto tempo praticando il vuoto e che, quando il volume del gas disponibile lo permette, dopo una prima introduzione si fa passare la scintilla in tutti i tubi sia per avere un'idea del gas che si maneggia, sia per eliminare l'idrogeno contenuto nei poli metallici e solo quando questo più non dà indizio della sua presenza si fa una seconda ed anche una terza introduzione, bene inteso dopo avere ogni volta rifatto il vuoto massimo.

[1] Jahresber. 1865, pag. 927.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIII. (1892-1904) 2° Sem. Fasc. 6°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. (1892-1904). Fasc. 3°-4°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

chiudere alla lampada, in modo da espellere l'aria da questi recipienti per spostamento.

La composizione di questo gas e di quello della Grotta dell'Ammoniaca, situata pochi metri distante dalla precedente, è data dalle analisi eudiometriche seguenti:

	Grotta del Cane.	Grotta dell'Ammoniaca. I.	II.
Anidride carbonica .	70,77	96,42	95,80
Ossigeno	5,79	0,80	0,78
Residuo	23,44	2,78	3,42

Le analisi di Ch. S. C. Deville e Leblanc [1] sono le seguenti:

	Grotta del Cane.		Grotta dell'Ammoniaca.
Anidride carbonica .	67,1	73,6	81,1
Ossigeno	6,5	5,3	3,8
Azoto.	26,4	21,1	15,1

Il Fouqué [2] esaminò il gas della Grotta dell'Ammoniaca e trovò:

Anidride carbonica.	97,47
Ossigeno	0,52
Azoto	2,01

Tutte e due queste emanazioni sono un miscuglio, come si vede, a proporzioni variabili di aria e anidride carbonica. Da queste emanazioni è difficile escludere l'aria; ciò che si comprende facilmente visto la difficoltà d'avvicinare l'apparecchio raccoglitore ai punti di sbocco nella Grotta del Cane, e perchè nella Grotta dell'Ammoniaca, il gas emana dal suolo, il quale probabilmente si è formato dall'accumulo di terra che finì coll'ostruire in parte le fessure delle roccie rendendole invisibili. La singolarità della emanazione della Grotta dell'Ammoniaca si è quella di stuzzicare le membrane nasali e delle vie respiratorie in modo diverso da quella della Grotta del Cane, sembra quasi che contenga qualche cosa di etereo atto a produrre un senso di leggera ebbrezza. Da ciò probabilmente il nome di Grotta dell'Ammoniaca ad essa applicato in tempi, certo, relativamente a noi vicini.

Delle due emanazioni fu raccolta in quantità sufficiente per i lavori sul residuo solo quella della Grotta del Cane, per quella della Grotta dell'Ammoniaca sarebbe occorso un tempo assai lungo che non era a nostra disposizione.

Il trattamento del gas per ottenere il residuo fu eguale a quello seguito pel gas della Solfatara precedentemente descritto.

(1) Jahresber. 1857, pag. 714.
(2) Jahresber. 1865, pag. 927.

Gas del Vesuvio, gas delle lave.

La raccolta dei gas delle lave fluenti in quantità un po' rilevante non ci riuscì in causa della mancanza di tempo e di mezzi. L'impresa, come è facile a comprendere, è irta di difficoltà, perchè non si può abbracciare che una limitata superficie della massa rovente in continuo movimento.

È possibile però fare una raccolta quando le lave scorrono sotto quelle già indurite nelle quali si manifestano delle fenditure; infatti accade di poter vedere talvolta la massa rovente scorrere lentamente al disotto della crosta solida. È naturale che tali crepacci debbano avere delle forme e disposizioni opportune; condizioni che si verificano di rado, ed anche quando ciò avviene lo stato delle cose non permane che un tempo più o meno limitato. Il gas da noi raccolto non era che aria, con piccole quantità di sostanze assorbibili della potassa e perciò non fu che imperfettamente studiato.

Gas della grande Fumarola.

Abbiamo precedentemente fatto cenno delle fumarole del cono craterico del Vesuvio, fra le quali le più importanti erano quelle che emanavano dalla spaccatura del 1895 sopra le bocche eruttive e in prossimità del vertice del cono.

I gas e vapori uscivano da molti punti sopra una stessa linea o su linee parallele. Evidentemente quando avvenne lo spostamento delle roccie nel formarsi della spaccatura, forse mentre il terreno da una parte si alzava, dalla parte opposta della fessura si abbassava avvenendo un imperfetto contatto delle due labbra; ma siccome ciò non accade da un solo lato, ma a tratti alternati dando luogo a dei salti, ne seguì che le singole emanazioni si mostravano su due principali direttrici in direzione parallela. Senza tener conto delle fumarole radianti più o meno normali alla direttrice, si osservavano tre zone o meglio linee principali di sfogo, due sulla stessa direttrice, e rivolte verso sud, la terza orientata in senso opposto sopra un'altra direttrice. — La raccolta dei gas in questo punto non sembrava presentare troppe difficoltà, tanto più che nei giorni della nostra visita il vento spirava in direzioni favorevoli e si poteva evitare in parte di rimanere investiti dai vapori estremamente irritanti che si sprigionavano dal suolo da moltissimi punti.

Bastò coprire con un imbuto uno dei getti più abbondanti ed aspirare lentamente dalla parte opposta dei soliti palloni e tubi posti in comunicazione coll'imbuto. Senza dubbio dell'aria esterna penetrò nell'imbuto, quantunque si cercasse di collocarlo sopra un piano fatto col materiale detritico più minuto e questo compresso anche intorno agli orli dell'imbuto quanto fosse possibile. L'asperità del luogo, i vapori acidissimi che impedivano la respirazione e i mezzi disponibili non ci permisero di allestire un apparecchio più perfetto.

Queste emanazioni vulcaniche nel tempo in cui furono da noi visitate (marzo 1897) erano discretamente attive e quando l'aria era tranquilla si alzavano sopra una lunghezza di qualche centinaio di metri coll'aspetto di un fumo bianchiccio formando una specie

di cortina, alta 30 o 40 metri che a quella altezza svaniva. Siamo convinti che simili emanazioni vulcaniche meriterebbero un esame ed uno studio maggiori e più accurati di quanto li ebbero fino ad ora. Il metamorfismo delle roccie è potente. Numerose e svariate incrostazioni e concrezioni si scorgono ovunque e in relazione probabilmente colla varia natura dei gas e vapori che si sprigionano.

Ben rare volte viene fatto cenno della presenza dell'acido fluoridrico fra i gas vulcanici. Noi già fino dal marzo 1897 nè abbiamo constatata la presenza sul luogo con una esperienza molto semplice; abbiamo cioè collocato sopra due o tre getti gasosi dei pezzi di un pallone infranto i quali furono trovati, dopo una notte, tutti corrosi nella parte concava rivolta contro le emanazioni. Dell'esistenza dell'acido fluoridrico parla il prof. Matteucci in una breve Nota preliminare [1] Non abbiamo potuto verificare l'esistenza, assai probabile del fluoruro di silicio, perchè ci mancava il modo di farlo.

Del resto avremo una prova, benchè indiretta, dalla presenza dell'acido fluoridrico in questi gas vulcanici, anche dallo studio, più avanti riferito, del gas delle incrostazioni, o forse più propriamente prodotti metamorfici delle lave, che abbiamo staccato dalle roccie sovrastanti alle emanazioni. Il gas della emanazione da noi raccolto, all'esame eudiometrico diede i risultati seguenti:

Anidride carbonica	0,42
Ossigeno	19,70
Residuo	79,88

Come ben si vede trattasi di aria leggermente impoverita di ossigeno, mescolata con vapore di acqua, piccolissime quantità di acido carbonico, ai quali devesi aggiungere acido fluoridrico e traccie di acido cloridrico constatati sul luogo. È probabile che la spaccatura costituisca una specie di camino che dalle aperture inferiori richiama l'aria la quale esce presso il vertice del cono vulcanico accompagnata dai varî componenti summenzionati che incontra per via.

Il gas sottoposto al trattamento fu quello contenuto in palloni che dopo liberato dall'anidride carbonica e dall'ossigeno, passandolo sul rame rovente, diede un residuo di cc. 1500 il quale fatto passare sul magnesio e in fine nel pallone da scintillare lasciò un residuo inassorbibile di circa 20 cc. che servì a caricare i tubi di Geissler, per le osservazioni spettroscopiche.

Come si vedrà più avanti, trattandosi delle osservazioni sui singoli spettri, il gas di questa provenienza fu studiato con qualche estensione e si impiegò quello contenuto in più palloni, però sempre seguendo lo stesso procedimento per separare l'ultimo residuo non assorbibile da esaminarsi allo spettroscopio. Il rapporto trovato fra questo residuo e il volume del gas privato dell'ossigeno, risultò di 100 parti di azoto e 0,80 di argo; come si vede, è inferiore a quello dell'argo atmosferico il quale è contenuto nella proporzione di 1,186 per 100 parti di azoto.

Crediamo che sarebbe fuori di luogo qui riportare le numerose analisi eseguite dai sigg. Saint Claire Deville, Leblanc, Fouqué, Diego Franco, ecc., delle fumarole

[1] R. Acc. delle Scienze di Napoli, fascicolo 4 aprile 1897.

del Vesuvio trattandosi di emanazioni effimere e che non presentano, perciò, interesse dal punto di vista in cui ci siamo posti.

Gas del cratere del Vesuvio.

Nel tempo in cui visitammo il cratere del Vesuvio rimanevano ancora i ruderi dell'orlo craterico del 1872 nel quale era inscritto l'orlo attuale in modo che fra i due orli si formò un piano circolare che ricorda, in proporzioni ridotte, la formazione del Piano del lago che circonda il cono terminale dell'Etna e l'Atrio del Cavallo del Vesuvio stesso, meno il cono centrale.

L'orlo del cratere del 1872 superstite era costituito da rupi in alcuni punti strapiombanti, con fessure numerose dalle quali spesso uscivano vapori e gas, ma si presentavano quasi sempre in condizioni tali da renderne impraticabile la raccolta.

Riescimmo a trovare due emanazioni accessibili, l'una costituita da un getto di vapore alla temperatura di 100° che usciva da un foro sopra un terreno quasi piano formato da ceneri e lapilli. Il getto usciva con una certa pressione in modo da produrre un leggero fischio. Non riescì difficile dare al foro una certa regolarità in guisa da poterlo coprire con un grande imbuto metallico, che venne cementato intorno all'orlo con una pasta formata con cenere vulcanica ed acqua.

Disgraziatamente questo getto non era costituito che di vapore di acqua ed aria, con un po' di anidride carbonica come lo dimostrò l'analisi eudiometrica:

Anidride carbonica	2,08
Ossigeno	19,34
Residuo	78,58
	100,00

Essendosi rotto, durante il viaggio, il pallone che lo conteneva non rimase di questo gas che un tubo che servì per l'analisi, e non abbiamo potuto procedere ad un esame completo del residuo.

L'altra emanazione era costituita da vapore d'acqua con un po' di acido cloridrico ed aria, essa usciva con una certa pressione da una fessura verticale di una roccia a circa 20 metri dall'orlo attuale. Fu possibile introdurre nella fessura una specie d' imbuto che venne fissato al posto con pietre cementate con poltiglia di cenere vulcanica ed acqua e posto mediante tubi in comunicazione coi recipienti destinati alla raccolta; una bottiglia di lavaggio situata in coda dimostrò che il gas usciva con una piccola pressione, per modo da poter spostare una colonna d'acqua di circa un centimetro. In quel giorno l'attività del cratere era più degli antecedenti eccitata e spesso dei lapilli venivano proiettati a rilevanti altezze e cadevano all'ingiro fuori dell'orlo del cratere stesso minacciando di infrangere i nostri apparecchi per cui fu necessario ripararli e stare in guardia per non venire colpiti dai proiettili. Il gas fu fatto passare per circa sette ore onde spostare l'aria dai recipienti prima di chiuderli.

L'analisi eudometrica mostrò che questo gas era formato di aria alquanto povera

di ossigeno, anidride carbonica, ai quali devesi aggiungere un po' di acido cloridrico, constatato sul luogo, e il vapore di acqua.

Il trattamento fatto subire a questo gas allo scopo di ottenere un residuo inassorbibile consistette nell'eliminare l'acido carbonico colla calce sodata, l'ossigeno col rame metallico rovente e il residuo, circa 100 cc., fu fatto passare sul magnesio per assorbire l'azoto e da ultimo trattato colla scintilla. Rimasero quasi 4 cc. di gas che fu introdottto in tubi di Geissler per l'esame spettroscopico.

Dall'analisi eudiometrica questo gas risultò formato di:

Anidride carbonica [1]	7,38
Ossigeno	14,31
Residuo	78,31
Acido cloridrico tracce.	
	100,00

Gas delle incrostazioni e delle roccie alterate della Fumarola grande.

Le roccie sovrastanti alle emanazioni si mostravano molto metamorfosate e in alcuni tratti profondamente. Spesso si vedevano coperte da incrostazioni, alcune volte in forma stalattitica con tinte assai variate, ove predominano le gradazioni del rosso, del violetto e del giallo disposte a macchie per lo più superficiali sopra un fondo bianco o bianco-grigio. Assai di rado si mostravano aggregazioni cristalline, frequenti erano invece gli ammassi pastosi, di consistenza e aspetto caseoso. Al piede delle roccie, ritte e in taluni luoghi strapiombanti, giaceva del materiale detritico, proveniente in parte dalla disgregazione delle roccie stesse e forse in massima parte da quello eruttato dal cratere ed ivi ammassato. Il colore giallo di questo materiale attestava le profonde alterazioni che subì per opera dei gas e vapori che ne attraversarono gli strati.

Il primo saggio di estrazione dei gas contenuti in questi materiali fu fatto da una massa dura, benchè un po' umidiccia, che rivestiva la roccia al di sopra d'una fumarola e presentava varie colorazioni fra le quali predominavano il rosso e il giallo a macchie su fondo bianco-grigio.

Trattandola con acido solforico concentrato si svolgeva del gas che a contatto dell'acqua dava luogo a separazione di silice gelatinosa, ciò che dimostrava la presenza dell'acido fluoridrico sotto forma di fluoruro, e di silicati. Ne venne di conseguenza la necessità di dover eliminare il fluoruro di silicio volendo impiegare l'acido solforico per disgregare il minerale, come ci eravamo proposto, quale mezzo il più opportuno nel caso nostro. Onde estrarre i gas da questo materiale per tale via, dopo averlo ridotto in polvere grossolana, fu introdotto in un pallone con due tubulature saldate al collo, una delle quali in comunicazione con un tubo poco fusibile contenente carbonato di manganese, l'altra con una pompa a mercurio e finalmente, alla bocca del pallone, mediante un turacciolo di gomma fu adattato un imbuto a chiavetta.

[1] Comprese traccie di acido cloridrico

Fra la pompa e il pallone fu interposta una bottiglia di lavaggio con tappo di vetro su cui erano saldati i due tubi di sfogo e adduttore. Quest'ultimo oltre all'avere un largo diametro pescava in uno strato di mercurio sopra il quale si trovava dell'acqua per decomporre e trattenere il fluoruro di silicio. Il rubinetto dell'imbuto fu lubrificato con dell'anidride fosforica lasciata in parte andare in deliquescenza e poi bene rimescolata in modo da averne una pasta vischiosa colla quale fu spalmato il maschio del rubinetto. Estratta prima l'aria da tutto il sistema mediante la pompa, si scaldò il carbonato di manganese per sviluppare dell'anidride carbonica, indi si praticarono nuove estrazioni colla pompa e successivi sviluppi di anidride fin che la potassa liquida dimostrò non esservi più gas inassorbibili. Riempito che fu tutto l'apparato con anidride carbonica si fece arrivare nel pallone dell'acido solforico concentrato il quale determinò lo sviluppo di gas che fecero gonfiare la massa. Allo sbocco della pompa fu collocata una campanella a rubinetto con potassa liquida concentrata per raccogliere il gas che si svolgeva. Nel pallone fu introdotto tanto acido solforico quanto bastò per ottenere una poltiglia semifluida; quando la massa cessò di gonfiarsi fu scaldata con un bagno ad olio gradatamente fino a 200°, e verso la fine si aiutò lo sprigionamento del gas diminuendo cautamente la pressione fin che in ultimo si aveva quasi il vuoto. Si sviluppava allora successivamente un po' di anidride carbonica che veniva di mano in mano aspirata colla pompa fin che il residuo gasoso della campanella non sembrava aumentare di volume. Queste operazioni richiesero ogni volta un tempo molto lungo, sia per la necessità di dover procedere lentamente per evitare eccessivi rigonfiamenti della massa contenuta nel pallone, sia perchè la disgregazione avveniva con grande lentezza.

Il residuo gasoso raccolto nella campanella veniva travasato da questa in un pallone da scintillare per mezzo del gasometro da trasporto descritto nella Memoria precedente.

In tal modo furono trattati 400 grammi di incrostazioni e poco più di un chilogrammo di roccia profondamente alterata con incrostazioni superficiali, naturalmente in più riprese per evitare l'allestimento di un apparato grandioso e quindi poco maneggevole.

Il gas estratto dalle incostazioni raccolto nella campanella fu 18 cc. esso conteneva piccole quantità di ossigeno perchè il pirogallato potassico non ne assorbì che poco più di 1 cc., quello della roccia era di circa 50 cc., con pochissimo ossigeno esso pure. Dopo lo scintillamento fino a volume costante ed eliminazione dell'ossigeno per assorbimento con pirogallato potassico rimasero circa 1 cc. di residuo dal gas delle incrostazioni e un po' più di 2 cc. da quello delle roccie alterate; questi gas furono introdotti in tubi di Geissler, ma imperfettamente depurati, perchè stante i piccoli volumi non si potè far uso del solito depuratore.

Gas del Bulicame di Viterbo.

Il gas di questa emanazione esce attraverso l'acqua dal fondo del bacino, per raccoglierlo quindi si potè seguire il noto metodo dell'imbuto col quale le bolle gasose vengono imprigionate e il gas condotto per mezzo di tubi nei serbatoi destinati

a contenerlo. Il metodo essendo stato da noi descritto a proposito dal gas di Abano, è inutile tornarvi sopra.

Il gas analizzato eudiometricamente diede i risultati seguenti:

Acido solfidrico	0,75
Anidride carbonica.	98,05
Ossigeno	0,03
Residuo gasoso	1,17
	100,00

Gas delle Acque Albule di Tivoli.

Anche il gas di questa emanazione si presenta presso a poco nelle stesse condizioni del precedente e fu lo stesso il metodo di raccolta.

All'analisi eudiometrica il gas privato dell'idrogeno solforato fornì i dati seguenti:

Anidride carbonica.	83,55
Ossigeno	0,80
Residuo gasoso	15,65
	100,00

Gas di Pergine (Arezzo).

Questo gas fu raccolto nel marzo 1897, dal prof. Salvadori in occasione di uno studio che egli ne fece per determinarvi l'anidride carbonica. Due campioni di sorgenti diverse, le quali appartenevano allora al sig. Alfredo Sestini, dettero all'analisi eudiometrica i seguenti risultati:

	I	II
Anidride carbonica	96,50	96,00
Idrogeno solforato.	0,40	0,30
Residuo gasoso	3,10	3,70
	100,00	100,00

Gas di Salsomaggiore.

Ci crediamo dispensati dall'entrare in particolari descrittivi intorno alle secolari saline di Salsomaggiore essendo ben note, come è noto che dai pozzi scavati a varie profondità insieme coll'acqua salata escono del petrolio e dei gas combustibili, ora impiegati per uso d'illuminazione. I gas vengono condotti dai pozzi tubulari (ad eccezione di uno antico ad escavo opportunamente coperto) per mezzo di tubi di ferro, in un gasometro, mediante il quale effettuasi la distribuzione ai becchi per la illuminazione.

I gas non differiscono sensibilmente l'uno dall'altro benchè i pozzi raggiungano delle profondità varie, talora ragguardevoli, di oltre 600 metri, per modo che fu quello raccolto nel gasometro, che per maggior facilità ci servì a riempiere i nostri recipienti i quali tutti insieme rappresentavano la capacità di circa un metro cubo.

Il discreto potere illuminante del gas di Salsomaggiore faceva sospettare che oltre al metano fossero contenuti altri idrocarburi più ricchi di carbonio, mentre si mostrò completamente assente l'acido solfidrico, come abbiamo accertato sul luogo, stesso, e l'ossido di carbonio.

La composizione di questo gas viene data dalla analisi eudiometrica seguente:

Metano	67,86
Etano	21,29
Idrocarburi non saturi	0,85
Anidride carbonica	0,93
Ossigeno	0,42
Residuo gasoso	8,65 (1)

Per lo studio del residuo inassorbibile coi soliti metodi di analisi, costituito dell'azoto ed altri gas, si richiedeva la distruzione degli idrocarburi. Il metodo seguito per raggiungere questo scopo viene descritto più avanti.

Osservazioni generali intorno agli spettri osservati.

Le misure degli spettri raccolte nelle tabelle, furono eseguite con lo stesso spettroscopio che ci servì anche per quelle pubblicate in una precedente Memoria (2), cercando di raggiungere la maggior precisione consentita dai nostri mezzi. Specialmente col ripetere più volte le letture allo spettroscopio e col fare delle medie abbiamo cercato la massima approssimazione per quelle righe che non trovammo registrate negli spettri di Crookes, di Kayser e di Eder e Valenta. Prendendo in esame un po' dettagliato gli spettri raccolti nella tabella che qui presentiamo, si osservano delle notevoli divergenze sia riguardo al numero delle righe, sia riguardo all'intensità che esse presentano nei singoli spettri. Dobbiamo notare che l'intensità non fu possibile determinarla con nessuno dei soliti metodi di misurazione, ma risulta da un apprezzamento diretto e dal confronto del maggior numero di righe osservabili per ogni campo di osservazione. ,Per indicarla fu scelto il sistema dei numeri impiegando la prima diecina in ordine crescente. Il difetto dovuto all'apprezzamento soggettivo si cercò di diminuirlo mediante ripetute letture, anche in giorni differenti; in ogni modo, per quanto si tratti di valori relativi, nondimeno essi possono servire sempre a dare un concetto approssimato. Alcune righe si riscontrano in tutti gli spettri della stessa na-

(1) R. Nasini e R. Salvadori, *Relazione sull'analisi dei gas combustibili di Salsomaggiore.* Gazz. chim. XXX, p. I, 1900.

(2) R. Nasini, F. Anderlini e R. Salvadori, Atti Acc. Lincei, 1897.

tura (rosso o azzurro) e conservano presso a poco la stessa intensità, altre invece non si vedono in taluno degli spettri o presentano delle differenze nella intensità. Simili anomalie possono dipendere da varie cause, in primo luogo dalla pressione; nei tubi appena staccati dalla pompa è diversa da quella che si stabilisce con graduale diminuzione dopo un prolungato passaggio della scintilla, fino alla cessazione della conduttività pel noto assorbimento dei gas da parte dei poli metallici. A questa causa principale sono probabilmente dovute le differenze degli spettri dello stesso gas nello stesso tubo rilevati in tempi diversi dopo il passaggio della scintilla. Nondimeno, le modificazioni degli spettri dovute a questa causa non ci sembrano molto rilevanti, in via generale, entro certi limiti di pressione, e lo dimostrerebbe l'esperienza sul gas della Grotta del Cane, perchè lo spettro N è stato rilevato dopo M ed O (azzurro). Quando lo spettro N fu osservato la pressione doveva essere molto bassa e il tubo prossimo all'esaurimento, giacchè era stato lungamente in azione, tanto che poco appresso alla lettura la scintilla passava con difficoltà e lo spettro si mostrava assai affievolito. Come si vede dalla tabella, tranne le modificazioni assai notevoli delle righe nell'ultra rosso che rimasero come residuo visibile delle bande che si mostrarono nelle prime ore, e dell'intensità di altre, quasi tutte le righe visibili rimasero fino presso l'esaurimento.

L'intensità della corrente è pure un fattore importante atto a modificare le apparenze degli spettri, nondimeno nel caso nostro crediamo di poterne escludere l'influenza, fino ad una certa misura, perchè si è cercato di conservare la stessa intensità durante tutte le osservazioni. Una causa che può determinare delle notevoli modificazioni degli spettri dai gas è il diametro del capillare dei tubi spettrali. Causa che forse non fu sufficientemente studiata quanto lo meritava dopo l'esperienza del Padre Secchi (¹), colla quale egli dimostrò le differenze d'aspetto che presenta lo spettro dell'idrogeno mediante il suo tubo complesso formato di pezzi di tubo di diametro decrescente.

Per quanto riguarda le presenti esperienze dobbiamo notare che i diametri dei nostri tubi nella parte stretta non erano tutti eguali, anzi siamo disposti ad attribuire alla troppa larga sezione di qualcheduno il non aver potuto ottenere coll'interposizione di condensatori lo spettro azzurro dell'argo, ma invece lo spettro misto, per quanto si sia cercato di variare le dimensioni degli apparecchi di condensazione e l'intensità della corrente. Facendo pure una larga parte a tutte queste cause modificatrici degli spettri dei gas nei tubi di Geissler, ci sembra difficile che esse da sole possano dar ragione delle differenze di alcuni dei nostri spettri comparati con quelli dell'argo atmosferico del Crookes, del Kayser, di Eder e Valenta e del nostro pure atmosferico contenuto in diversi tubi, osservato col prisma di confronto; poichè alcune righe, specialmente nella parte meno dispersa dello spettro non trovano riscontro, come quelle specialmente date dal gas della Grotta del Cane (M, N).

Notevole sopratutte ci parve la riga $\lambda = 531,5$ osservata nel gas della Solfatara di Pozzuoli e forse identica ad una debole $\lambda = 531,7$ del gas della fumarola del Vesuvio che corrisponde a quella osservata nello spettro della corona solare e attribuita ad un nuovo elemento, cui fu dato il nome di coronio, finora ignoto nel nostro pianeta.

Qualche righa doppia ci fu possibile di risolvere in taluno dei nostri spettri, specialmente quando si presentavano con diversa intensità o con intensità sufficiente

(¹) Comptes rend. de l'Ac., t. XX, 81 (1870).

benchè eguale, come è il caso della $\lambda = 750,8$ nell'estremo rosso visibile, doppia negli spettri B, M e Q: la gialla $\lambda = 588,8$-$588,4$ che Crookes vide semplice ($\lambda = 588,7$) nello spettro rosso fu visibile distintamente doppia in tutti gli spettri rossi nostri, come è pure doppia in quelli dati da Kayser ed Eder e Valenta. Nei nostri spettri azzurri non fu sempre visibile come in C, G e T o fu veduta semplice in H, I, N, P e V.

Altre righe doppie non risolvibili coi nostri mezzi si incontrarono specialmente nei campi azzurri e violetti.

Alcune righe che abbiamo osservate in taluno degli spettri sembra coincidano con quelle dei gas atmosferici del gruppo dell'argo, in particolare del Neo e dell'Elio.

Un gruppo di righe nel rosso non trova riscontro negli spettri del Crookes e del Kayser ed è quello corrispondente a $\lambda = 660,7$, $653,8$, $653,7$, $648,7$, $645,0$: le quali righe non compaiono tutte in tutti gli spettri: in ogni modo compaiono sempre con debole intensità. Senza dubbio il diametro del capillare dei tubi di Geissler ha un'influenza sull'aspetto dello spettro dell'argo, perchè alcune righe dello spettro azzurro, ritenute caratteristiche di questa modificazione, possono comparire anche in quello rosso, benchè in generale più deboli, qualora il capillare sia molto stretto, come ci venne dimostrato da qualche esperienza eseguita in questo senso.

Dal confronto dei varî spettri prodotti in tubi con capillari diversi risultano delle differenze in quasi tutte le zone, ma dato che le esperienze eseguite furono limitate ed incomplete crediamo opportuno di richiamare ora l'attenzione soltanto sopra alcune delle righe osservate, le quali furono segnalate nelle osservazioni dei singoli spettri. Ma d'altra parte se alcune delle righe, che si potrebbero ritenere proprie dello spettro azzurro compariscono anche in quello rosso, le zone del rosso e quelle vicine dell'aranciato e del giallo mostrano molta maggiore ricchezza di righe in tubi a capillare stretto introducendo un condensatore; come avvenne infatti per gli spettri ottenuti dai gas di Tivoli, di Viterbo, di Pergine e di Salsomaggiore prodotti, per l'appunto, in tubi a capillare stretto e riportati nelle tabelle. Abbiamo reputato non opportuno di riportare per ora i numeri ottenuti dalle osservazioni degli spettri prodotti in tubi a capillare più largo perchè non tutti furono riempiti nelle identiche condizioni.

Le lunghezze d'onde furono determinate seguendo il metodo che ci servì in altre occasioni e che fu descritto nella citata nostra memoria e colla stessa curva. Abbiamo poi usato i numeri tali e quali ci risultarono dagli appunti presi al momento dell'osservazione, per modo che talune lunghezze d'onda riferibili alle stesse righe dei vari spettri appaiono rappresentati da numeri fra loro discordanti; però quasi sempre di quantità così piccola da non lasciare dubbi sulla identità delle righe stesse. Fu preferito questo sistema a quello di introdurre correzioni arbitrarie.

Osservazioni sui singoli spettri.

Gas della Fumarola grande del Vesuvio.

Questo gas fu studiato ripetutamente: le prime osservazioni furono fatte sul residuo inassorbibile introdotto tale e quale in tubi di Geissler il cui spettro rosso è segnato con A nella tabella. Esso diede in principio lo spettro dell'azoto e dell'argo insieme, ma il primo scomparve, del pari che le righe dell'idrogeno pure visibili, in meno di un'ora di azione della scintilla.

Il gas rimasto dopo questo primo riempimento fu posto a contatto con acqua ghiacciata, facendo uso dell'apparato descritto in una Memoria precedente [1], finchè il volume fu ridotto a circa la metà poi mescolato con dell'ossigeno e scintillato per allontanare quel poco di azoto che eventualmente conteneva. Tuttavia la eliminazione dell'azoto non riescì completamente, perchè il residuo gasoso introdotto in tubi spettrali manifestò la presenza di questo, benchè in tracce che presto scomparvero. Nella tabella sono raccolti gli spettri rosso in B e azzurro in C e D di questa frazione di gas.

Un terzo caricamento fu effettuato dopo avere nuovamente scintillato il gas misto ad ossigeno, per modo che si ottenne la completa eliminazione dell'azoto.

Le osservazioni spettroscopiche raccolte nella tabella e che si riferiscono alle varie porzioni di questo gas sono le seguenti:

1° Gas prima del trattamento con acqua: finca A, spettro rosso.

2° Dopo il trattamento con acqua: finca B, spettro rosso che conteneva un po' di azoto primo riempimento. Nella stessa finca sono comprese anche le osservazioni dello spettro rosso del secondo riempimento, i numeri senza indicazione si riferiscono alle righe comuni che presentavano presso a poco la stessa intensità. Il segno" rappresenta la stessa lunghezza d'onde e di fianco il numero che si riferisce all'intensità. Quando nell'uno o nell'altro spettro manca una riga si usarono i tratti orizzontali, — — fiancheggiati dal numero romano I e II che corrispondono al primo e secondo riempimento.

La finca C comprende lo spettro azzurro ottenuto collo stesso tubo che servì per lo spettro rosso raccolto in B.

In D sono raccolti gli spettri dei due tubi che diedero gli spettri rossi di B rispettivamente II e III.

Gas della fumarola del cratere.

Questo gas fornì uno spettro dei meno ricchi di righe visibili, con esso non abbiamo potuto ottenere lo spettro azzurro per un guasto nel tubo spettrale che lo conteneva.

Gas delle roccie ed incrostazioni.

Gli ultimi residui gasosi inassorbibili estratti dalla roccia alterata e dalle concrezioni che la rivestivano, diedero lo spettro dell'argo, salvo alcune righe nel rosso, per lo più deboli, che non sembrano appartenere a questo corpo; in ogni modo è difficile poter affermare che qui trattisi di un gas diverso dall'argo, mentre d'altra parte non ci sembra improbabile che l'argo di questa provenienza possa contenere qualche altro gas.

Gas della Grotta del Cane.

Il gas di questa emanazione ci sembra notevole per il suo spettro dell'ultra-rosso. Naturalmente esso fu osservato con la maggior attenzione e ripetutamente. Come si può rilevare dalla tabella, questo spettro si mostra ricco di righe; specialmente nel rosso estremo si mostra affatto differente dagli altri. Nelle prime osservazioni, quando la pressione doveva essere vicina ai 3 mm. al di là della riga $\lambda = 772,5$ si vedeva una luminosità diffusa e quasi continua, accentuata però in modo particolare in tre posizioni a modo di bande, le quali andarono modificandosi lentamente per il continuato passaggio della scintilla di guisa che, scomparsa la continuità, rimasero tre

[1] Atti Accad. Lincei, II, 1897.

righe larghe, deboli sì, ma distintamente visibili. La misura di queste righe non potè essere effettuata con quell'esattezza che sarebbe desiderabile, non permettendolo i nostri mezzi, tuttavia abbiamo cercato di fissarne la posizione anche con misure dirette allo spettroscopio.

Questa zona dello spettro fu poi studiata col sussidio della fotografia colla quale venne dimostrata l'esistenza di queste righe in altri gas e anche nell'argo dell'aria [1]. Il fatto di essersi rese visibili in modo distinto in questo gas e in quello di Salsomaggiore soltanto merita certo uno studio più esteso.

Un'altra zona, nel rosso-ranciato è quella costituita delle righe $\lambda = 660{,}0$, $653{,}8$, $650{,}7$, $648{,}7$, $645{,}0$, alcune delle quali furono trovate anche in altri dei nostri spettri, ma mancano totalmente in quelli di Crookes e di Kayser. La riga $\lambda = 663{,}8$, nello spettro azzurro è con tutta probabilità identica alla nostra $\lambda = 663{,}5$. La $\lambda = 663{,}8$ sembra caratteristica dello spettro azzurro dell'argo, essa non è sempre ugualmente brillante, come del resto si può rilevare dalla nostra tabella. Può rendersi visibile impiegando tubi di Geissler a capillare molto stretto come avvenne anche nel gas delle Acque Albule di Tivoli e in quello del Bulicame di Viterbo.

Notevole è pure l'estensione e la ricchezza relativa di righe anche nel violetto, anzi è il più ricco ed esteso di tutti i nostri spettri.

Gas della Solfatara di Pozzuoli.

Il tubo fu staccato dalla pompa quando la pressione raggiunse 3 mill.; esso non conteneva idrogeno, ma traccie di azoto che scomparve in breve in seguito al passaggio della scintilla.

Il colore un po' sbiadito del capillare e la tinta biancastra della luminosità intorno al polo negativo specialmente, ci fecero sospettare la presenza dell'elio, come appunto ci accadde di vedere in altri tubi con argo contenente elio. Senza la bottiglia di Leida non ci fu possibile però identificare nessuna delle righe dell'elio, mentre si rese visibile la D^3 interponendo il condensatore.

La stessa osservazione dobbiamo fare riguardo alla riga $\lambda = 531{,}5$ [2] che si rese visibile soltanto interponendo il condensatore, col quale, come si vede dalla tabella, si manifestò uno spettro misto con righe ben nette e distinte e senza continuità, fatta eccezione di qualche banda costituita di righe non discernibili. Con altri gas questo ha comune la serie $\lambda = 660{,}0$, $650{,}7$, $653{,}8$, $648{,}7$ di linee deboli nel rosso-ranciato. La serie $\lambda = 564{,}5$, $563{,}9$, $562{,}6$. pure comune con altri dei nostri gas si distingue in questo per la $\lambda = 562{,}6$ la quale presenta una grande luminosità e si distingue da quella corrispondente di altri spettri. Essa è vicinissima alla 660,7 pure brillante, comune a tutti gli spettri da noi riportati, nondimeno le due righe apparivano assai distinte ad onta della piccola dispersione del nostro spettroscopio.

Gas delle Acque Albule di Tivoli.

Lo spettro del gas di questa provenienza è uno fra i meno ricchi di righe e non presenta notevoli particolarità. In questo spettro si rese visibile, benchè debo-

(1) Atti Acc. Lincei, VII, 269-1899.

(2) R. Nasini, F. Anderlini, R. Salvadori, *Sulla probabile presenza del coronio e di nuovi elementi nei gas della Solfatara di Pozzuoli.* Istit. Ven. IX, s. VII, 1897-97; Chem. Zeit. 1898, 22, n. 58.

lissima, la riga $\lambda = 663,5$ con un tubo a capillare strettissimo anche senza la bottiglia di Leyda, mentre era invisibile insieme con qualche altra in altri campi, con tubo a capillare più largo riempito contemporaneamente. Col condensatore si rese visibile la D^3 (λ 587,5) dell'elio.

Gas delle Bulicame di Viterbo.

Questo gas fu studiato come il precedente con tubi a capillare molto stretto ed a capillare più largo, l'esperienza confermò che lo spettro rosso viene più o meno modificato dal diametro di questa parte del tubo di Geissler, e fu verificata la riga 663,5 anche nello spettro senza condensatore, sempre però molto debole.

Gas di Pergine.

In questo gas non si resero visibili le righe rosse segnalate negli spettri dei precedenti, fu invece visibile la D^3 dell'elio nello spettro azzurro, la qual riga per la sua intensità fece ritenere essere contenuto questo corpo in proporzioni rilevanti. Nel violetto si mostrò relativamente ricco di righe ed esteso.

Gas di Salsomaggiore.

Merita di essere richiamata l'attenzione sulla presenza dell'elio che si manifesta colla D^3 molto brillante coll'aiuto di un condensatore. Anche lo spettro nel violetto si mostrò ricco ed esteso.

Fotografia degli spettri.

Già in una Nota preliminare (¹) abbiamo accennato di esserci serviti della fotografia per confrontare gli spettri dei differenti gas nelle diverse regioni dello spettro. In quella Nota abbiamo riportata una fotografia ingrandita dell'ultra rosso, nella quale regione per i primi abbiano scoperto delle righe nuove appartenenti sia ai nuovi gas che all'argo, rendendo possibile con lastre da noi sensibilizzate, la fotografia di una regione non percepibile più col nostro occhio.

Le fotografie che qui riportiamo sono state ottenute direttamente sulla lastra fotografica applicata nel fuoco sulla lente del collimatore protetta naturalmente da un telaio mobile potendosi così ottenere le fotografie degli spettri dei gas diversi l'uno sopra l'altro per la medesima regione. La durata della posa era assai diversa per le diverse regioni; mentre per l'ultra violetto occorrevano circa 2 minuti di posa, per il violetto $\frac{1}{2}$-1 minuto, per l'indaco occorrevano 5-10 minuti, per il verde e il giallo 15-25 minuti adoperando lastre ortocromatiche Cappelli e con una intensità di corrente al rocchetto di circa 3 Ampêre. Per la regione rossa e ultra rossa le lastre Cappelli ortocromatiche non servivano; si aveva appena qualche leggera impressione dopo alcune ore; e così ricorremmo alle lastre ordinarie sensibilizzate con la cianina (vedi Nota preliminare). La durata della posa era meno di due ore, ma perchè potessero fissarsi anche le righe deboli essa si dovette protrarre a quasi tre ore (²).

(¹) Rend. Acc. L. Vol. VIII, 5° 267.

(²) Nella tabella V riportiamo uno spettro azzurro completo e ingrandito del gas della Fumarola acida dopo il primo assorbimento.

CROOKES Spettro				KAYSER Spettro				EDER e VALENTA Spettro				VESUVIO — Fumarola sulla spaccatura del 1895 — Prima del trattamento con H_2O		Dopo assorbimento con acqua — 2° e 3° riempimento		Dopo assorbimento con acqua — 1° riempimento — gas con N e H Spettro I		Dopo assorbimento con acqua — Spettro II e III		Fumarola del cratere Spettro		Roccie alterate Spettro			
rosso		azzurro		rosso		azzurro		rosso		azzurro		rosso		rosso		azzurro		azzurro		rosso		rosso		azzurro	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i	λ	i	λ	i	λ (A)	i	λ (B)	i	λ (C)	i	λ (D)	i	λ (E)	i	λ (F)	i	λ (G)	i
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		772.8	2	—		—		—		772.8	1	772.8	1	—		—		772.5	1	772.5	1	—	
764.6	2	—		763.5	2	—		—		—		763.5	2	763.5	2	—		—		763.8	3	763.5	2	—	
—		—		751.5	2	—		—		—		—		(751.3	3	—		—		—		—		—	
750.6	4	—		750.3	2	—		—		—		750.8	2	(750.5	4	—		—		751.3	4	750.5	2	—	
737.7	3	—		738.3	2	—		—		—		738.5	2	738.8	2	—		—		738.8	4	738.8	2	—	
726.3	2	—		727.1	1	—		—		—		727.0	1	727.0	1	—		—		727.0	3	728.0	1	—	
—		—		714.6	1	—		—		—		714.5	1	714.5	1	—		—		714.5	1	714.5	1	—	
705.6	10	—		706.6	7	—		—		—		705.8	9	706.5	9	—		—		706.5	9	706.5	8	—	
—		—		702.9	1	—		—		—		702.7	1	702.7	1	—		—		—		—		—	
696.5	9	—		696.4	8	—		—		—		696.5	10	696.5	10	—		—		696.5	10	696.5	9	—	
684.2	2	—		687.0	1	—		—		—		685.5	6	685.5	4	—		—		686.7	3	685.8	1	—	
675.4	6	—		675.2	3	—		—		—		675.3	6	675.3	5	—		—		675.3	4	675.8	3	—	
666.4	6	—		667.6	3	664.4	3	—		—		666.9	8	667.8	8	—		667.8	2	668.0	7	667.8	4	666.9	3
—		—		—		—		—		—		—		III "	3	—		—		—		—		—	
—		662.8	4	—		663.8	2	—		—		—		—		663.5	1	663.5	4	663.5	1	—		663.[illegible]	6
—		—		—		—		—		—		660.7	1	661.0	2	—		—		660.7	1	660.	1	—	
—		—		—		—		—		—		—		—	1	—		—		—		656.3		—	
—		—		—		—		—		—		—		653.8	1	—		—		—		653.8	2	653.8	1
—		—		—		—		—		—		—		650.7	1	—		—		—		—		650.8	1
—		—		—		—		—		—		—		648.7	1	—		648.7	2	—		648.7	1	—	
—		—		—		—		—		—		—		* 645.0		—		* 645.0	1	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		642.7	3	—	
640.7	9	—		641.5	5	—		—		—		640.4	10	641.3	6	—		—		641.3	8	641.3	8	—	
637.7	2	—		638.4	2	—		—		—		638.0	5	638.0	5	—		638.0	1	638.0	6	638.0	4	638.8	2
—		—		636.8	1	—		—		—		636.5	5	636.0	1	—		—		636.5	8	636.0	3	—	
—		—		—		—		—		—		—		633.8	1	—		(633.8		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		* * banda		—		—		—	
630.2	4	—		630.7	1	—		—		—		630.0	1	630.3	5	—				630.3	3	630.3	7	630.3	2
628.1	2	—		629.6	2	—		—		—		—		629.7	5	—		629.7		629.7	4	629.7	5	—	
—		623.2	4	—		624.3	2	—		—		624.3	1	624.3	1	624.3	1	624.3	6	624.3	1	624.3	1	624.3	6
621.0	6	—		621.7	1	621.5	1	—		—		621.5	2	621.8	5	—		621.8	5	621.8	6	621.5	3	621.0	2
—		—		621.2	2	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
617.3	6	617.3	6	617.2	2	—		—		—		617.8	2	617.2	2	617.8	7	617.2	8	617.8	6	617.2	4	617.2	8
—		—		617.0	1	—		—		—		—		616.8	4	—		—		616.8	4	—		—	
—		—		—		—		—		—		—		III "	6	—		—		—		—		—	
—		—		615.5	1	—		—		—		—		615.9	1	—		615.9	4	615.8	1	615.3	1	—	

GROTTA DEL CANE — Spettro I		II		III		ACQUE ALBULE DI TIVOLI — Spettro				BULICAME DI VITERBO — Spettro				PERGINE — Spettro				SALSOMAGGIORE — Spettro			
rosso λ (L)	i	rosso λ (M)	i	azzurro λ (N)	i	rosso λ (O)	i	azzurro λ (P)	i	rosso λ (Q)	i	azzurro λ (R)	i	rosso λ (S)	i	azzurro λ (T)	i	rosso λ (U)	i	azzurro λ (V)	i
Luminosità con bande indistinte		* 834.0		—		—		—		—		—		—		—		* Luminosità con bande		—	
		* 814.5		—		—		—		—		—		—		—				—	
		* 802.0		—		—		—		—		—		—		—				—	
772.3	1	772.3	2	—		772.3	1	—		772.3	1	—		772.3	1	—		772.3	1	—	
763.5	2	763.8	3	—		763.5	2	—		763.5	3	—		763.5	2	—		763.5	1	—	
—		751.8	5	—		—		—		751.5 }	4	—		—		—		—		—	
750.5	2	750.2	5	—		750.5	3	—		750.2 }		—		750.5	2	—		750.5	3	—	
738.0	2	738.0	4	—		738.5	3	—		738.8	4	—		738.8	3	—		738.8	2	—	
727.0	1	727.5	3	—		727.0	2	—		727.0	2	—		727.0	2	—		727.0	2	—	
714.5	1	714.5	3	—		714.5	2	—		714.5	2	—		714 5	1	—		714.5	2	—	
706.5	9	706.5	9	—		706.5	8	—		706.5	9	—		706.5	8	—		706.5	9	706.5	1
702.7	1	702.7	1	—		—		—		702.7	1	—		—		—		702.7	1	—	
796.5	10	696.5	10	—		696.5	9	696.5	5	696.5	10	696.5	2	696.5	9	—		696.5	10	696.5	2
656.8	2	686.8	3	—		685.7	1	685.7	2	637.7	1	—		686.8	1	—		686.5	1	—	
675.0	5	675.3	4	—		675.0	3	—		675.0	4	675.0	1	675.3	2	—		675.3	4	—	
667.5	7	667.5	4	667.5	3	667.8	4	—		367.8	5	667.8	4	667.8	4	667.8	6	667.8	2	667.8	2
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		663.5	8	663.5		663.5	1	663.5	1	663.5	3	—		663.5	7	—	1	663.5	6
660.7	1	660.0	2	—		—		—		660.7	1	—		—		—		—		—	
—		—		—		656.3	1	656.3	1	656.3	1	656.3	2	656.3	2	656.3	2	—		—	
653.8	2	653.8	2	653.8	2	—		653.8	1	653.8	1	—		—		—		653.8	1	653.8	2
—		650.7	1	—		—		—		—		—		—		—		—		—	
648.7	1	648.7	1	647.7	4	—		618.7	1	648.7	1	648.7	1	—		648.7	3	—		648.7	4
645.0	1	645.0	1	—		—		645.0	1	—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
641.3	7	641.3	8	640.7	3	641.3	6	—		641.3	7	641.3	5	641.3	5	641.3	5	641.3	7	641.3	1
638.0	2	638.0	3	638.2	2	—		638.0	2	638.0	3	638.0	1	638.0	4	638.0	1	638.0	4	638.0	1
636.5	3	636.5	2	—		636.5	2	636.5	3	636.5	2	638.5	1	636.5	3	636.5	1	636.5	3	636.5	4
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
631.8	1	631.8	1	631.8	3	—		—		—		—		—		—		—		—	
630.3	1	630.3	4	630.8	2	630.8	2	—		630.8	3	630.8	2	630.8	1	630.8	3	630.8	3	—	
629.7	1	629.7	3	629.3	3	629.7	2	—		629.7	3	629.7	3	629.7	2	629.7	3	629.7	4	—	
—		624.3	1	624.3	7	—		624.3	2	624.3	1	624.1	1	—		624.3	1	624.3	1	624.3	5
6.1.5	3	621.8	5	621.3	2	621.8	5	621.8	5	621.8	4	621.8	3	621.8	3	621.8 }	3	621.8	5	621.8	2
—		—		—		—		—		—		—		—		* 621.0 }		—		—	
617.2	4	617.2	6	617.2	7	617.8	5	617.8 }	4	617.8	6	617.8	5	617.8	3	617.8	8	617.8	3	617.8	6
616.8	1	616.8	6	—		—		617.2 }		617.0	3	—		—		—		617.2	6	—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
615.4	1	615.4	1	—		—		—		—		—		—		—		—		—	

(M, N) * La luminosità che si osservò nel I (L) spettro scomparve; nel II (M) spettro si manifestarono abbastanza bene visibili, benchè poco intense, queste tre righe e bande, le quali vennero poi studiate col sussidio della fotografia.

Nello spettro U la luminosità apparve per breve tempo con bande appena distinguibili; il tutto scomparve dopo breve passaggio della scintilla.

(D) * Questa riga $\lambda = 645{,}0$ scomparve rapidamente sotto l'influenza della bottiglia di Leyda.

(D) ** Nel II spettro si vide in questa posizione una banda formata di righe sfumate e deboli non misurabili che ai limiti estremi della banda. — Nel III spettro riesci visibile la sola riga $\lambda = 630{,}3$.

(T) * In questo solo spettro fu visibile doppia questa riga.

CROOKES Spettro				KAYSER Spettro				EDER E VALENTA Spettro				VESUVIO — FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895 — Prima del trattamento con H^2O		Dopo assorbimento con acqua — 2° e 3° riempimento		1° riempimento - gas con N e H Spettro I		Spettro II e III		FUMAROLA DEL CRATERE Spettro		ROCCIE ALTERATE Spettro		
rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ (A)	i	rosso λ (B)	i	azzurro λ (C)	i	azzurro λ (D)	i	rosso λ (E)	i	rosso λ (F)	i	azzurro λ (G)
614.3	2	—		614.5	3	—		—		—		615.0	3	614.7	5	—		* 614.1	2	614.7	3	614.7	3	—
—		—		—		614.0	1	—		—		—		—		—		III —		—		—		614.0
—		612.0		—		—		—		—		612.3	3	612.3	2	—		—		612.9	1	612.3	1	611.3
609.9	4	—		610.6	2	611.4	3	—		—		610.9	1	610.9	2	611.3		610.9	10	610.5	6	610.9	2	—
—		—		609.8	1	—		—		—		609.7	2	609.7	2	—		609.4	2	610 0	6	610.0	3	—
—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—
605.6	2	—		605.9	4	—		—		—		606.2	2	606.2	4	—		606.2	1	606.6	5	606 0	3	—
—		—		—		—		—		—		—		III »	1	—		III —		—		—		—
—		—		605.2	2	—		—		—		—		605.7	2	—		—		605.3	2	—		605.3
—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—
604.5	3	—		604.3	4	—		604.3	1	—		604.4	2	604.4	4	—		604 4	1	604.4	3	604.4	5	604.4
—		—		—		—		—		—		—		III —	1	—		—		—		—		—
603.8	8	603.8	8	603.1	5	—		603.2	3	603.2	2	603.7	8	603.7	9	—		603.7		603.7	10	603.1	10	—
—		—		—		—		—		—		—		III »		—		III —		—		—		—
—		—		602.5	1	—		—		—		—		602.7	2	—		—		602.5	1	602.7	2	602.5
—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—
—		—		601.3	1	—		—		—		601.2	2	601.2	1	—		601.2		601.2	2	601.2	1	—
—		—		599.9	1	—		—		—		—		600.0	1	—				600 0	1	600.0	1	—
—		—		598.7	1	—		—		—		598.8	1	598.8	2	—		*		598.8	2	598 8	1	—
—		—		—		—		—		—		—		III —		—				—		—		—
—		—		—		—		—		—		596.5	1	—		—		595.5	1	—		—		—
593.5	1	—		594.3	1	—		—		—		593.8	1	593.8	1	—		593.8	2	594.2	1	594.0	2	—
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—
592.6	4	592.6	4	592.8	2	—		592.8	1	592.8	1	592.5	2	592.8	3	—		—		592.5	1	592.5	2	—
590.9	6	—		591.2	4	—		591.2	4	591.2	1	591.2	2	591.2	2	—		—		591.2	6	591.2	7	—
588.7	6	—		588.8	3	—		588.9	3	583.9	1	588.8	7	588.8	4	—		588.8	2	588.8	8	588.8	5	—
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—
—		—		588.2	2	—		588.3	2	—		588.4	7	588.4	3	—		588.4	2	588.4	7	588.4	8	—
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		587.5
585.8	4	—		586.0	2	—		586.0	2	—		586.3	3	586.0	2	—		—		586.0	4	586.0	3	586.3
583.4	2	—		583.2	2	—		583.4	2	583.4	1	583.5	2	** 584.0	2	—		** 584.0	3	583.0	3	583.5	3	** 583.5
—		—		—		—		—		—		—		582,3		—		582.3	2	—		—		582.3
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—
580.3	1	—		580.2	1	—		580.2	2	—		580.0	3	* 580.0	8	—		580.4	1	580.0	2	580.0	2	580.0
—		—		—		—		—		—		—		579.0	1	—		—		—		—		—
—		—		—		—		—		—		—		II —		—		—		—		—		—
577.1	2	—		577.2	1	—		577.2	3	577.2	1	577.4	3	577.4	1	—		—		577.4	4	577.0	2	—
574.6	6	—		—		—		573.9	5	573.9	2	573.8	7	573.8	6	573.8	1	573,3	6	573.3	9	573.8	10	—

	GROTTA DEL CANE Spettro						ACQUE ALBULE DI TIVOLI Spettro				BULICAME DI VITERBO Spettro				PERGINE Spettro				SALSOMAGGIORE Spettro			
	I		II		III																	
i	rosso λ (L)	*i*	rosso λ (M)	*i*	azzurro λ (N)	*i*	rosso λ (O)	*i*	azzurro λ (P)	*i*	rosso λ (Q)	*i*	azzurro λ (R)	*i*	rosso λ (S)	*i*	azzurro λ (T)	*i*	rosso λ (U)	*i*	azzurro λ (V)	*i*
5	614.7	2	614.7	3	* 614.2	2	614.7	1	—		* 614.7	4	614.7	4	614.7	2	—		614.7	4	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
3	612.3	1	612.0	2	611.3	8	—		612.0	1	—		—		—		—		612.8	2	—	
3	610.4	2	610.9	4	—		610.9	1	610.9	5	610.9	5	610.9	4	610.9	3	610.9	9	610.9	5	610.9	2
	609.7	2	609.7	3	—		609.7	4	609.7	4	609.7	4	—		609.7	2	—		609.7	3	609.7	2
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
5	606.0	2	606.2	4	—		606.2	3	—		606.2	3	606.2	2	—		—		606.2	3	606.2	2
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	605.0	2	605.3	2	—		—		—		—		—		—		—		605.3	2	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
4	604.4	2	604.4	6	604.4	4	604.4	2	—		604.4	5	604.4	3	604.4	5	—		604.4	6	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
5	603.7	10	603.7	10	603.7	6	603.7	3	—		603.7	8	603.7	8	603.7	8	—		603.7	9	603.7	3
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		602.3	1	—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
1	601.2	1	601.6	1	—		601.2	1	—		601.2	1	—		601.2	1	—		601.2	1	—	
	600.0	1	600.0	1	—		—		—		600	2	600.0	1	600.0	1	—		—		—	
2	599.0	2	599.0	2	599.0	2	598.8	2	—		598.8	2	—		598 8	2	—		598.8	1	598.8	2
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
5	596.8	1	596.8	1	—		—		—		—		—		—		—		—		—	
1	594.2	2	594.2	2	—		593.8	2	—		593.8		593.8	1	593.8	1	—		593.8	2	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	592.8	7	592.5	5	—		592 5	3	—		592.5	6	592.5	4	592.5	2	—		592.5	2	592.5	1
2	591.2	2	591.0	8	591.0	1	591.2	2	—		591.2	6	—		591.2	6	—		591.2	6	591.2	2
2	588.8	6	588.8	7	588.8	2	588.8	5	588.8	3	588.8	5	588.8	5	588.8	5	—		588.8	5	588.8	1
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	588.4	4	588.4	6	—		588.4	5	—		588.4	5	588.4	2	588.4	2	—		588.4	2	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
3	587.5	1	—		587.5	2	—		587.5	5	—		—		—		587.5	7	—		587.5	8
1	586.0	2	586.0	2	—		586.0	2	586.0	1	586 0	1	586.0	2	586.0	2	—		586.0	2	586.0	1
1	583.5	2	583.5	2	—		583.5	2	583.5	3	583.5	2	583.5	3	583.5	2	—		583.5	2	583.5	1
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		581.4	3	—		—		—		—		—		—		—		—	
2	580.0	1	580.0	1	580.4	1	580.4	1	580.4	1	580.4	2	580.4	1	580.4	1	580.4	2	580.4	1	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
1	577.4	1	577.0	1	577.0	1	577.2	1	577.2	1	577.2	2	577.2	3	577.2	1	577.2	2	577.2	1	577.2	2
5	573.8	6	573.8	5	573.8	3	573.8	4	573.8	5	573.8	6	573.8	4	573.8	4	—		573.8	6	573.8	2

(D) * È probabile che per questa riga sia λ = 614,0, così pure negli spettri N e R.

(D) * Banda di righe poco visibili e confuse nel II spettro, nel III riescirono visibili le sole righe λ = 601.2 e 598.8.

(B, G, D) ** In questa posizione si distinsero due righe sembra abbiano i valori λ = 584.0 e 582.3 e diversa intensità nello spettro D.

CROOKES Spettro				KAYSER Spettro				EDER E VALENTA Spettro				VESUVIO — FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895 — Prima del trattamento con H^2O		VESUVIO — Fumarola sulla spaccatura del 1895 — Dopo assorbimento con acqua — 2° e 3° riempimento		VESUVIO — Fumarola sulla spaccatura del 1895 — Dopo assorbimento con acqua — 1° riempimento - gas con N e H Spettro I		VESUVIO — Fumarola sulla spaccatura del 1895 — Dopo assorbimento con acqua — Spettro II e III		VESUVIO — FUMAROLA DEL CRATERE Spettro		VESUVIO — ROCCIE ALTERATE Spettro		
rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ (A)	i	rosso λ (B)	i	azzurro λ (C)	i	azzurro λ (D)	i	rosso λ (E)	i	rôsso λ (F)	i	azzurro λ (G)
—		—		—		570.1	1	—		—		—		—		III —		—		—		—		—
—		—		—		569.19	1	569.19	1	—		—		—		569.5	2	590.7	1	—		569.0	2	570.1
—		569.0	1	—		569.0	1	569.0	1	—		—		—		III —		—		—		—		—
568.3	2	568.3	1	—		568.2	4	568.2	1	568.5	2	* { 568.5	2	—		* { 568.5	4	* { 569.4	1	* { 568.5	1	568.5	2	568.5
—		—		—		—		—		—		567.8	1	—		567.8	4	567.8	1	567.8	1	—		567.8
—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		567.3
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		566.5
565.1	9	565.0	4	—		565.1	8	565.1	5	565.2	6	565.2	7	—		565.2	6	565.2	7	565.2	6	—		—
—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—
—		—		—		—		—		—		* 564.5	1	—		—		—		—		564.5	3	—
—		—		—		—		—		—		* 563.9	1	—		—		—		—		563.9	3	—
—		—		—		—		—		—		* 562.6	1	—		—		—		—		—		—
561.0	9	560.6	5	—		560.7	8	560.7	6	560.5	9	561.2	9	—		561.2	6	560.8	10	560.8	10	—		—
—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—
—		558.1	1	—		558.2	1	558.2	1	558.3	4	558.3	5	—		558.3	3	558.3	4	—		—		—
—		—		—		—		—		—		—		—		III »	1	—		—		—		—
556.7	2	557.2	3	—		557.2	6	557.2	4	557.2	3	557.2	3	—		—		557.2	6	557.2	3	—		—
—		—		—		—		—		—		II »	9	—		—		—		—		—		—
555.7	10	555.88	5	—		555.9	6	555.9	8	555.8	9	555.8	6	—		—		555.8	10	555.8	10	—		555.8
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—
—		—		—		—		—		—		553.3	1	—		—		553.3	2	—		—		—
—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—		—
552.0	1	552.5	1	—		552.5	4	552.5	2	552.2	2	552.2	1	—		552.2	2	552.2	1	552.2	1	552.2	2	552.2
550.1	2	550.6	1	—		550.7	5	550.6	3	550.7	7	550.7	2	—		550.5	7	550.7	2	550.5	4	550.5	3	—
549.8	8	549.6	4	—		549.6	8	549.6	6	549.7	8	549.7	8	549.7	1	549.7	3	549.7	9	549.7	8	549.7	3	549.7
—		—		—		547.3	3	547.3	1	—		—		—		547.9	3	—		—		—		547.9
—		—		—		—		—		—		—		—		III »	1	—		—		—		—
545.6	6	545.8	1	—		545.7	4	545.7	2	545.7	7	545.7	5	—		—		545.7	5	—		—		545.7
—		545.1	3	—		545.1	8	515.1	4	—		545.2	6	—		—		—		545.0	5	545.0	1	—
544.4	2	544.2	1	—		544.3	3	544.3	2	544.0	3	544.0	3	544.0	1	544.0	2	544.0	2	544.0	3	544.0	2	544.4
—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—
542.1	4	542.19	2	—		542.1	6	542.1	4	542.0	2	542.0	3	—		--		542.0	4	542.0	4	—		—
—		—		—		—		540.7	2	—		540.7	1	540.7	1	* { 540.7	2	540.7	1	—		* { 540.7	2	—
—		—		—		—		—		—		III —		—				—		—				—
—		—		—		—		539.7	2	539.5	1	539.5	1	—		539.7	2	—		—		539.7	2	—
—		—		—		—		—		—		II —		—		538.8	2	—		—		538.8	2	—

GROTTA DEL CANE Spettro						ACQUE ALBULE DI TIVOLI Spettro				BULICAME DI VITERBO Spettro				PERGINE Spettro				SALSOMAGGIORE Spettro			
I		II		III																	
rosso λ (L)	i	rosso λ (M)	i	azzurro λ (N)	i	rosso λ (O)	i	azzurro λ (P)	i	rosso λ (Q)	i	azzurro λ (R)	i	rosso λ (S)	i	azzurro λ (T)	i	rosso λ (U)	i	azzurro λ (V)	i
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		569.0	1	569.0	1	—		—		—		—		—		—		—		—	
568.5	1	568.5	1	568.5	1	568.5	1	*{ 563.5	2	568.8	3	568.8	1	568.8	1	568.8	2	* 568.8	2	* 568.5	1
—		—		—		—		567.8	2	—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
565.0	7	565.0	2	565.2	2	565.2	4	565.2	6	565.2	7	565.2	5	565.2	5	—		565.2	7	565.2 }	2 *
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		564.5 }	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
560.8	9	560.8	4	560.8	4	560.8	8	560.8	7	560.8	9	560.8	6	560.8	8	—		560.8	9	560 8	3 *
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		558.3	1
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
557.2	3	557.2	2	557.2	2	557.2	3	557.2	2	557.2	3	557.2	4	557.2	3	—		557.2	3	557.2	2
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
555.8	8 *	555.8	4 *	555.8	4	555.8	9	555.8	5	555.8	8	555.8	6	555.8	9	—		555.8	9	555.8	1
—		—		555.0		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		553.3	1	—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		552.2	1	552.2	2	—		—		552.2	1	—	
550.7	2	—		—		—		—		—		—		550.7	2	—		550.7	3	—	
549.7	7	549.7	5	549.7	5	549.7	7	549.7	6	549.7	7	549.7	7	549.7	8	549.7	3	549.7	8	549.7	1
—		—		547.9	2	—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		545.7	1	—		545.7	2	—		545.7	2	—		545.7	5	—		545.7	5	—	
545.2	5	545.2	4	545.2	4	—		545.2	2	—		—		545.2	6	—		545.2	6	545.2	2
544.0	1	544.0	1	544.0	1	544.0	3	—		—		—		544.0	2	—		544.0	2	—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
542.0	2	—		—		542.0	2	542.0	1	—		—		542.0	3	—		542.0	3	—	
—		—		540.7	4	—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		{ —		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		{ 539.5	4	—		—		539.5	1	—		—		—		—		—	
—		—		{ 538.8	2	—		—		—		—		—		—		—		—	

* La riga corrispondente a λ = 568.5 si vedeva sfumata negli spettri nei quali è segnata con asterisco, invece doppia si vedeva in quelli segnati con grafa.

* (B) Le righe λ 564.5; 563.9 - 562.6. furono visibili soltanto nel solo spettro osservato subito dopo il caricamento del tubo, il passaggio continuato della scintilla le fece scomparire.

* (L) Le due righe λ = 562.6 e 561.2 apparvero di eguale intensità (10) negli spettri H e I.

(L) * Negli spettri L ed M la riga λ = 555.8. apparve sfumata a destra nello spettro N era distintamente doppia (λ 555.0 approssimato).

(C, F e N) * Le tre righe λ=540.7; 539.7; 538.8 costituiscono le parti più visibili e nette di bande abbastanza luminose.

CROOKES				KAYSER				EDER E VALENTA				VESUVIO													
Spettro				Spettro				Spettro				FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895								FUMAROLA DEL CRATERE		ROCCIE ALTERATE			
												Prima del trattamento con H^2O		Dopo assorbimento con acqua											
														2° e 3° riempimento		1° riempimento – gas con N e H Spettro I		Spettro II e III		Spettro		Spettro			
rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ (A)	i	rosso λ (B)	i	azzurro λ (C)	i	azzurro λ (D)	i	rosso λ (E)	i	rosso λ (F)	i	azzurro λ (G)	i
—		—		—		—		537.3		537.3	1	537.2	3	537.2	1	537.2	1	537.2	1	537.2	1	—		—	
—		—		—		—		—		—		535.5	1	* 535.5	1	—				—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		* 535.0	1	—		banda		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		III —	—	—				—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		* 532.8	2	—				—		—		532.8	1
—		—		—		—		—		—		—		* 531.7	1	—		531.7		—		—		—	
—		—		—		—		—		530.6	4	—		* 530.8	1	530.8	5	530.8	5	—		—		530.8	3
—		—		—		—		—		528.7	5	—		—		528.5	4	528.5	1	—		—		528.5	3
—		—		527.5	1	—		—		—		527.5	1	527.5	1	—		—		527.5	2	—		—	
—		—		—		—		—		526.5	1	—		—		—		526.5	1	—		—		—	
525.8	6	—		525.4	2	—		525.4	2	525.4	1	525.4	4	525.4	3	—		—		525.4	2	525.4	3	—	
—		—		—		—		—		—		—		523.8	1	—		—		—		—		—	
522.2	7	—		522.1	2	—		522.1	5	522.1	4	522.3	1	522.3	4	522.8	6	522.3	6	522.3	2	—		522.3	2
—		—		—		—		—		521.7	3	—		521.3	1	—		521.7	1	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		III —	—	—		III —	1	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
518.5	10	—		518.8	5	—		518.7	5	518.7	3	518.6	7	518.6	6	—		—		518.6	6	518.6	7	—	
—		—		—		—		517.7	2	517.7	1	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		517.6	4	—		—		—		—		—		—		—	
516.5	9	—		—		—		—		516.6	5	516.4	9	516.4	7	516.4	8	—		516.4	8	516.4	6	—	
—		—		516.2	4	—		516.2	5	516.2	3	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		515.2	3	—		515.1	4	515.1	2	515.3	2	515.3	5	—		515.3	1	515.3	2	—		515.3	4
—		—		—		514.5	2	—		514.5	6	—		—		—		—		—		—		514.8	5
—		514.0	10	—		514.1	1	—		514.2	6	—		514.0	1	514.0	8	514.0	8	—		—		514.0	6
—		—		512.0	1	—		511.8	2	511.8	1	—		511.4	2	—		—		511.8	2	—		—	
—		—		—		—		—		509.0	2	—		509.2		509.2	2	—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		507.6	1	—		507.3		—		—		—		—		—	
506.5	4	506.5	10	506.3	2	506.2	2	—		506.2	8	506.4		506.4		506.4	2	506.4	9	506.4		506.4		506.4	8
—		—		—		—		506.0	4	—		banda				—		—		banda		banda		—	
—		—		—		—		505.4	2	—						—		—		debole				—	
—		—		—		—		504.9	3	—		504.8		504.8		—		—				504.8		—	
501.2	4	501.2	2	—		501.7		—		501.7	8	—		—		501.7	6	501.7	7	501.7		—		501.7	5
—		—		501.0	2	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		500.7	2	—		500.9	1	—		500.9	8	—		500.8	1	500.8	6	500.8	7	—		—		500.8	6
—		—		—		—		—		—		—		500.2	1	—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		499.6	1	—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		498.7	1	—		—		—		—		—	
—		—		496.9	1	—		—		497.3	4	—		—		—		—		—		—		497.3	2

GROTTA DEL CANE Spettro I		II		III		ACQUE ALBULE DI TIVOLI Spettro				BULICAME DI VITERBO Spettro				PERGINE Spettro				SALSOMAGGIORE Spettro			
rosso λ (L)	i	rosso λ (M)	i	azzurro λ (N)	i	rosso λ (O)	i	azzurro λ (P)	i	rosso λ (Q)	i	azzurro λ (R)	i	rosso λ (S)	i	azzurro λ (T)	i	rosso λ (U)	i	azzurro λ (V)	i
—		537.2	1	537.2	2	—		537.2	2	537.2	2	537.2	2	—		537.2	1	537.2	1	537.2	1
—		—		536.0	3 }3	—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		535.0	3	—		—		—		—		—		—		535.0	1	535.0	2
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		530.8	4	—		—		—		—		—		—		—		530.8	3
—		—		528.5	3	—		528.5	1	—		528.5	1	—		528.5	4	—		528.5	4
—		—		527.5	2	—		—		527.5	1	—		—		—		527.5	1	—	
—		—		526.5	2	—		—		—		526.5	3	—		—		—		—	
525.4	2	525.4	8	—		—		525.4	2	525.4	2	525.4	3	525.4	2	525.4	2	525.4	4	525.4	2
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
522.3	2	522.3	4	522.3	4	—		522.3	2	522.3	4	—		522.3	2	522.3	3	522.3	2	522.3	3
—		—		521.3	2	—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
518.6	7	518.6	6	518.6	1	518.6	5	518.6	4	518.6	6	518.6	4	518.6	5	—		518.6	6	518.6	1
—		—		517.7	3	—		517.7	3	—		517.7	1	—		—		—		517.7	1
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
516.4	6	516.4	4	516.4	6	516.4	3	—		516.4	5	516.3	5	516.3	3	516.3	4	516.3	4	516.3	1
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
515.3	2	515.3	2	—		515.3	2	—		515.3	2	—		—		—		—		515.3	1
—		—		514.8	9	banda		514.3	2	514.3	3	514.3	5	—		514.3	8	—		514.2	6
—		—		514.0	8	debole		—		—		—		—		—		—		—	
—		511.8	1	511.4	1	511.9		—		511.9	1	511.9	1	—		—		—		—	
—		—		509.2	2	509.2		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—				—		—		—		—		—		—		—	
507.3		—		—		banda		—		—		—		—		—		507.3		—	
		506.4	3	5 6.4	10	debole		506.4	3	506.4		506.4	7	566.4		506.4	7			506.4	8
banda	2			—				—		banda	1	—		banda		—				—	
		banda	3	—				505.7	1			—				—				—	
504.8		504.8	2	—		504.8		—		504.8		—		504.8		—		504.8		—	
—		—		501.7	7	—		501.7	1	—		501.7	3	—		501.7	4	501.7	1	—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		500.8	8	—		500.8	2	—		500.7	4	—		500.7	4	—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		499.6	1	—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		497.3	5	—		497.3	3	—		—		—		497.3	2	—		497.3	6

(B) * Serie di righe deboli le cui posizioni non sono che approssimate. Nello spettro D le stesse righe formavano una banda sfumata i cui limiti estremi sono compresi fra λ = 537.2 e 531.7. Nello spettro N apparvero distinte le tre righe λ = 537.2; 536.0 + 535.0.

Nello spettro I la riga λ = 531.7 appariva la prima alla sinistra della serie.

CROOKES				KAYSER				EDER E VALENTA				VESUVIO – FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895								FUMAROLA DEL CRATERE		ROCCIE ALTERATE			
Spettro				Spettro				Spettro				Prima del trattamento con H_2O		Dopo assorbimento con acqua: 2° e 3° riempimento		Dopo assorbimento con acqua: 1° riempimento — gas con N e II, Spettro I		Dopo assorbimento con acqua: Spettro II e III		Spettro		Spettro			
rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ (A)	i	rosso λ (B)	i	azzurro λ (C)	i	azzurro λ (D)	i	rosso λ (E)	i	rosso λ (F)	i	azzurro λ (G)	i
496.5	4	496.5	9	—		496.5	3	—		496.5	6	—		496.2	2	496.2	8	496.2	6	—		496.3 banda debolissima		496.3	7
493.8	2	493.8	10	—		493.3	1	—		493.3	6	—		493.4	1	493.4	6	493.4	4	—		493.4		493.4	4
—		—		—		—		—		490.5	4	—		490.8	1	—		490.8	1	—		—		490.8	1
—		—		—		—		—		—		—		III —		—		III —		—		—		—	
—		—		—		—		489.5	2	—		489.2	1	489.2	2	489.2	2	489.2	1	—		—		489.2	1
—		—		—		—		—		489.3	2					—		III —		—		—		—	
—		—		488.9	1	—		—		488.83	4	banda		banda		—		—		—		—		—	
—		—		488.2	2	—		—		488.2	4					—		—		—		—		—	
487.9	4	487.9	40	—		488.0	4	—		488.0	8					488.0	8	488.0	10	—		488.0		488.0	10
—		—		—		—		—		486.7	5	487.3		487.3		—		—		—		banda		—	
—		—		—		—		—		486.8	6	—		—		—		—		—				—	
—		—		—		—		—		486.1	2	—		—		—		—		* 486.1	8	486.0		—	
—		484.7	1	—		484.7	3	—		484.7	8	—		484.7	1	484.7	6	484.7	5	484.7	1	484.7		484.7	4
—		—		—		—		—		483.4	1	—		483.4	1	—		—		483.4	1	banda		—	
—		—		—		—		—		481.9	2	—		—		—		—		—		481.8		—	
—		480.5	7	480.7	3	480.6	4	—		480.6	10	480.4	1	480.4	1	480.4	8	480.4	9	480.4	1	480.4	2	480.4	10
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		479.2	1	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		479.1	1	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		477.1	8	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		476.8	1	—		476.8	2	—		477.0	2	477.0	1	—		—		477.0	2	477.0	1	—	
—		476.3	1	—		476.5	3	—		476.5	5	—		—		476.3	3	476.3	5	476.3	1	—		476.3	5
—		—		—		—		475.3	2	—		—		475.5	4	—		—		—		—		—	
—		—		—		—		474.6	1	—		474.8	1	474.8	1	—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—	
—		473.4	6	473.8	1	473.6	5	473.6	1	473.6	6	—		473.5	1	473.5	8	473.5	6	—		—		473.5	7
—		—		473.2	1	—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—	
—		472.6	2	—		472.7	4	—		472.7	4	—		472.7	2	472.7	5	472.7	5	—		—		472.7	7
—		—		—		—		—		470.8	3	—		—		—		—		—		—		—	
470.1	8	—		470.2	4	—		470.2	5	470.2	1	470.3	6	470.3	7	—		—		470.3	7	470.3	7	—	
—		465.6	5	—		465.8	4	465.8	1	465.8	5	—		465.9	1	465.9	6	465.9	6	—		—		465.9	6
—		—		—		—		—		464.0	2	—		—		—		—		—		—		464.0	2
—		—		—		463.7	3	—		463.7	5	—		—		463.2	1	463.2	4	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —	1	—		—		—	
469.2	5	—		462.8	3	—		462.8	8	—		462.8	6	462.8	7	—		—		462.8	2	432.8	3	—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		461.9	6	—		—	
—		460.8	8	—		460.9	6	460.9	2	460 9	8	—		460.9	1	460.9	7	460.9	9	—		—		460.9	7
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —	4	—		—		—	
459.4	2	—		459.6	3	—		459.6	8	—		459.8	2	459.8	1	—		—		459.8	4	459.8	4	—	
—		458.67	6	—		459.0	5	—		459.0	7	—		459.0	5	459.0	5	—		—		—		459.0	6

	GROTTA DEL CANE Spettro I		II		III		ACQUE ALBULE DI TIVOLI Spettro				BULICAME DI VITERBO Spettro				PERGINE Spettro				SALSOMAGGIORE Spettro			
i	rosso λ (L)	i	rosso λ (M)	i	azzurro λ (N)	i	rosso λ (O)	i	azzurro λ (P)	i	rosso λ (Q)	i	azzurro λ (R)	i	rosso λ (S)	i	azzurro λ (T)	i	rosso λ (U)	i	azzurro λ (V)	i
2	—		* 496.3	1	496.3	8	—		496.3		—		—		—		496.3	2	—		—	
3	—		—		493.4	6	—		493.4	2	—		493 4	5	—		493.4	5	—		493.4	8
1	—		—		490.8	2	—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
1	489.2		489.2		489.2	2	489.2		—		489.2		—		489.2		—		—		489.2	1
									—				—				—		—		—	
									—				—				—		—		—	
*	banda		* banda	3	483.0	10	banda		483.0	8			488.0	9			488.0	10	—		488.0	10
9									—		banda		—		banda		—		—		—	
	487.3				487.8	2	487.3		—				—				—		—		—	
1	—		486.5		486.5	2	—		—				—				486.5	2	—		486.3	2
	—		—		—		—		—				—				—		—		—	
2	—		—		484.7	7	—		484.7	5	484.7		484.7	6	484.7		484.7	7	* 484.7	1	484.7	5
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		483.4	1	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
9 *	480.4		480.4	3	480.4	10	—		480.4	7	—		480.4	10	480.4	1	431.0	9	480.4	2	480.4	9
	—		—		—		—		—		—		—				—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		banda		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		479.1		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		477.0	2	477.0	6	—		—		—		—		—		—		477.0	1	—	
	—		—		476.3	1	—		476.3	8	—		476.3	5	—		476.3	8	—		476.3	5
	—		475.5	1	—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
5 6	—		—		473.5	7	—		478.5	5	—		473.5	6	—		473.5	8	—		473.5	8
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		472.7	6	—		472 7	5	—		472.7	5	—		472.7	7	—		472.7	7
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	470.3	7	470.3	9	—		470.3	5	470.3	2	470.3	7	470.3	2	470.3	8	470.3	2	470.3	1	470.3	1
	—		—		465.9	6	—		465.9	4	—		465.9	7	—		465.9	8	—		465.9	7
	—		—		464.0	2	—		—		—		—		—		464.0	2	—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		463.7	2
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	462.8	5	462.8	7	—		462.8	7	—		462.8	5	—		462.8	4	—		462.8	5	—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		460.9	7	—		460.9	5	—		460.9	6	—		460.9	9	—		460.5	6
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	459.8	6	459.8	7	—		459.8	4	—		459.8	4	—		459.8	6	—		459.8	6	—	
	—		—		459.0	6	—		459.0	4	—		459.0	6	—		459.0	8	—		459.0	4

CROOKES Spettro				KAYSER Spettro				EDER e VALENTA Spettro				VESUVIO — FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895 — Prima del trattamento con H^2O		Dopo assorbimento con acqua — 2° e 3° riempimento		Dopo assorbimento con acqua — 1° riempimento - gas con N e H Spettro I		Dopo assorbimento con acqua — Spettro II e III		FUMAROLA DEL CRATERE Spettro		ROCCIE ALTERATE Spettro			
rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ (A)	i	rosso λ (B)	i	azzurro λ (C)	i	azzurro λ (D)	i	rosso λ (E)	i	rosso λ (F)	i	azzurro λ (G)	i
—		—		—		—		—		—		—		III 459.0	1	—		—		—		—		—	
—		457.9	6	—		457.9	5	—		457.9	8	—		—		457.8	5	457.8	6	—		—		457.8	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III „	2	—		—		—	
—		—		—		—		—		456.5	2	—		—		—		456.4	5	—		—		—	
—		—		—		—		—		456.4	3	—		—		—		—		—		—		—	
—		454.3	7	—		454.5	5	—		454.5	8	—		454.3	1	454.3	6	454.3	2	—		—		454.3	5
—		—		—		—		—		453.5	3	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		453.0	3	—		—		—		452.0	6	—		—		—	
—		—		—		452.2	3	—		452.2	6	—		—		—		III —		—		—		—	
451.4	2	—		—		—		—		—		451.5	5	451.5	5	—		—		451.5	4	451.5	2	—	
450.9	9	450.9	8	451.0	5	—		451.0	10	—		451.0	6	451.0	7	—		—		451.0	7	451.0	8	—	
—		—		—		450.3	1	—		450.3	5	—		—		—		450.5		—		—		—	
—		—		—		—		—		449.3	4	—		—		—		s banda		—		—		—	
—		—		—		—		—		449.1	4	—		—		—				—		—		—	
—		—		—		—		—		448.8	4	—		—		—		448.6		—		—		—	
—		—		—		448.2	5	448.19	1	448.19	6	—		—		—		—		—		—		—	
—		447.8	6	—		447.5	2	—		447.5	2	—		447.5	1	447.5	5	447.5	6	—		—		447.5	5
—		—		—		—		—		—		—		II —		—		—		—		—		—	
—		—		—		446.0	2	—		446.0	2	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		444.9	2	—		444.9	2	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		444.3	1	—		444.3	1	—		—		—		444.5	2	—		—		—	
—		—		—		443.9	1	—		443.9	1	—		—		—		III —		—		—		—	
—		—		—		443.4	2	—		443.4	3	—		—		—		443.4	2	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—	
—		442.6	10	—		442.6	9	—		442.6	8	—		—		442.8	9	442.8	10	—		—		442.8	7
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III „	6	—		—		—	
—		442.2	10	—		442.1	1	—		442.1	2	442.2	1	422.2	4	442.2	9	442.2	9	442.2	2	—		442.2	8
—		439.9	10	—		440.1	5	440.1	2	440.1	6	—		440.0	1	440.0	5	440.0	8	—		440.0	1	440.0	5
—		—		—		440.0	3	440.0	3	440.0	5	—		III —		—		—		—		—		—	
—		—		—		438.3	2	—		438.3	2	—		—	2	—		—		—		—		—	
—		437.6	9	—		437.9	6	437.9	2	437.9	6	—		437.7		437.7	6	437.7	6	—		—		437.7	
—		—		—		437.6	3	—		437.6	2	—		II —		—		—		—		—		—	
—		436.9	9	—		437.1	4	437.1	1	437.1	6	—		—		437.0	7	437.0	7	—		—		437.0	4
—		—		—		437.0	1	—		437.0	6	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		436.7	1	—		436.8	1	—		—		436.8	5	436.8	6	—		—		436.8	4
—		—		436.3	1	—		436.3	4	—		—		436.3	1	—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—	
—		434.8	10	—		434.8	10	434.8	3	434.8	10	—		434.8	1	434.8	10	434.8	8	434.8	3	—		434.8	9
—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—		—		—	

	GROTTA DEL CANE Spettro I		II		III		ACQUE ALBULE DI TIVOLI Spettro				BULICAME DI VITERBO Spettro				PERGINE Spettro				SALSOMAGGIORE Spettro			
i	rosso λ (L)	i	rosso λ (M)	i	azzurro λ (N)	i	rosso λ (O)	i	azzurro λ (P)	i	rosso λ (Q)	i	azzurro λ (R)	i	rosso λ (S)	i	azzurro λ (T)	i	rosso λ (U)	i	azzurro λ (V)	i
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
4	—		—		457.8	5	—		457.8	3	—		457.8	6	—		457.8	7	—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
5	—		—		* 456.4	1	—		* 456.4	3	—		—		—		* 456.4	2	—		456.4	3
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
2	—		—		454.3	6	—		454.3	2	—		454.3	5	—		454.3	8	—		454.3	6
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		452.3	5	—		—	
	451.5	5	451.5	5	—		451.5	3	—		451.5	4	—		451.5	3	—		451.5	6	451.5	1
1	451.0	9	451.0	9	—		—		451.0	3	451.0	8	451.0	3	451.0	4	451.0		451.0	8	451.0	1
	—		—		450.5		—		—		—		—		—				—		—	
	—		—		banda		—		—		—		—		—		banda		—		—	
	—		—				—		—		—		—		—				—		—	
	—		—		448.6		—		—		—		—		—		448.6		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		448.0	1	—		—		—	
8	—		—		447.5	6	—		447.5	6	—		447.5	4	—		447.5	5	—		447.5	5
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
1	—		—		446.3	1	—		—		—		446.3	1	—		—		—		—	
	—		—		445.0	1	—		—		—		—		—		—		—		445.7	
	—		—		444.5	1	—		—		—		—		—		445.0	4	—		banda	
	—		—		—		—		—		—		—		—		banda		—		444.5	
1	—		—		—		—		—		—		—		—		443.2		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
9	—		—		442.8	7	—		442.8	6	442.8	1	442.8	10	442.8	1	442.8	9	442.8	2	442.8	8
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
9	—		440.0	1	442.2	9	—		442.2	6	—		442.2	10	—		422.2	9	—		442.2	7
	—		—		—		—		440.0	5	—		440.0	6	—		440.0	8	—		440.0	6
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		438.4	6	—		—		—		—		—		—		—		—	
6	—		—		437.7	6	—		437.7	3	—		437.7	5	—		437.7	7	—		437.7	4
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
7	—		—		437.0	5	—		437.0	2	—		—		—		—		—		437.0	4
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
5	—		—		—		—		436.8	2	—		436.8	2	—		436.8	7	—		436.8	4
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
10	—		434.8	1	434.8	10	—		434.8	2	—		431.8	10	—		434.8	9	434.8	1	434.8	9
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	

CROOKES Spettro				KAYSER Spettro				EDER E VALENTA Spettro				VESUVIO — FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895 — Prima del trattamento con H^{2}O		VESUVIO — FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895 — Dopo assorbimento con acqua — 2° e 3° riempimento		VESUVIO — FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895 — Dopo assorbimento con acqua — 1° riempimento – gas con N e H Spettro I		VESUVIO — FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895 — Dopo assorbimento con acqua — Spettro II e III		VESUVIO — FUMAROLA DEL CRATERE Spettro		VESUVIO — ROCCIE ALTERATE Spettro			
rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ (A)	i	rosso λ (B)	i	azzurro λ (C)	i	azzurro λ (D)	i	rosso λ (E)	i	rôsso λ (F)	i	azzurro λ (G)	i
434.5	5	—		434.5	4	434.5	1	434.5	10	—		434.3	6	434.3	5	—		—		434.3	6	434.3	2	434.3	9
433.3	9	433.3	9	433.3	6	433.3	2	433.3	2	433.3	1	433.4	8	433.4	7	—		433.4	9	433.4	9	433.4	9	433.4	3
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III »	2	—		—		—	
—		—		—		433.1	6	433.1	1	433.1	8	—		—		433.0	6	—		—		—		433.1	3
—		—		—		—		—		432.1	1	—		—		—		432.0	2	—		—		—	
—		—		—		—		431.2	2	—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		430.9	2	—		430.9	2	—		—		—		431.0	5	—		—		—	
430.0	9	—		430.0	6	430.0	2	430.0	10	—		430.0	7	430.0	7	—		430.0	1	430.0	6	430.0	6	—	
—		429.9	9	—		429.8	1	—		429.8	1	—		—		—		III —		—		—		—	
—		—		—		428.3	3	—		428.3	5	—		—		—		423.3	1	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—	
—		—		—		427.5	1	—		427.5	4	—		427.4	1	427.6	2	—		—		—		427.4	2
427.2	8	427.2	7	427.2	6	—		427.2	10	—		427.0	7	427.0	5	—		—		427.0	8	427.0	5	427.0	1
426.6	4	426.6	6	426.6	5	426.6	6	426.6	10	426.6	8	426.6	6	426.6	6	426.6	2	426.6	7	426.6	6	426.6	3	426.6	2
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III »	1	—		—		—	
425.9	9	425.9	8	425.9	7	—		425.9	10	—		425.8	7	425.8	4	—		425.8	6	425.8	7	425.8	5	—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III »	1	—		—		—	
425.1	3	425.1	2	425.1	3	—		425.1	6	—		—		425.0	8	—		—		425.0	5	—		—	
—		422.8	6	—		422.9	1	422.8	2	422.8	8	—		—		—		—		—		—		422.8	1
—		—		—		422.2	3	—		422.2	6	—		—		—		422.2	2	—		—		422.3	1
—		—		—		421.8	3	—		421.8	4	—		—		—		421.8	1	—		—		—	
—		—		—		420.2	1	—		420.3	4	—		—		—		—		—		—		—	
420.1	10	420.1	10	420.0	9	—		420.0	10	420.0	1	420.2	6	420.2	6	—		—		420.2	8	420.2	9	—	
419.8	9	419.8	9	419.8	5	—		419.8	10	—		419.8	8	419.8	6	—		—		419.8	5	419.8	9	—	
419.1	9	419.1	9	419.1	5	—		419.1	10	419.1	1	419.3	5	419.5	4	—		419.3	2	419.3	6	419.3	6	—	
—		—		419.0	5	—		419.0	5	419.0	1	—		III »	1	—		III —		—		—		—	
418.3	8	418.3	8	418.3	5	418.3	2	418.2	9	418.2	2	418.4	6	418.4	5	—		—		418.4	6	418.4	4	—	
—		—		—		—		—		—		—		III »	1	—		—		—		—		—	
416.4	4	416.4	8	416.4	5	—		416.4	9	416.4	1	—		—		—		—		—		—		—	
415.9	10	415.9	16	415.8	9	—		415.8	10	415.8	1	415.9	8	415.9	6	—		—		415.9	2	415.9	9	—	
—		—		—		—		—		—		—		III »	1	—		—		—		—		—	
415.6	6	—		—		415.6	2	—		415.6	6	—		415.5	8	—		—		—		415.5	7	—	
—		—		415.4	1	—		415.2	5	—		—		III »	4	—		—		—		—		—	
—		—		—		—		415.0	1	—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		414.6	1	414.7	2	—		—		—		414.7	2	—		—		—		—	
—		—		—		—		—		414.6	3	—		—		—		—		—		—		—	
—		413.1	3	—		413.1	4	413.1	2	413.1	8	—		—		—		413.1	2	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—	
—		410.5	8	—		410.4	7	410.4	2	410.4	10	—		—		—		—		—		—		—	

GROTTA DEL CANE						ACQUE ALBULE DI TIVOLI				BULICAME DI VITERBO				PERGINE				SALSOMAGGIORE			
Spettro						Spettro				Spettro				Spettro				Spettro			
I		II		III																	
rosso		rosso		azzurro		rosso		azzurro		rosso		azzurro		rosso		azzurro		rosso		azzurro	
λ (L)	i	λ (M)	i	λ (N)	i	λ (O)	i	λ (P)	i	λ (Q)	i	λ (R)	i	λ (S)	i	λ (T)	i	λ (U)	i	λ (V)	i
434.3	2	434.3	6	—		434.3	3	—		434.3	3	—		434.3	3	—		434.3	4	—	
433.4	8	433.4	10	433.4	4	433.4	7	433.4	4	434.4	9	433.4	7	433.4	8	433.4	6	433.4	7	433.4	3
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		432.9	2	—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		432.9	2	—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		431.0	2	—		—		—		—		—		431.0	1	—		—	
430.0	6	430.0	8	430.0	2	430.0	5	430.0	2	430.0	7	430.0	3	430.0	4	430.0	2	430.0	6	430.0	2
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		429.3	2
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		427.4	3	—				—		427.8	3	—		427.8	4	—		427.4	3
427.0	5	427.0	6	—		427.0	6			427.0	2			427.0	5	427.0	4	427.0	6	427.0	2
426.6	4	426.6	5	426.6	3	426.6	6			426.6	4	banda		426.6	5	427.0	4	426.6	7	426.6	1
—		—		—		—		banda		—				—		—		—		—	
425.8	5	425.8	7	—		425.8	7			425.8	4			—		—		425.8	8	—	
—		—		—		—				—		—		—		—		—		—	
—		—		—		425.0	5			425.0	2	425.0	3	425.0	8	—		425.0	5	—	
—		—		422.8	2	—		—		—		422.8	2	—		422.8	4	—		422.8	3
—		—		422.3	3	—		—		—		—		—		422.3	2	—		—	
—		—		421.8	2	—		—		—		—		—		421.8	2	—		421.8	3
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
420.2	9	420.2	9	420.2		420.2	9	420.2	4	420.2	9	420.2	3	420.2	9	420.2	2	420.2	9	420.2	2
419.8	9	419.8	9			419.8	9	—		419.8	9	419.8	3	419.8	9	419.8	2	419.8	9	419.8	2
419.3	8	419.3	5	* banda	1	419.3	8	419.3	1	419.3	3	419.3	2	419.3	4	419.3	1	419.3	3	—	
—		—				—		—		—		—		—		—		—		—	
418.4	5	418.4	4	418.4		418.4	6	418.4	2	418.4	2	418.4	4	418.4	4	418.4	1	418.4	3	418.4	1
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		416.4	1	416.3	7	—		416.3	6	—		416.3	8	—		416.3	9	—	
415.9	7	415.9	9	415.9		415.9	9	415.9	3	415.9	6	415.9	2	415.9	1	—		415.9	9	415.1	1
						—		—		—		—		—		—		—		—	
* 415.5	7	* 415.5	9	banda	1	—		415.5	2	—		415.5	2	—		—		—		415.5	1
—		—				—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		415.1		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		413.1	1	—		—		—		—		—		413.1	2	—		413.1	1
—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		410.6	2	—		—		—		—		—		410.6	3	—		410.6	2

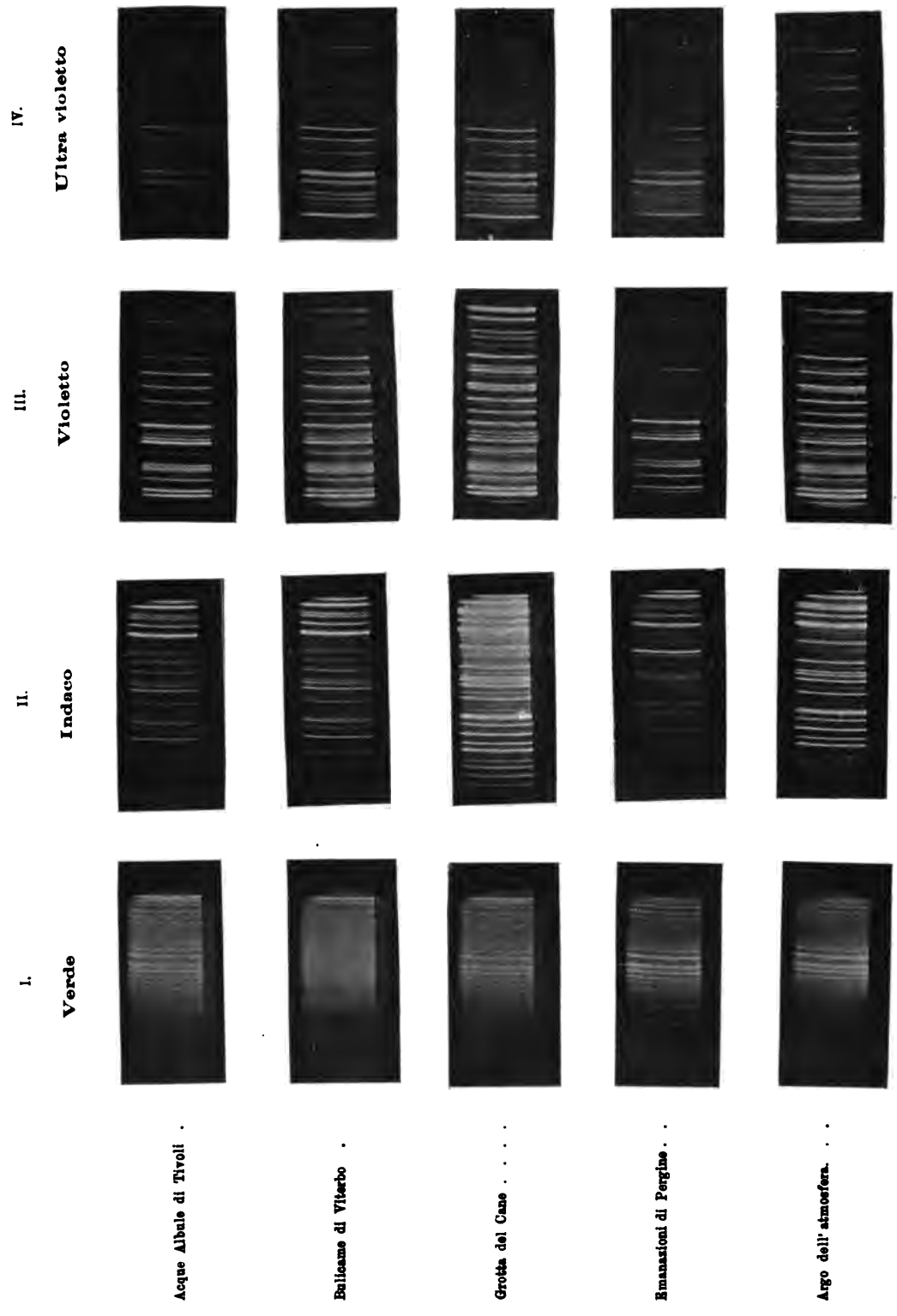
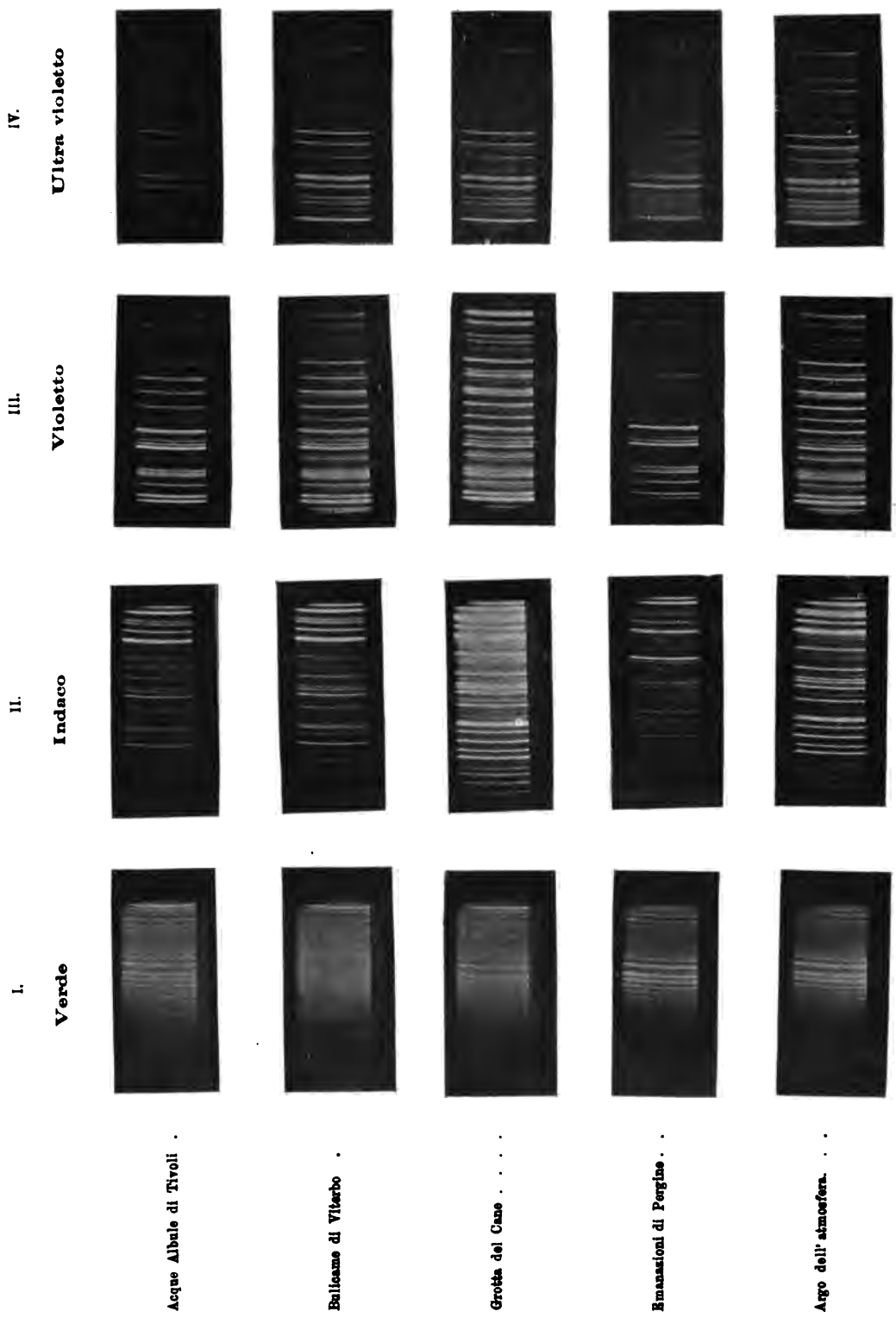
CROOKES Spettro				KAYSER Spettro				EDER E VALENTA Spettro				VESUVIO													
												FUMAROLA SULLA SPACCATURA DEL 1895								FUMAROLA DEL CRATERE Spettro		ROCCIE ALTERATE Spettro			
												Prima del trattamento con H^2O		Dopo assorbimento con acqua: 2° e 3° riempimento		Dopo assorbimento con acqua: 1° riempimento - gas con N_e H Spettro I		Dopo assorbimento con acqua: Spettro II e III							
rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ	i	azzurro λ	i	rosso λ (A)	i	rosso λ (B)	i	azzurro λ (C)	i	azzurro λ (D)	i	rosso λ (E)	i	rosso λ (F)	i	azzurro λ (G)	i
—		—		—		408.2	2	—		408.2	6	—		—		—		408.3	1	—		—		—	
—		—		—		—		—		—		—		—		—		III —		—		—		—	
—		—		—		406.8	1	—		406.5	4	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		405.4	2	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		405.3	1	—		405.3	6	—		—		—		405.3	1	—		—		—	
—		—		—		—		405.0	2	—		—		—		—		III —		—		—		—	
404.4	9	404.4	8	404.4	7	404.3	9	404.4	10	404.3	8	404.2	1	404.2	2	—		—		404.2	1	—		—	
—		—		—		403.8	2	—		403.8	6	—		—		—		—		—		—		—	
—		401.3	8	—		—		401.3	2	401.3	8	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		401.1	4	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		—		—		397.4	6	—		—		—		—		—		—		—	
—		396.7	3	—		396.8	4	—		396.8	4	—		—		—		—		—		—		* 396.0 banda	
—		—		—		396.0	2	396.0	1	396.0	4	—		—		—		—		—		—		—	
—		—		—		395.8	2	—		395.8	4	—		—		—		—		—		—		—	

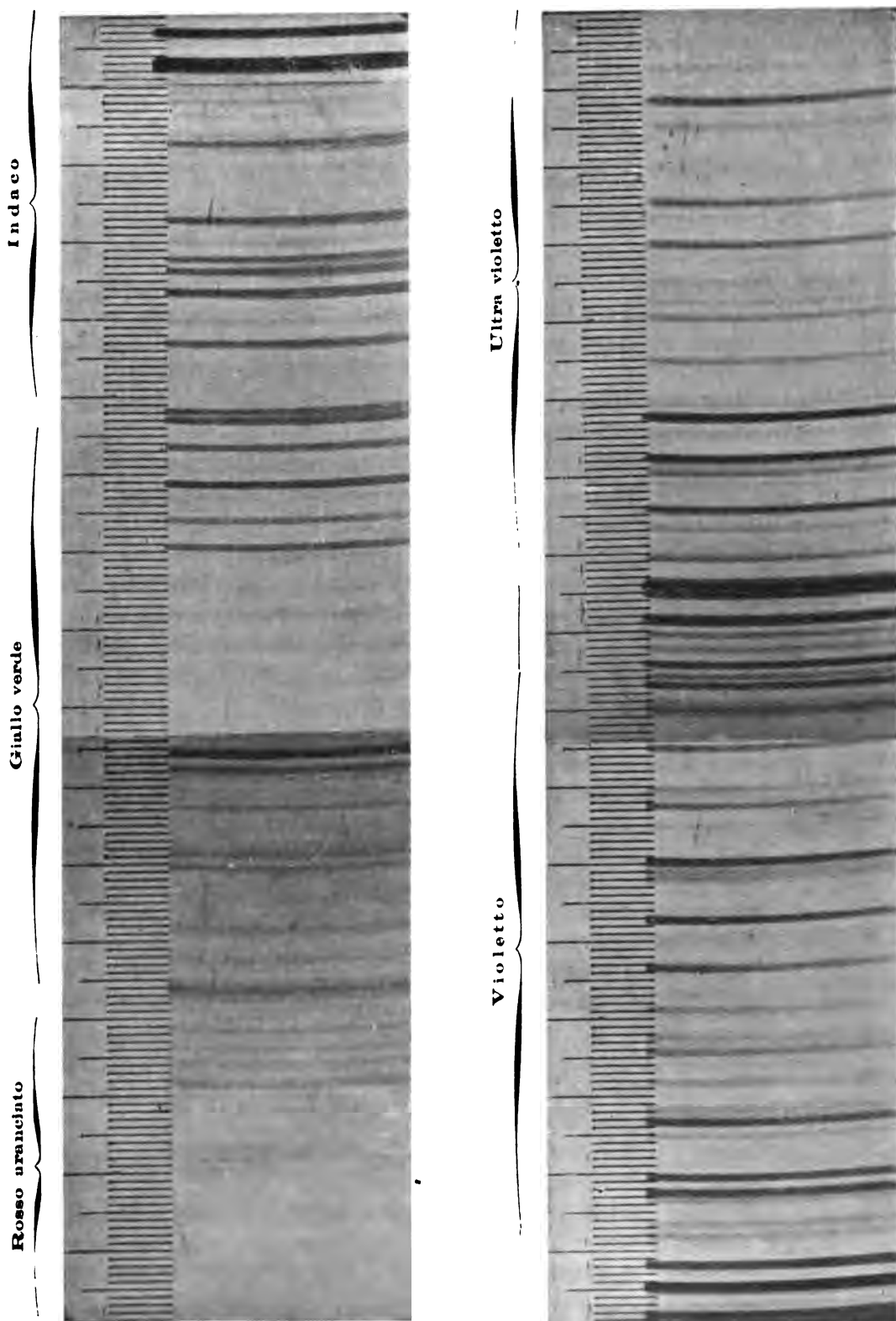
…	GROTTA DEL CANE Spettro						ACQUE ALBULE DI TIVOLI Spettro				BULICAME DI VITERBO Spettro				PERGINE Spettro				SALSOMAGGIORE Spettro			
	I		II		III																	
i	rosso λ (L)	i	rosso λ (M)	i	azzurro λ (N)	i	rosso λ (O)	i	azzurro λ (P)	i	rosso λ (Q)	i	azzurro λ (R)	i	rosso λ (S)	i	azzurro λ (T)	i	rosso λ (U)	i	azzurro λ (V)	i
	—		—		408.3	1	—		—		—		—		—		408.3	2	—		408.3	2
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		407.6	1
2	—		—		406.4	1	—		—		—		—		—		406.4	3	—		407.2	1
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		405.3	2	—		—		—		—		—		405.3	2	—		—	
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
1	—		* 404.2	1	* 404.2	1	—		—		404.2	1	—		—		404.2	1	404.2	1	404.2	1
	—		—		—		—		—		403.7	1	—		—		—		—		404.3	1
1	—		—		401.1	2	—		—		—		—		—		—		—		401.1	1
	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		397.2		—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		banda	1	—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—				—		—		—		—		—		—		—		—	
	—		—		395.7		—		—		—		—		—		—		—		—	

Spettro Rosso

Gas del Vesuvio.

Tabella III.

Spettro Rosso
Ultra rosso-rosso
Giallo verde
Indaco
Violetto
Acque Albule di Tivoli
Bulicame di Viterbo
Grotta del Cane
Emanazioni di Pergine
Argo dell'atmosfera

Spettro Azzurro

Fumarola acida dopo il 1° assorbimento.

Facciamo seguire la descrizione di alcuni apparecchi che ci hanno servito nelle nostre ricerche e la cui conoscenza può essere utile a chiunque si vuole occupare dello studio dei gas. Spetta esclusivamente al prof. F. Anderlini di avere immaginato e costruito questi apparecchi.

Pompe a mercurio a caricamento automatico.

I. *Pompa ad una caduta* (Tav. I).

La pompa a mercurio che sotto viene descritta è a caricamento automatico ed è stata ideata e studiata con lo scopo di renderla anche di facile montatura e smontatura per poterla pulire, e di escludere ogni congiunzione con mastice o gomma elastica.

Dalla figura e dalla descrizione risulta che per raggiungere lo scopo al quale è destinato l'apparato è necessario che la sua costruzione sia accuratissima, in modo speciale nelle smerigliature, ma in compenso si può ottenere il massimo vuoto possibile e una tenuta per un tempo indefinito.

La pompa rappresentata dalla fig. I, tav. I è relativamente complicata, ma è da notarsi che così disposta è destinata in modo speciale al caricamento dei gas nei tubi di Geissler o per fare il vuoto in quelli di Crookes ed anche misurare le minime pressioni: si comprende quindi che alcuni accessorî si possono sopprimere quando di essi non si presenti il bisogno, come pure il caricamento automatico: nel qual caso differirebbe dalle altre solo nel sistema di eliminazione dell'aria dal mercurio ed in quello delle congiunzioni.

Come al solito, la pompa è costituita da un tubo di caduta di un diametro interno non superiore a 1,5 mm., della lunghezza di circa m. 1,60-1,80, il quale superiormente porta una bolla piriforme sormontata da una strozzatura unica allungata che finisce in un bicchierino *b*. Lateralmente dalla pera si stacca una tubulatura *c* resa conica nella parte diritta e verticale che finisce pure in un bicchierino. Il tubo *d* della lunghezza non inferiore a 80 cm. conduce il mercurio alla pompa, esso ha un diametro di circa 2 mm. internamente, entra attraverso il bicchierino *c*, aderisce con buona smerigliatura nel prolungamento conico e sbocca qualche millimetro al disopra del vertice della bolla piriforme *a*. Questo stesso tubo mette capo in uno dei depuratori *e* descritto più avanti. Nella fig. *g*, rappresenta due tubi abbinati contenenti anidride fosforica prima scaldata al rosso in corrente d'aria. Anche qui le congiunzioni si ottengono per aderenza fra i pezzi smerigliati. In tutti i bicchierini si versa uno strato di mercurio il quale ha il doppio uffizio di mantenere una chiusura perfetta e di rendere avvertiti, se vi sono perdite, quando si pratica il vuoto.

Il caricamento automatico del mercurio si ottiene mediante il tubo G a grosse pareti del diametro interno di 2-2,5 mm., esso giunge superiormente fino al distributore B, inferiormente entra in H in cui si trova una valvola di vetro vuota, di forma conica, smerigliata in modo da farla bene aderire alla rispettiva capsula. L'asta G porta in *i* una tubulatura che serve a congiungerla col regolatore dell'aria E

nel quale mediante una vite si può facilmente determinare il regime dell'entrata dell'aria. L'aria deve prima asciugarsi passando per la bolla p'' contenente cloruro di calcio allo scopo di mantenere il mercurio secco e nel tempo stesso impedire l'entrata della polvere. Il mercurio si fa salire fino al distributore B aspirando mediante una pompa ad acqua, la quale deve determinare una depressione di 60-70 cm. di mercurio in sulle prime, ma che deve poterne mantenere una di 40-50 cm. durante il funzionamento, in modo continuo. Per far agire l'apparecchio, si mette in azione la pompa ad acqua, il mercurio viene aspirato, arrivando alla valvola dal serbatoio F, fin sopra la tubulatura i, qualora si tenga chiuso prima colla vite il regolatore E; se allora si apre, entra dell'aria e quando la pressione di questa è sufficiente, la colonna di mercurio si spezza in i e viene spinta in su fino al punto di versamento in B, mentre la valvola H impedisce che la spinta si propaghi al mercurio del serbatoio F, rendendo in tal modo assai regolare l'andamento della colonna ascendente del mercurio. Dal distributore il mercurio passa attraverso i due depuratori dell'aria f, e poi nella pompa. L è un pallone contenente del cloruro di calcio per trattenere l'umidità, mentre il tubo N serve a fornire la forza ascensionale al mercurio, determinata dalla pressione atmosferica, per farlo salire fino alla curvatura superiore del tubo d. Come ben si comprende il regime regolare viene determinato per il caricamento mediante l'asta G dal regolatore E e quello della pompa mediante il morsetto V applicato al tubo di gomma che serva a far comunicare i due depuratori f ed e. Il mercurio che discende dall'asta z entra attraverso la tubulatura m' del serbatoio F; questa tubulatura si prolunga nell'interno ed è curvata in modo da giungere sotto la tubulatura centrale m e può uscire per la m'' e portarsi alla valvola H.

Anche con questa si può impiegare una vaschetta (r) le cui dimensioni possono però venire molto ridotte, quando si voglia raccogliere dei gas in una campanella, come viene rappresentata dalla figura. Il serbatoio F può avere una capacità di circa 60 cc. che è sufficiente per applicarvi la vaschetta e nel caso si voglia sopprimerlo, deve essere sostituito con un semplice tubo stretto con una tubulatura un po' più alta della valvola e che termini in una grossa bolla. Questa disposizione si rende necessaria per il funzionamento del caricatore.

Gli accessorî rappresentati nella figura sono l'apparecchio di Mac Leod, ben noto, e l'apparato di depurazione e disseccamento formato dai due tubi abbinati g contenenti anidride fosforica sopraccennati. A questi fa seguito un tubo piegato a serpentino K e il manometro a mercurio I. Il tubo a serpentino contiene nella parte superiore del rame granulato ridotto dall'ossido con alcole metilico, sopra il rame dell'argento ridotto mescolato a cloruro fuso, allo scopo questo di trattenere i vapori di mercurio, ma sopratutto l'argento è destinato a fissare le traccie di composti fosforati che l'anidride fosforica potesse emanare. Un buon terzo circa è occupato da solfo fuso nel vuoto e poi granulato sotto il quale, separato da pezzetti di vetro, si trova nuovamente del rame granulato per un po' meno della metà della lunghezza del tubo, allo scopo di trattenere i vapori di solfo. È a questo serpentino che si possono saldare i tubi di Geissler.

Per far agire la pompa si incomincia dal fare il vuoto mediante la pompa a vuoto torricelliano A, colla quale si può in breve tempo ottenere un vuoto fino ad

uno o due mm. di mercurio; dopo ciò si mette in azione la pompa mediante il caricatore fino a raggiungere il vuoto voluto.

Per caricare l'apparecchio di mercurio si incomincia coll'introdurre il mercurio nel serbatoio F e nei due depuratori *f* ed *e*, avendo la massima cura di evitare che rimangano delle bolle d'aria in *e*, si stringe il morsetto *v* e si riempie pure la ingrossatura del tubo N. Siccome è necessario di allontanare più che sia possibile l'aria che aderisce alle pareti del tubo *d*, così conviene praticare un buon vuoto colla pompa torricelliana A, e, quando questo è raggiunto, aprire cautamente il morsetto *v* per dare passaggio al mercurio facendolo salire lentamente nel tubo *d*.

Nella fig. IV è rappresentato il sistema ingrandito di depuratori dell'aria dal mercurio che proviene dal distributore B (fig. I) e che fu applicato anche alle altre pompe che verranno in seguito descritte. Nel disegno le dimensioni sono di circa metà delle naturali. Il mercurio che discende dal distributore arriva in *f'* nella parte superiore, per cui se qualche bollicina di aria viene trascinata dal liquido essa rimane nella parte superiore, mentre nella bolla piriforme *e* il mercurio giunge dal basso ed è costretto a seguire il cammino segnato dalle frecce, di guisa che deve entrare dall'alto della provetta *w* per uscire ascendendo nel tubo *d* il quale giunge colla estremità inferiore fino quasi al fondo di detta provetta e sbocca nella pompa *a-z* colla parte superiore. L'efficacia di questo sistema venne dimostrata dall'esperienza, perchè una pompa in tal modo disposta e che ha funzionato lungamente durante due anni ha permesso di verificare che nessuna bolla di aria passa nemmeno in *e*.

La fig. V rappresenta in grandezza presso a poco naturale una delle tre bolle di depurazione *y* applicate al misuratore delle piccole pressioni D. In questo caso il mercurio giungendo dal basso all'alto tutte e tre le bolle sono egualmente costruite e unite mediante aderenze smerigliate. Questa disposizione permette di poter con facilità espellere del gas, o aria, che in esse fosse penetrata, mentre riesce invece assai difficile ciò nelle bolle che hanno saldati autogenicamente in opposizione i due tubi interni. In questo apparecchio è assolutamente necessario di evitare che entri anche la più piccola bolla d'aria.

II. *Pompa a mercurio a caduta multipla ed a caricamento automatico* (Tav. I).

Il sistema di caricamento automatico è identico a quello descritto per la pompa ad una sola caduta, salvo che in questa (fig. II) sono due invece le colonne ascendenti e due le valvole, mentre il mercurio viene aspirato dallo stesso serbatoio E. Il vuoto viene determinato da tre colonne discendenti *a*, *a'*, *a''*, fig. II, congiunte con inserzioni a smerigliatura al distributore C; il quale come si vede dalla figura, è costituito di un tubo nel cui interno vi sono disposti, in modo da formare un tridente, tre tubetti che sboccano un poco al di sopra di tre tubulature sulle quali si inseriscono nel modo già descritto per la pompa precedente, le tre aste, formate di tubi del diametro interno di circa 1,5 mm. Al distributore A fanno capo due colonne ascendenti B, B' le quali finiscono in basso con due valvole *b*, *b'*, mentre l'aspirazione del mercurio viene effettuata dall'unico serbatoio E nel quale il metallo arriva

dalle tre colonne di caduta sopraindicate. Questo serbatoio può essere facilmente modificato, qualora si desideri raccogliere del gas, disponendo le tre tubulature orizzontalmente e facendo penetrare tre pezzi di tubo di vetro opportunamente piegati in modo che sbocchino sotto una tubulatura centrale la quale sopporta una bacinella come nelle figg. I e II e sostituisce il bicchierino *f* (fig. II) necessario per la trasmissione della pressione al mercurio per la sua ascesa nelle colonne B, B'.

Il robinetto *G* a tre vie serve a stabilire la comunicazione fra la pompa ad acqua e quella a mercurio per ottenere un primo vuoto e successivamente col caricatore. Con F è rappresentato un barometro, mentre con D viene rappresentato un tubo a serpentino, che l'esperienza dimostrò assai utile, qualora si vogliano distillare dei liquidi volatili i cui vapori si condensano nel serpentino e così raccogliere il liquido in una bottiglia tubulata fissata alla estremità inferiore del serpentino. Un effetto maggiore si ottiene naturalmente introducendo il serpentino in un adatto manicotto e impiegando un mezzo refrigerante.

Un sistema di congiunzione il quale può sostituire la smerigliatura, come in quella rappresentata nella fig. I, ed è di facile esecuzione, consiste nel congiungere i due pezzi con un tubo di gomma e poi immergere per intiero detto tubo di gomma nel mercurio. Questo sistema, benchè già noto da tempo, merita forse qualche cenno. Si costruisce un bicchierino con tubo di vetro di diametro conveniente, vi si applica un turacciolo ad un foro pel quale passa il pezzo di vetro inferiore facendolo sporgere qualche centimetro dal bordo superiore del bicchierino. I due tubi di vetro da unirsi vengono congiunti con un pezzo di gomma, poi si fa scorrere il turacciolo finchè il labbro superiore del bicchierino oltrepassi di 1,5-2 cent. il tubo di gomma e si versa in detto bicchierino del mercurio. Se il tubo di gomma aderisce sufficientemente, si ottiene in tal modo una chiusura perfetta che può durare lunghissimo tempo. Un altro vantaggio è quello di ottenere apparecchi non rigidi e di facile smontatura. Ciò si può fare in tutti quei casi nei quali non si abbiano a temere le emanazioni della gomma elastica; la quale è ben noto che ne dà sempre, specialmente se nuova.

III. *Pompa per l'estrazione e trasporto di gas* (Tav. I).

La fig. III rappresenta un apparecchio che funziona da qualche anno in questo Istituto, salvo qualche modificazione suggerita dall'esperienza, introdotta in quello ora proposto e rappresentato dalla fig. III.

Il sistema di pompa a mercurio non differisce dalle precedenti che por qualche dettaglio; così pure il sistema di caricamento è identico, come del resto si può facilmente rilevare dalla figura.

Le diverse parti di questo apparecchio sono disposte su due piani verticali, così la pompa C*d*, il barometro F, il sistema di caricamento automatico DG e quindi anche i due depuratori dell'aria *f*, *e* si trovano sul piano posteriore, ed essendo già stati descritti precedentemente su essi è inutile spendere parole.

Sul piano anteriore giace il gasometro B munito inferiormente di un rubinetto a foro largo 4-5 mm. sotto il quale si prolunga una campanella che fa corpo con

tutto il resto. Superiormente trovasi un robinetto a tre vie con comunicazioni inferiore e laterali che mettono capo a due braccia orizzontali. Su questo stesso piano si trova la pompa torricelliana A munita superiormente di robinetto e alla base dell'ovoide comunica colla pompa ad acqua, con quella a mercurio e col robinetto a tre vie *g* del gasometro B.

Nel caso che si desideri praticare il vuoto esso può essere portato a quello che dà la pompa ad acqua in sulle prime, poi si fa agire la pompa a vuoto torricelliano mediante la quale si può giungere a 1-2 mm. di mercurio. Lo sfogo della pompa torricelliana avviene per mezzo del robinetto *l* che stabilisce la comunicazione colla pompa ad acqua; la quale si fa agire durante l'operazione per facilitare la espulsione dell'aria. Naturalmente prima di alzare il serbatoio di mercurio K si devono chiudere i tre robinetti *g*, *l*, *l'*, *h* e aprirli invece quando lo si abbassa per aspirare l'aria o il gas mentre deve tenersi chiuso *l*.

Il vuoto può esser completato colla pompa e mercurio stabilendo le comunicazioni necessarie come del resto facilmente si può comprendere anche dalla figura.

Quando si abbia da sviluppare e raccogliere un gas si congiunge l'apparecchio col robinetto *h'* mentre l'altro *h* si può congiungere con un pallone in cui sia stato praticato il vuoto oppure con un gasometro qualsiasi.

Il gas che si sviluppa dall'apparecchio annesso alla pompa entra attraverso il robinetto *h'* attraversa pure *g* e si può far passare nel pallone o nel gasometro sopraccennati. Se invece il gas si deve raccogliere nel gasometro B si fa girare la punta mobile attaccata alla estremità inferiore della colonna di caduta *d* mediante un pezzo di gomma a grosse pareti e piccolo foro, facendola sboccare sotto la campanella B' ove il gas arriva sia perchè possiede una pressione sufficiente sia per azione della pompa a mercurio; dalla campanella B' si può farlo passare nel gasometro soprastante aprendo il robinetto *i* e dal gasometro si può spostare poi facilmente mediante il mercurio contenuto nel serbatoio L.

Come ben si comprende con questo apparato si possono effettuare spostamenti di gas in tutti i sensi. Si potrebbe far circolare da destra a sinistra o viceversa aggiungendo a sinistra un gasometro di trasporto sussidiario F, frequentemente usato in questo laboratorio, rappresentato nella tav. IV la quale sembra abbastanza dimostrativa per sè e perciò riesce inutile una descrizione dettagliata. Si può rendere questo gasometro ancora più semplice sostituendo due tubi che si biforcano superiormente e muniti di due pezzi di tubo di gomma a grosse pareti e fare la chiusura per mezzo di due morsetti. Però con questo mezzo è ben difficile ottenere una chiusura perfetta come coi robinetti, nondimeno può servire nel maggior numero dei casi.

Essendo mobile la estremità inferiore della colonna *d* di caduta, si può quindi facilmente spostare e perciò farla sboccare sotto una campanella situata nella vaschetta N. In questo modo si possono separare delle frazioni di gas per analisi od altro scopo.

Il sostegno di questa e delle pompe precedentemente descritte si trovò molto comodo di farlo costruire in maniera da poter montare i diversi organi a giorno; per la qual cosa riescono molto facili le giunzioni e gli eventuali distacchi. Il vantaggio di questo sistema di montatura si presenta in modo speciale in quei casi nei quali

si abbiano a fare delle saldature autogeniche, sempre preferibili, ove non si rendano necessari dei distacchi di organi o si abbia a temere pericoli di rottura per cause di eccessiva rigidità.

Apparato per la distillazione del mercurio nel vuoto (Tav. II).

Il dott. A. Rossi pubblicò (1) la descrizione di un suo apparato permanente per la distillazione del mercurio nel vuoto a funzionamento automatico, il quale apparato unisce i vantaggi di non richiedere l'uso continuato di una pompa, e di essere sempre pronto una volta caricato.

Uno di tali apparecchi fu costruito in questo Istituto dietro le indicazioni e consigli del suo autore, e invero esso corrispose benissimo. Nondimeno l'esperienza fattane dimostrò che si poteva recarvi qualche utile modificazione; l'autore stesso ne convenne, e cortesemente acconsentì che fossero rese pubbliche.

Dal disegno apparisce subito che il principio e l'insieme rimangono disposti come nell'apparato del dott. Rossi e le modificazioni più sostanziali consistono nella sostituzione di una parte del tubo capillare interno che termina in alto con un imbutino, con uno a lume largo, separato *s* (fig. 1) del diametro 10-11 mm. che termina inferiormente in un prolungamento conico fino a raggiungere 1,5-2 mm. di diametro, mentre superiormente giunge fino sotto la strozzatura che separa la bolla terminale *a*. Questo tubo viene messo a posto infilandolo in un turacciolo al di sopra della porzione conica, in modo che questa possa sporgere un tratto sufficiente e quindi il turacciolo fissato al serbatoio H. La porzione conica sporgente entra nel bicchierino *f* e aderisce alla strozzatura sottostante smerigliata e giunge fin presso al vertice della piccola pera *f'*, la quale si prolunga coll'asta *s* del diametro interno non superiore a 1,5 mm. Il lungo collo del pallone B giunge fin presso il turacciolo del serbatoio H e deve sboccare sotto la tubulatura *r*, che immette il mercurio nel serbatoio H, per evitare che qualche bolla d'aria non penetri nel pallone.

Il robinetto *g* serve a far montare il mercurio, mediante una pompa, tanto nel pallone di rifornimento quanto nell'asta *s* allorquando si vuole mettere in azione l'apparato dopo aver introdotto naturalmente del mercurio tanto nel serbatoio H che in quello O collocato all'estremità inferiore dell'asta *s*. Le figg. II e III a circa metà della grandezza naturale sono ingrandimenti delle parti sopra descritte.

Il rifornimento del mercurio da distillare viene effettuato generalmente mediante un pallone capovolto sopra una vaschetta tubulata, come nell'apparecchio di Karsten; però tale disposizione presenta l'inconveniente, che il mercurio discende con violenza dal pallone e in quantità eccessiva per modo che il livello nel pallone a distillazione ascende pure con rapidità e mette in pericolo di rottura lo stesso pallone. Si evita questo inconveniente, almeno in parte, dando una larga superficie alle vaschette rendendo però inerte una notevole quantità di mercurio.

(1) Nuovo Cimento, ser. 4ª, v. VIII, 1898.

Il sistema che qui viene proposto ovvia alla maggior parte degli inconvenienti, però richiede una certa cura, per parte del costruttore, nella scelta dei tubi i cui diametri, non dovranno di molto scostarsi da quelli indicati in appresso.

Il mercurio da distillare viene fornito dal pallone K della capacità di 700-800 cc. in cui si versa per la imboccatura superiore chiudibile con turacciolo ben smerigliato *t* mentre si tiene chiuso il rubinetto inferiore *w*. Sotto il turacciolo *l* si trova una tubulatura che congiunge il tubo *g* mediante un tubo di gomma un po' più lungo del necessario per lasciare una certa libertà di movimento al tubo *g*. Il tubo *g* inferiormente può essere tagliato a becco di clarinetto, oppure avere un foro laterale elittico *t* di circa 3 mm. di diametro in senso trasversale e di 5-6 mm. nell'asse maggiore; mentre il suo diametro non dovrà essere inferiore a 7-8 mm. In quanto alla lunghezza totale, computandola dal punto di sbocco inferiore, è bene che non superi i 25 cent.; e per conseguenza deve conformarsi su tale misura anche il prolungamento inferiore al robinetto *w* del pallone K per modo da non sporgere meno di 15 mm. dal punto di sbocco del tubo *g*, il quale però essendo mobile permette, volendo, di aumentare tale distanza. Quando le cose sono bene regolate il mercurio discende dal pallone attraverso il suo robinetto senza scosse mentre l'aria che lo rimpiazza entra per l'apertura *t* talvolta a bolle regolari, più spesso però con salti bruschi, ma sempre in quantità limitata per modo che il livello del liquido nel serbatoio I si alza lentamente e per un piccolo tratto e per conseguenza anche nel pallone da distillazione.

Tutto il sistema è stato studiato in modo da immobilizzare la minore quantità possibile di mercurio, di cui ne deve rimanere una parte costantemente nell'apparecchio, volendolo avere sempre pronto a funzionare, perciò furono ridotte molto le dimensioni della vaschetta di rifornimento e quella ove pesca il pallone da distillazioni; e a questo intento contribuisce pure il lungo collo di detto pallone il cui diametro basta che sia superiore di 4-5 mm. a quello del tubo interno *s*.

Nel disegno l'apparecchio figura montato su sostegno di ferro, però può essere montato su sostegno di legno, nel qual caso è sempre comodo venga fatto a giorno come nelle pompe.

Apparato per l'assorbimento dell'azoto (Tav. III).

Qualunque sia il gas naturale impiegato nelle ricerche nostre, era sempre lo stesso obbiettivo a cui si tendeva, liberare, cioè, l'azoto o ciò che viene considerato azoto, da altri corpi gasosi, idrocarburi o acido carbonico, per poi passare alla seconda fase delle esperienze, che è l'assorbimento dell'azoto e separazione dell'ultimo residuo da esaminare allo spettroscopio, procedendo nel modo descritto qui appresso.

Il gas raccolto nel pallone D non contiene ossigeno, se il rame contenuto nei tubi di ferro fu sufficiente, in ogni modo è formato dal residuo di azoto ed altri gas. Per eliminare anche l'azoto serve in gran parte lo stesso apparato con le necessarie modificazioni nel dispositivo. Nel caso che il tubo attaccato alla pompa contenga ancora del rame inalterato si può lasciare a posto. Nel caso poi che tutto il rame

sia allo stato metallico, è opportuno ossidare una porzione verso la parte opposta all'attacco alla pompa passando dell'aria e scaldando il tubo al rosso.

L'altro tubo viene sostituito con uno simile contenente un miscuglio di magnesio e calce secondo suggerisce Ramsay. Questo miscuglio riesce assai più officace del magnesio solo, la reazione può essere iniziata ad una temperatura relativamente bassa (rosso-scuro) e prosegue spontaneamente se l'afflusso del gas è un po' abbondante con sviluppo di calore intenso. La sola avvertenza che si deve avere è quella di eliminare l'umidità dal miscuglio, perchè l'azione del magnesio sull'acqua dà dell' idrogeno, il quale può riescire pericoloso quando si fanno gli ultimi assorbimenti colla scintilla nel solito pallone e inoltre ritarda l'assorbimento dell'azoto da parte del miscuglio di magnesio e calce in modo notevole, se la quantità di idrogeno è un po' rilevante, in guisa da rendere necessaria una temperatura molto più alta del tubo col miscuglio.

L'apparecchio che servì per eseguire l'assorbimento dell' azoto per mezzo del magnesio è rappresentato nella tav. III. Come ben si vede dalla figura, uno dei tubi di ferro con rame viene sostituito con un altro tubo di ferro simile al precedente; se la quantità di gas è rilevante, in questo, come sopra si disse, è contenuto il miscuglio di magnesio e calce; si può invece impiegarne uno di vetro, se il volume del gas è limitato. Per procedere all' assorbimento si pratica il vuoto in tutto il sistema tenendo abbassati tutti i serbatoi a mercurio affinchè questo venga aspirato e sostituisca l'aria espulsa dalla pompa, però prima di far circolare l'azoto abbiamo trovato sempre indispensabile di scaldare il miscuglio di calce e magnesio finchè cessava ogni sviluppo di idrogeno, che si svolge per la reazione sopradetta, eliminandolo di mano in mano mediante la pompa.

Quando il vuoto è fatto in via definitiva, si fa passare il gas dal pallone D nel gasometro H e da questo nel tubo a calce-magnesio per raccogliere ciò che rimane non assorbito nel gasometro K. Come facilmente si può comprendere dalla figura il trasporto del gas si effettua facilmente per mezzo del gasometro H, e nel caso si tratti di piccole quantità di gas o interessi utilizzare anche le ultime frazioni che rimangono nel pallone, si può far uso della pompa e del gasometro E, ad essa annesso, che può anche servire a misurare il volume totale del gas se questo organo dell'apparato è graduato. Quando tutto il gas sia stato aspirato dal pallone D si fa circolare sul magnesio passandolo dal gasometro H in K fin che ciò è possibile. È frequente il caso che traccie di acqua vengano decomposte dal magnesio con sviluppo di idrogeno, che come sopra si disse è necessario eliminare, ciò che si ottiene facendo passare il gas per ultimo nel gasometro della pompa E attraverso il tubo con rame di cui una parte, verso il gasometro H, è stata ossidata fin dal principio dell'esperienza e che si scalda al rosso quando il gas si fa ritornare indietro per un ultimo travaso nel piccolo gasometro L per mezzo del gasometro di trasporto H. Se il volume del residuo non è eccessivamente esiguo, ma invece sia tale da poterlo far circolare, si giunge all'assorbimento completo dell'azoto per modo da poterlo far passare tale e quale dal gasometro L nei tubi di Geissler. Con questo apparecchio ci riescì possibile di concentrare 100 cc. di gas fino a 8 circa che collo scintillamento fu poi ridotto a 2 circa. In un'altra esperienza 25 cc. di gas concentrato collo scin-

tillamento non perdettero che 3-4 cc., mentre in una terza un residuo di circa 30 cc. non conteneva che traccie di azoto sensibili allo spettroscopio.

Apparato per la combustione degli idrocarburi (Tav. IV).

In altra Memoria [1] abbiamo esposto come l'operazione della combustione di grandi volumi d'idrocarburi gasosi naturali per mezzo dell'ossido di rame riesca assai lunga e non sia completa che dopo un lento e prolungato passaggio, più volte ripetuto dello stesso gas sull'ossido metallico. Così pure il metodo di combustione per esplosioni riesce lungo e penoso, quantunque per volumi imitati sia ancora quello che abbiamo trovato il più opportuno. Alcune esperienze eseguite allo scopo di rendere meno lunghe e anche meno dispendiose le esperienze di questo genere ci permisero di stabilire che la via migliore è la combustione mediante l'ossigeno [2] eseguita in un conveniente apparecchio. Quello da noi impiegato venne raffigurato nello schizzo che accompagna la presente Memoria.

Disgraziatamente non è in modo assoluto esente da qualche menda nei riguardi della incolumità dell'operatore, il quale potrebbe andare soggetto a degli inconvenienti, non gravi, in causa di eventuali esplosioni qualora l'esperienza non fosse condotta con una certa sagacia.

L'apparato è costituito di un pallone B della capacità di circa quattro litri con due tubulature opposte lungo uno dei diametri e il cui collo ha una imboccatura di circa 45 mm. alla quale si adatta un turacciolo di gomma a tre fori, attraverso uno dei quali passa un cannello ossidrico *a*, e per gli altri, due tubi di vetro nel cui interno corrono due fili metallici che si prolungano all'esterno in due fili di platino saldati nel vetro che vanno nell'interno del pallone, mentre le estremità esterne portano due occhielli di platino pure sigillati al vetro.

Si fa in modo che i due poli di platino vengano a trovarsi di fronte allo sbocco del cannello ad una distanza di circa 4 cent. in guisa che facendo scoccare la scintilla possa venire determinata l'accensione del gas.

Il pallone è messo in comunicazione con una bottiglia di lavaggio *c* a cui fu data la forma indicata dal disegno per impedire la retrocessione eventuale del liquido fino al pallone. In detta bottiglia è contenuta potassa al 50 °/₀ circa ed è seguita da un tubo a bolle lungo 80 cent. contenente nelle bolle potassa solida e successivamente calce sodata. Fanno seguito due tubi di ferro e, e^1 a largo diametro contenenti rame metallico in fili, collocati su due fornelli da combustioni, congiunti fra di loro e messi in comunicazione da una parte col tubo a potassa e calce sodata, dall'altra con una piccola bottiglia di lavaggio con acido solforico, che serve da indicatore.

La pompa P, automatica, serve, oltre che a produrre il vuoto nel sistema, a far passare tutto il gas residuo nel pallone D destinato a raccoglierlo. I due appa-

[1] Atti Acc. Lincei, vol. II, 1897.

[2] Si dovette rinunziare all'ossigeno compresso che trovasi in commercio perchè conteneva circa il 3 p. °/₀ di azoto e impiegare dell'ossigeno puro preparato espressamente e contenuto in un gasometro.

recchi E, F, annessi alla pompa, furono già descritti in altra Memoria e servono a trasportare il gas nel pallone D o ad estrarlo.

Il pallone A contiene il gas da bruciare, che viene spostato e posto sotto pressione da una caduta di acqua proveniente dalla bottiglia C collocata sopra un sostegno ad altezza conveniente. Il pallone è chiuso da un turacciolo a due fori attraverso i quali passono due tubi; uno giunge fino al fondo e per esso discende l'acqua della bottiglia C, l'altro sbocca appena sotto il turacciolo e viene messo in comunicazione colla tubulatura laterale del cannello ossidrico *a*, mentre l'altra tubulatura di detto cannello comunica con un gasometro pieno d'ossigeno puro.

Per procedere nell'esperienza si comincia a praticare il vuoto in tutto intero il sistema prima colla pompa ad acqua, poi facendo funzionare quella a mercurio.

Si elimina tutta l'aria facendo entrare un po' di ossigeno e dopo una prima espulsione di questo, si fanno altre introduzioni seguite da nuova espulsione finchè anche le ultime traccie d'aria vengano eliminate.

Ciò fatto si chiude la comunicazione fra la bottiglia di lavaggio *c* e il resto dell'apparato mediante un morsetto, si lascia entrare ossigeno nel pallone fino a riempimento e si fa scoccare la scentilla fra i poli di platino senza interruzione.

A questo punto si apre cautamente il rubinetto che intercetta la comunicazione col pallone A contenente il gas da bruciare, il quale si accende all'uscita. Se allora si dà adito anche all'ossigeno, regolando opportunamente il passaggio dei due gas si ottiene la solita fiamma sottile ed allungata che continua ad ardere finchè le condizioni di pressione, ma sopratutto la quantità di anidride carbonica che si forma non impedisce la combustione.

Una volta avviata la combustione si schiude la comunicazione *h* della bottiglia di lavaggio *c* in modo da non abbassare troppo la pressione nel pallone tubulato ove avviene la combustione, essendo vuoto tutto il resto dell'apparato.

Come sopra è stato detto, la combustione viene arrestata dall'accumularsi dell'anidride carbonica nel pallone ove si compie e perciò conviene diminuirla quanto più è possibile.

A tale uopo si introduce mediante il tubo *g* una corrente d'ossigeno che giunge da un secondo gasometro.

La difficoltà di intrattenere una combustione continua e regolare sta nel mantenere un regime opportuno fra le correnti gasose di entrata e di uscita; se questo si raggiunge si possono in breve tempo bruciare completamente circa otto litri di gas all'ora almeno.

Nel caso che la fiamma nel pallone si spenga è necessario chiudere immediatamente la conduttura del gas combustibile, far passare avanti il gas che si trova nel pallone da combustione e riempiere nuovamente questo con ossigeno per ristabilire le condizioni come al punto di partenza. Questo partito è suggerito dalla prudenza nel dubbio che possa esservi del gas combustile non bruciato e quindi per evitare esplosioni che non sono prive di un certo pericolo.

pa ad acqua
D
h'
F
G
e

Fig. I

D
L

C
D
ossigeno

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIII. (1892-1904).
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII. (1892-1904). Fasc. 1°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCI

SERIE QUINTA — VOLUME V — FASCICOLO III.

ANGELO ANGELI

RICERCHE

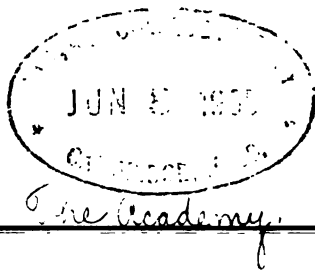
SOPRA

ALCUNI COMPOSTI DELL'AZOTO

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

Ricerche sopra alcuni composti dell'Azoto (1).

Memoria del Corrispondente Prof. ANGELO ANGELI

letta nella seduta del 4 dicembre 1904.

Nella presente Memoria ho cercato di riassumere ed ordinare i risultati di alcune ricerche, eseguite in gran parte da me e dal prof. Angelico, che dal 1896 furono pubblicati mediante Note inserite in periodici scientifici ed Atti di Accademie.

Tali ricerche riguardano principalmente il comportamento dei veri nitroderivati rispetto all'idrossilammina e lo studio dei prodotti che per tale mezzo si possono agevolmente preparare. I nitroderivati aromatici reagiscono in modo analogo ai composti carbonilici. Altrettanto fanno gli eteri dell'acido nitrico ed in questo caso si arriva ai sali di un nuovo acido dell'azoto che può venir considerato come l'ossima dell'acido nitrico. Questi sali possono a loro volta subire trasformazioni svariate e numerose, fra cui è degna di nota una scissione nella quale molto probabilmente si libera la biossiammoniaca. In causa della grande facilità con cui questa sostanza si altera, finora non ci fu possibile di ottenerla allo stato libero, ma le nuove reazioni hanno egualmente permesso di studiarne il comportamento e di paragonarlo con quello dell'ammoniaca e degli altri suoi prodotti di ossidazione, l'idrossilammina e l'acido nitroso.

Queste trasformazioni sono di indole generale e possono servire a caratterizzare alcune classi di composti organici.

Invece che complete, come ognuno vedrà, queste ricerche si devono pur troppo considerare come soltanto iniziate; ma ciò dipende dalle difficoltà sperimentali che si dovettero superare e sopratutto dalle misere condizioni di questo Laboratorio e dalla deficienza veramente deplorevole dei mezzi di cui è dotato.

(1) Lavori eseguiti nel Laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

I.

Azione dell'idrossilammina sopra i nitroderivati.

L'idrossilammina reagisce sopra i nitroderivati terziarî come sopra le aldeidi ed i chetoni: si elimina una molecola di acqua con formazione di sostanze che al posto di un atomo di ossigeno del residuo nitrico, ontengono il gruppo NOH. La reazione procede naturalmente in modo diverso quando si impieghino i nitroderivati primarî e secondarî, giacchè questi composti, in presenza di alcali si trasformano negli isomeri acidi nitronici:

$$R\cdot CH_2\cdot NO_2 \longrightarrow R\cdot CH{:}NOOH.$$

Per le esperienze vennero impiegati nitroderivati aromatici e gli eteri dell'acido nitrico.

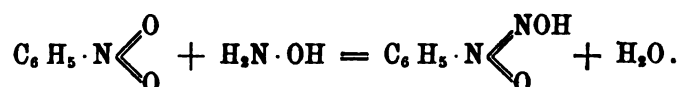
A) Nitroderivati aromatici [1].

1. *Nitrobenzolo.* — Una soluzione di sodio (due atomi) nell'alcool assolnto venne trattata con una soluzione, pure alcoolica, di cloridrato di idrossilammina (una molecola); si separa per filtrazione alla pompa il cloruro sodico formatosi ed al liquido limpido si aggiunge una molecola di nitrobenzolo. Poco per volta dalla soluzione vanno separandosi cristalli splendenti che dopo circa 24 ore (più rapidamente a caldo) fanno rapprendere il tutto in una massa cristallina semisolida. Il prodotto viene raccolto sopra un filtro e lavato ripetutamente con alcool ed etere.

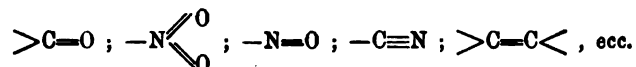
Acidificando con cautela la soluzione acquosa e fortemente raffreddata del sale così ottenuto, per mezzo di acido cloridrico diluito, fino a che le carte di tropeolina accennano a colorarsi in violetto, si separa un composto che si presenta in aghi bianchissimi che fondono a 59°. La sostanza ha la composizione rappresentata dalla formola:

$$C_6H_6N_2O_2$$

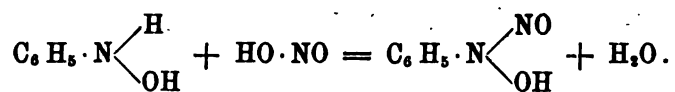
e sarebbe da considerarsi come l'*ossima del nitrobenzolo* [2] formatasi secondo la equazione:

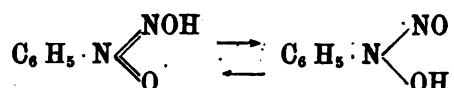
$$C_6H_5\cdot N\genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow O}{\searrow O} + H_2N\cdot OH = C_6H_5\cdot N\genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow NOH}{\searrow O} + H_2O.$$

[1] Angeli A., Berliner Berichte, XXIX, 1884; Angeli A. e Angelico F., *Sopra alcuni nitroderivati aromatici.* Rend. Lincei, 1899, vol. VIII, 2° semestre, pag. 28.

[2] Questa reazione, assieme a qualche altra che a prima vista sembrano molto diverse fra loro, tolgono all'idrossilammina il suo carattere di reattivo delle aldeidi e chetoni. L'idrossilammina infatti, oltre che col gruppo carbonilico, può reagire col residuo nitrico, col residuo nitroso, col gruppo cianico, coi composti non saturi, ecc. Generalizzando e ponendo mente alla loro struttura più probabile:

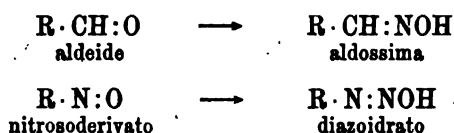
$$>C{=}O\ ;\ -N\genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow O}{\searrow O}\ ;\ -N{=}O\ ;\ -C{\equiv}N\ ;\ >C{=}C<\ ,\ \text{ecc.}$$

si osserva che tutti questi residui contengono legami multipli (doppi o tripli) fra carbonio ed ossigeno, fra azoto ed ossigeno, carbonio ed azoto, carbonio e carbonio, ecc. L'idrossilammina sarebbe

Le sue proprietà però coincidono con quelle di un composto preparato da E. Bamberger per azione dell'acido nitroso sopra la fenilidrossilammina, e che egli ha chiamato *nitrosofenilidrossilammina* [1]:

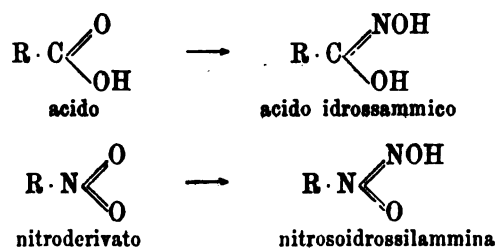
$$C_6H_5\cdot N\begin{matrix}\diagup H\\ \diagdown OH\end{matrix} + HO\cdot NO = C_6H_5\cdot N\begin{matrix}\diagup NO\\ \diagdown OH\end{matrix} + H_2O.$$

Evidentemente si tratta di un caso di tautomeria:

$$C_6H_5\cdot N\begin{matrix}\diagup NOH\\ \diagdown O\end{matrix} \rightleftarrows C_6H_5\cdot N\begin{matrix}\diagup NO\\ \diagdown OH\end{matrix}$$

e la sostanza avrà la prima o la seconda forma secondo che si trova sotto forma di sale oppure allo stato libero. Questa reazione porge un nuovo esempio della analogia di comportamento che si riscontra fra alcuni composti ossigenati del carbonio e quelli dell'azoto. Basta infatti ricordare che le aldeidi per azione dell' idrossilammina danno le aldossime nello stesso modo che i nitrosoderivati si trasformano in diazoidrati:

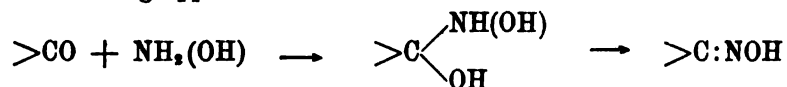
$$\underset{\text{aldeide}}{R\cdot CH:O} \longrightarrow \underset{\text{aldossima}}{R\cdot CH:NOH}$$

$$\underset{\text{nitrosoderivato}}{R\cdot N:O} \longrightarrow \underset{\text{diazoidrato}}{R\cdot N:NOH}$$

In maniera perfettamente analoga gli acidi carbossilici ed i nitroderivati forniscono rispettivamente gli acidi idrossammici e le nitrosoidrossilammine:

$$\underset{\text{acido}}{R\cdot C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup O\\ \diagdown OH\end{matrix}} \longrightarrow \underset{\text{acido idrossammico}}{R\cdot C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup NOH\\ \diagdown OH\end{matrix}}$$

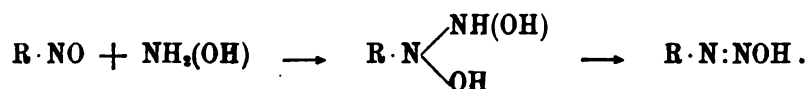
$$\underset{\text{nitroderivato}}{R\cdot N\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup O\\ \diagdown O\end{matrix}} \longrightarrow \underset{\text{nitrosoidrossilammina}}{R\cdot N\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup NOH\\ \diagdown O\end{matrix}}$$

Questa analogia di comportamento conduce naturalmente a supporre anche una analogia nel meccanismo secondo cui tali reazioni si compiono. La formazione delle ossime e degli acidi idrossammici è senza dubbio preceduta da una addizione dell' idrossilammina al gruppo carbonilico:

$$>CO + NH_2(OH) \longrightarrow >C\begin{matrix}\diagup NH(OH)\\ \diagdown OH\end{matrix} \longrightarrow >C:NOH$$

---

perciò da considerarsi come un reattivo dei legami multipli. La reazione procede senza dubbio nello stesso modo in tutti i casi, ed in una prima fase avviene addizione al legame multiplo. In una seconda fase si elimina acqua con formazione di ossime, nitrosoidrossilammine, ecc. Quando però il legame multiplo unisce carbonio ed azoto oppure carbonio e carbonio, la reazione si arresta alla prima fase con formazione di amminossime ed idrossilammine.

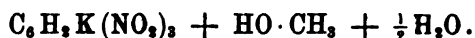
[1] Berliner Berichte, XXVII, 1553.

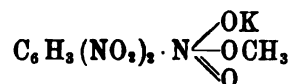
È quindi giusto ammettere che anche nell'azione dell'idrossilammina sui derivati nitrosi e nitrici avvenga un processo analogo:

$$R \cdot NO + NH_2(OH) \longrightarrow R \cdot N\begin{matrix} NH(OH) \\ OH \end{matrix} \longrightarrow R \cdot N:NOH.$$

Nel caso dei nitroderivati, per mezzo di tale ipotesi, si possono spiegare una quantità di altre reazioni che queste sostanze presentano e che finora erano completamente oscure. È noto p. e. che alcuni nitroderivati aromatici si sciolgono negli alcali con colorazioni caratteristiche; così V. Meyer ha trovato che le soluzioni alcaline del trinitrobenzolo simmetrico sono colorate in rosso intenso. Da una tale soluzione, contenente alcool metilico, Lobry de Bruyn ha potuto isolare un sale cui egli assegna la struttura:

$$C_6H_3(NO_2)_3 + KO \cdot CH_3 + \tfrac{1}{2}H_2O.$$

Victor Meyer (1) ammette invece che un idrogeno metinico del nucleo aromatico venga rimpiazzato dal metallo, ed allo stesso sale attribuisce la formola:

$$C_6H_2K(NO_2)_3 + HO \cdot CH_3 + \tfrac{1}{2}H_2O.$$

Secondo il mio modo di vedere (2) il sale in parola deriverebbe da un prodotto di addizione dell'alcoolato ad un gruppo nitrico; p. e.

$$C_6H_3(NO_2)_2 \cdot N\begin{matrix} OK \\ OCH_3 \\ O \end{matrix}$$

Tale supposizione sta anche in buona armonia con i risultati delle esperienze ultimamente eseguite da Bruni (3) sopra alcune soluzioni dei nitroderivati ed ha ricevuto una notevole conferma dagli studî di Hantzsch e Rinckenberger (4) i quali ancora non conoscevano i lavori da me pubblicati in argomento (5). La formazione di tali prodotti intermedî di addizione permette di spiegare anche altre trasformazioni che presentano i nitroderivati, alcune delle quali vennero recentemente scoperte da Meisenheimer (6).

2. *Il paranitrotoluolo* si comporta in modo identico al nitrobenzolo.

3. *La α-nitronaftalina*, per lo stesso trattamento, fornisce una sostanza che ha la composizione della nitrosonaftalinidrossilammina

$$C_{10}H_8N_2O_2$$

(1) Berliner Berichte, XXIX, 849.

(2) Angeli A., Gazzetta Chimica, XXVII (II), 357.

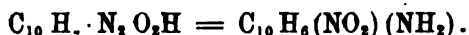
(3) Bruni e Berti, Gazzetta Chimica, XXX (II), 76 e 317; Bruni e Sala, Rend. Società chimica di Roma, II, 63 (1904).

(4) Berliner Berichte, XXXII, 3137.

(5) Gazzetta Chimica. XXVII (II), 357.

(6) Liebig's Annalen, 323, 207.

ma che possiede caratteri affatto diversi di quelli che sono propri a questa classe di prodotti; infatti essa è identica con la 1-4 nitronaftilammina e rappresenta un prodotto di trasformazione della nitrosoidrossilammina che indubbiamente si è formata in una prima fase:

$$C_{10}H_7 \cdot N_2O_2H = C_{10}H_6(NO_2)(NH_2).$$

Anche talune nitrammine aromatiche (p. e. l'acido β-diazonaftalinico) possono subire una analoga trasformazione [1].

B) Eteri dell'acido nitrico [2].

Anche i nitrati alcoolici contengono nella loro molecola il gruppo NO_2 e perciò reagiscono sopra l'idrossilammina in modo analogo ai composti aromatici prima studiati:

$R \cdot NO_2$	$RO.NO_2$
nitroderivato	nitrato alcoolico

Per queste ricerche vennero impiegati il nitrato di etile, di metile, di isoamile ed anche la nitroglicerina. Prescindendo dai rendimenti alquanto diversi, tutti reagiscono nello stesso modo, ma quasi sempre si diede la preferenza al nitrato di etile perchè si trova facilmente in commercio ed anche per il fatto che conduce a prodotti più puri.

1. *Sale* $Na_2N_2O_3$. — Si opera come per il nitrobenzolo; naturalmente in questo caso si deve prendere un atomo di sodio in più. Ad una soluzione piuttosto concentrata di tre atomi di sodio nell'alcool assoluto si aggiunge una soluzione alcoolica e bollente di una molecola di cloridrato di idrossilammina. Il cloruro sodico che si forma viene immediatamente separato per mezzo di filtrazione alla pompa ed al liquido limpido ottenuto si aggiunge una molecola di nitrato di etile. Se è necessario si raffredda, immergendo nell'acqua il vaso in cui si opera. Dopo pochi istanti si separa una polvere bianca che col tempo va aumentando. Dopo qualche ora si raccoglie su filtro, si lava con alcool e con etere e si pone a seccare nel vuoto sopra acido solforico.

Si ottiene così una polvere cristallina, bianchissima, costituita in gran parte dal sale:

$$Na_2N_2O_3.$$

Nell'alcool è insolubile, solubilissimo nell'acqua e le soluzioni sono facilmente alterabili; per questa ragione non è stato possibile in nessun modo di purificarlo.

La soluzione acquosa del sale riduce a freddo il nitrato d'argento e, meno rapidamente, anche il liquido di Fehling; con acidi dà sviluppo tumultuoso di biossido

[1] Berliner Berichte, XXX, 1252.

[2] Angeli A., Rend. Lincei (1896), vol. V, 1° sem., pag. 120; Gazzetta Chimica, XXVI (II), pag. 17; Chemiker Zeitung, 1896, pag. 176.

di azoto; le soluzioni acquose per riscaldamento si decompongono svolgendo protossido di azoto (1).

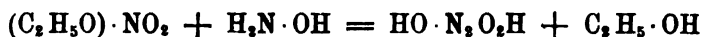
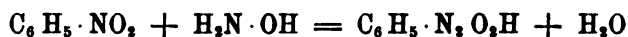
Con permanganato, in soluzione alcalina o neutra, si ossida a nitrito.

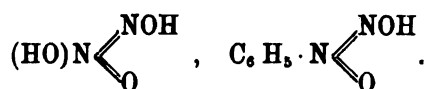
Mescolato a zolfo, carbone, solfuro di antimonio, per contatto con un corpo acceso esplode con grande violenza; la miscela con fosforo rosso detona anche per percussione. Molto probabilmente questo comportamento non è estraneo ad un altro fatto che io ho avuto occasione di mettere in rilievo per la prima volta alcuni anni or sono e che si riferisce alle differenze che si riscontrano nei miscugli esplosivi contenenti nitrati e nitriti (2).

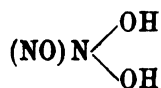
Il sale è molto velenoso (3).

Il modo di formazione del nuovo sale è analogo a quello del sale sodico della nitrosofenilidrossilammina prima studiato; la sola differenza risiede nel fatto che il residuo alcoolico dell'etere nitrico viene saponificato dall'alcali presente:

$$C_6H_5 \cdot NO_2 + H_2N \cdot OH = C_6H_5 \cdot N_2O_2H + H_2O$$

$$(C_2H_5O) \cdot NO_2 + H_2N \cdot OH = HO \cdot N_2O_2H + C_2H_5 \cdot OH$$

La formola di struttura più probabile corrisponderà per ciò a quella prima stabilita per il sale sodico della nitrosofenilidrossilammina:

$$(HO)N\begin{matrix}\diagup NOH \\ \diagdown O\end{matrix} \quad , \quad C_6H_5 \cdot N\begin{matrix}\diagup NOH \\ \diagdown O\end{matrix} \; .$$

All'acido libero, instabilissimo, spetterà l'altra:

$$(NO)N\begin{matrix}\diagup OH \\ \diagdown OH\end{matrix}$$

secondo la quale sarebbe da considerarsi come la nitrosammina della biossiammoniaca.

Secondo la prima, il sale deriverebbe dall'*ossima dell'acido nitrico* forma tau-

(1) Il sale sodico reagisce fortemente alcalino probabilmente perchè in soluzione acquosa subisce una parziale idrolisi. Questo fatto rende probabile che l'acido nitroidrossilamminico, al pari dell'acido iponitroso, sia debole; però la facilità con cui si decompone ancora non ci ha permesso di misurare direttamente la sua costante di affinità. Per la stessa ragione ed anche per la facilità con cui si decompongono le soluzioni del sale sodico non è stato finora possibile di misurare il grado di idrolisi del sale. Tale reazione potrebbe anche essere dovuta alla scissione di piccole quantità del sale:

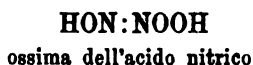
$$2Na_2N_2O_3 + H_2O = 2NaNO_2 + N_2O + 2NaOH.$$

Evidentemente basta che questa trasformazione (non invertibile) si compia anche in piccolissima parte perchè il liquido assuma forte reazione alcalina.

(2) Angeli A., Rend. Lincei (1894), vol. III, 1° sem., pag. 510; Chemiker Zeitung, 1897, p. 893.

(3) Beccari e Rimini, Annali di Chimica e Farmacologia, vol. XXII (1896).

tomera della nitroidrossilammina, e le due starebbero fra di loro come nitrocomposto ed isonitroderivato:

$HO \cdot NH\,NO_2$	$HON:NOOH$
nitroidrossilammina	ossima dell'acido nitrico
$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot NO_2$	$C_6H_5 \cdot CH:NOOH$
fenilnitrometano	isofenilnitrometano

Per tale ragione i nuovi sali si possono considerare come derivati della *nitroidrossilammina* od anche dell' *acido nitroidrossilamminico*, e le loro trasformazioni, come si vedrà in seguito, si spiegano nel miglior modo per mezzo della formola di struttura ora stabilita.

Anche nella formazione di questi sali si può ammettere che in una prima fase l'alcoolato sodico si addizioni al gruppo NO_2 del nitrato alcoolico. La reazione descritta rappresenta quindi un nuovo metodo per la preparazione degli isonitroderivati (acidi nitronici) e come si vedrà più tardi può venire impiegata con vantaggio in molti altri casi.

2. *Reazioni secondarie.* — Il rendimento del sale $Na_2N_2O_3$ raggiunge circa il 50 % del teorico e per quanto si mutino le condizioni dell'esperienza finora non fu possibile arrivare a risultati migliori. Non riescì difficile intravedere a quali cause è dovuta questa diminuzione di rendimento, prendendo in esame, fra le possibili che diventano molto numerose, le reazioni più probabili che possono compiersi fra le tre sostanze che prendono parte alla reazione:

idrossilammina
nitrato di etile
etilato sodico.

È noto infatti che il nitrato di etile, per azione dell'etilato sodico può subire la saponificazione normale per dare nitrato sodico, e questa parte dell'etere nitrico va perduta perchè i nitrati alcalini non reagiscono sopra l'idrossilammina; oppure può reagire sull'etilato sodico dando origine a nitrito sodico ed aldeide acetica. L'aldeide acetica può a sua volta reagire con l'idrossilammina che si trova presente con formazione della corrispondente ossima. Come prodotti secondarî si riscontrano realmente nitrato e nitrito sodico ed ossima dell'acetaldeide. Impiegando i nitrati di altri alcool, naturalmente si ottengono le ossime delle aldeidi che loro corrispondono.

3. *Altri sali dell'acido* $H_2N_2O_3$ [1]. — Il sale potassico

$$K_2N_2O_3$$

si può agevolmente preparare facendo reagire il nitrato di etile sopra l'idrossilammina in presenza di alcoolato potassico. Ma invece di sciogliere il potassio nell'alcool, in questo caso è preferibile impiegare una soluzione d'idrato potassico nell'alcool assoluto.

[1] Angelico F. e Fanara S., Gazzetta Chimica, XXXI (II), pag. 15.

Gli altri sali poco solubili si possono ottenere per doppia decomposizione; finora furono preparati i seguenti:

Sali di bario:

$$Ba\,N_2O_3 , H_2O \; ; \; Ba\,N_2O_3 .$$

Sali di stronzio:

$$Sr\,N_2O_3 , 1\,{}^1/_2\,H_2O \; ; \; Sr\,N_2O_3 , H_2O .$$

Sali di calcio:

$$Ca\,N_2O_3 , 3\,{}^1/_2\,H_2O \; ; \; Ca\,N_2O_3 , {}^1/_2\,H_2O .$$

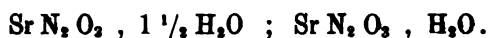
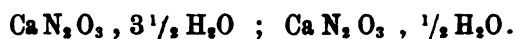
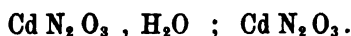
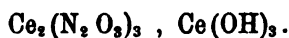
Sali di cadmio:

$$Cd\,N_2O_3 , H_2O \; ; \; Cd\,N_2O_3 .$$

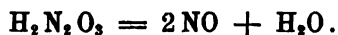
Sale di piombo:

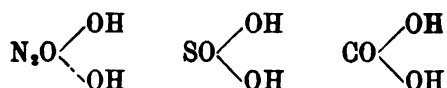
$$Pb\,N_2O_3 .$$

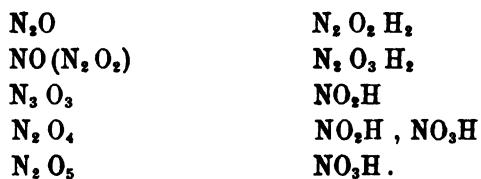
Sale di cerio:

$$Ce_2(N_2O_3)_3 , \; Ce(OH)_3 .$$

4. *Comportamento dei sali.* — Per le reazioni che seguono conviene dare la preferenza al sale sodico perchè solubile nell'acqua ed anche come il più facilmente accessibile. Del resto tutti i sali presentano gli stessi caratteri.

a) Azione degli acidi. — Come si è già accennato, le soluzioni del sale sodico vengono subito decomposte dagli acidi con sviluppo tumultuoso di biossido di azoto; evidentemente l'acido che si pone in libertà è instabilissimo e tosto si scinde in modo pressochè quantitativo secondo l'eguaglianza:

$$H_2N_2O_3 = 2\,NO + H_2O .$$

Da questo lato il sale sodico si comporta in modo analogo ai sali dell'acido carbonico e dell'acido solforoso, i quali allo stato libero

$$N_2O\begin{cases}OH\\OH\end{cases} \qquad SO\begin{cases}OH\\OH\end{cases} \qquad CO\begin{cases}OH\\OH\end{cases}$$

si decompongono in acqua e nella corrispondente anidride. A questo riguardo interessa di far notare come il biossido di azoto rappresenti l'anidride dell'acido $H_2N_2O_3$, il quale perciò colma la lacuna esistente fra gli acidi iponitroso e nitroso:

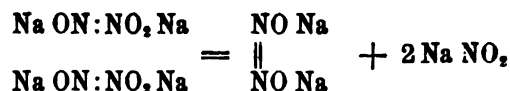
N_2O	$N_2O_2H_2$
$NO(N_2O_2)$	$N_2O_3H_2$
N_2O_3	NO_2H
N_2O_4	NO_2H , NO_3H
N_2O_5	NO_3H .

Sebbene la densità di vapore conduca ad attribuire al biossido di azoto la formola semplice, pure nella maggior parte delle reazioni questa sostanza si comporta come se le spettasse la formola raddoppiata:

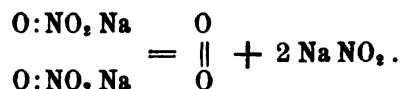
$$N_2O_2 ,$$

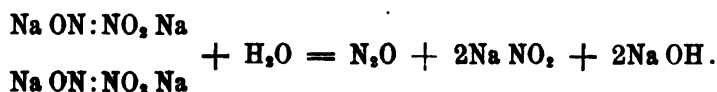
nella quale gli atomi di azoto sono direttamente riuniti fra di loro. È noto infatti che dai prodotti di addizione del biossido di azoto ai solfiti alcalini si può ottenere l'idrazina e dai prodotti di azione dello stesso (isonitrammine o nitrosoidrossilammine) sopra l'acetone, oppure sopra lo zincoetile o bromuro di magnesiofenile facilmente si preparano composti diazoici ed idrazine.

b) Azione del calore. — Il sale sodico per riscaldamento fonde in un liquido colorato in verdognolo, costituito da un miscuglio di nitrito ed iponitrito sodico che facilmente si possono separare per mezzo dei sali d'argento.

Questa scissione si può rappresentare per mezzo dello schema:

$$\begin{matrix} Na\,ON:NO_2\,Na \\ Na\,ON:NO_2\,Na \end{matrix} = \begin{matrix} NO\,Na \\ \| \\ NO\,Na \end{matrix} + 2\,Na\,NO_2$$

e presenta, come ognuno vede, una grande analogia con la decomposizione, effettuata del pari per mezzo del calore, del nitrato sodico in ossigeno e nitrito:

$$\begin{matrix} O:NO_2\,Na \\ O:NO_2\,Na \end{matrix} = \begin{matrix} O \\ \| \\ O \end{matrix} + 2\,Na\,NO_2\,.$$

c) Azione dell'acqua. — Le soluzioni acquose del sale sodico già a freddo si decompongono lentamente con sviluppo di protossido di azoto; a caldo la reazione diventa tumultuosa e nel liquido che rimane si riscontra una quantità di nitrito che corrisponde alla metà dell'azoto totale. Evidentemente la reazione procede come nel caso precedente ed il protossido di azoto viene dalla decomposizione dell'iponitrito formatosi in una prima fase:

$$\begin{matrix} Na\,ON:NO_2\,Na \\ Na\,ON:NO_2\,Na \end{matrix} + H_2O = N_2O + 2Na\,NO_2 + 2Na\,OH\,.$$

Molto più lenta procede la decomposizione delle soluzioni concentrate del sale e la decomposizione viene notevolmente ritardata dalla presenza di altri sali di sodio molto solubili. Pure altri sali, in grande quantità, p. e. quelli di potassio esercitano ad un di presso la stessa influenza ritardatrice.

d) Azione dei sali d'argento. — Si è già detto che la soluzione del sale sodico riduce subito il nitrato d'argento. Il fenomeno si osserva nel miglior modo aggiungendo nitrato d'argento ad una soluzione diluita del sale trattato con un paio di goccie d'acido acetico. In tal modo si forma dapprima un abbondante precipitato giallo, che ha tutto l'aspetto dell'iponitrito d'argento; evidentemente si tratta del sale:

$$Ag_2\,N_2\,O_3\,,$$

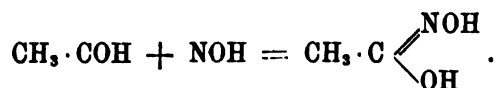
il quale si mantiene per breve tempo inalterato se si ha cura di raffreddare con ghiaccio. Ma dopo qualche minuto la decomposizione incomincia, il colore dal giallo passa al grigio ed al nero e contemporaneamente si sviluppano notevoli quantità di biossido di

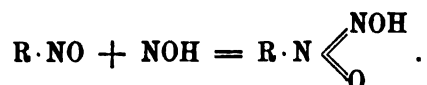
azoto. Separato l'argento per filtrazione, nel liquido si riscontra nitrito d'argento; tale decomposizione procede probabilmente secondo l'eguaglianza:

$$Ag_2N_2O_3 = AgNO_2 + Ag + NO .$$

Nello stesso modo si comportano anche le soluzioni di altri metalli facilmente riducibili od a piccola tensione di soluzione elettrolitica.

e) Azione dei composti a funzione aldeidica. — Aggiungendo ad una soluzione del sale sodico una *aldeide* solubile nell'acqua, si nota subito un forte riscaldamento; impiegando p. e. aldeide acetica si formano in tal modo *nitrito sodico* ed il sale sodico dell'*acido acetoidrossammico*, che si può riguardare come formato dall'addizione di una molecola di aldeide acetica al residuo NOH:

$$CH_3 \cdot COH + NOH = CH_3 \cdot C \begin{matrix} \diagup NOH \\ \diagdown OH \end{matrix} .$$

Anche i veri nitrosoderivati, il cui comportamento ricorda moltissimo quello delle aldeidi, reagiscono in modo analogo per dare origine alle nitrosoidrossilammine identiche a quelle preparate negli altri modi:

$$R \cdot NO + NOH = R \cdot N \begin{matrix} \diagup NOH \\ \diagdown\!\!\diagdown O \end{matrix} .$$

L'esperienza ha dimostrato che in questi casi la scissione dell'acido (sotto forma di sale sodico) procede in modo quantitativo secondo l'equazione:

$$H_2N_2O_3 = HNO_2 + HNO .$$

Ciò giustifica una volta di più la formola di struttura prima stabilita per il sale sodico:

$$\begin{matrix} NO\,Na \\ \| \\ NO_2\,Na \end{matrix}$$

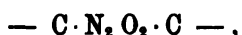
secondo la quale l'acido nitroidrossilamminico si può riguardare come un prodotto di ossidazione dell'acido iponitroso e reciprocamente come un prodotto di riduzione dell'acido nitroso.

Anche l'acido iponitroso contiene i due atomi di azoto direttamente riuniti fra di loro; l'acido nitroso invece nella maggior parte dei casi si comporta secondo la formola semplice:

$$HNO_2 .$$

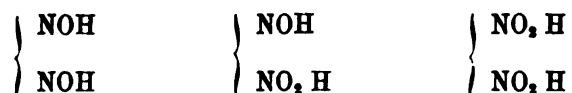
Però vi sono alcune reazioni le quali condurrebbero ad ammettere che l'acido nitroso (ed il cloruro di nitrosile) possa reagire (specialmente a bassa temperatura)

come se gli spettasse la formola doppia [1]; ed a questo riguardo basti ricordare quei composti che Baeyer ha chiamati bisnitrosoderivati:

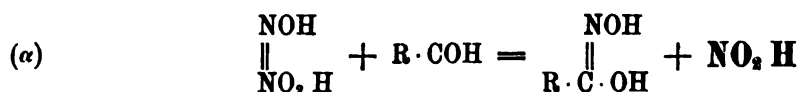
$$— C \cdot N_2 O_2 \cdot C —,$$

nei quali i due atomi di azoto sono direttamente riuniti fra di loro perchè trattati con acidi minerali danno origine agli acidi bisnitrosilici:

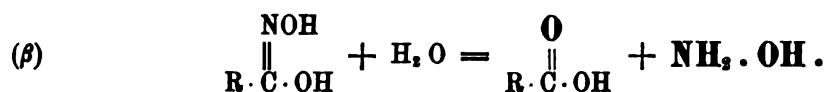
$$— C \cdot N_2 O_2 H,$$

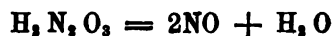
che possiedono la stessa struttura delle cosidette nitrosoidrossilammine. In tal modo l'acido iponitroso, l'acido nitroidrossilamminico e l'acido nitroso bimolecolare costituirebbero la serie:

$$\left\{\begin{matrix} NOH \\ NOH \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} NOH \\ NO_2 H \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} NO_2 H \\ NO_2 H \end{matrix}\right.$$

i cui termini differiscono notevolmente fra di loro, soprattutto per la diversa stabilità con cui sono uniti i due atomi di azoto. Nell'acido iponitroso sono riuniti in modo stabilissimo ed esso tutto al più perde una molecola di acqua per dare protossido di azoto; l'acido nitroidrossilamminico si scinde facilmente in acido nitroso e nel residuo NOH; l'acido nitroso invece si comporta come se gli spettasse la formola semplice e solamente in casi eccezionali reagisce secondo la formola bimolecolare.

5. *Altre scissioni.* — Gli acidi idrossammici che si ottengono per mezzo della reazione prima descritta:

$$(\alpha) \qquad \begin{matrix} NOH \\ \| \\ NO_2 H \end{matrix} + R \cdot COH = \begin{matrix} NOH \\ \| \\ R \cdot C \cdot OH \end{matrix} + NO_2 H$$

per ebollizione con acidi diluiti vengono facilmente scissi in idrossilammina e nell'acido corrispondente alla aldeide impiegata:

$$(\beta) \qquad \begin{matrix} NOH \\ \| \\ R \cdot C \cdot OH \end{matrix} + H_2 O = \begin{matrix} O \\ \| \\ R \cdot C \cdot OH \end{matrix} + NH_2 . OH .$$

Queste due trasformazioni, prese assieme, presentano uno speciale interesse, giacchè per loro mezzo si può effettuare indirettamente una nuova scissione dell'acido nitroidrossilamminico, la quale si può considerare come l'inversa della sua formazione. Nel mentre infatti gli acidi idrossammici organici ed inorganici in generale, per azione degli acidi minerali diluiti, si possono scindere in idrossilammina e nell'acido corrispondente, nel caso dell'acido nitroidrossilamminico questo non è possibile, giacchè, come s'è visto, esso perde subito una molecola di acqua:

$$H_2 N_2 O_3 = 2NO + H_2 O$$

per dare biossido di azoto.

[1] Anche altri composti dell'azoto possono comportarsi in modo analogo; basti ricordare l'ipoazotide, il biossido di azoto ed alcuni nitrosoderivati.

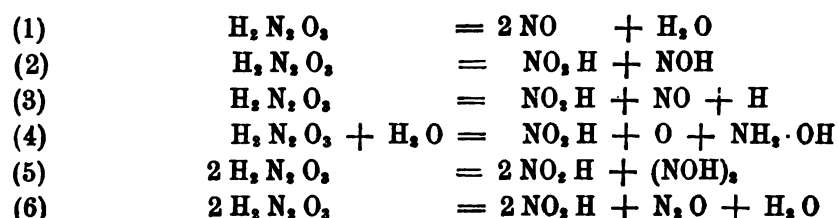
Che in una prima fase avvenga scissione in acido nitrico ed idrossilammina non si può ammettere, giacchè il nitrato di questa base è stabile in soluzione acquosa.

Sommando invece (α) con (β) e ponendo $R \cdot COOH = R \cdot COH + O$, ne segue la nuova relazione:

$$H_2N_2O_3 + H_2O = NO_2H + O + NH_2 \cdot OH .$$

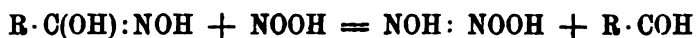
Siccome l'idrolisi è avvenuta per l'acido idrossammico (β), così l'atomo di ossigeno, che doveva portarsi all'acido nitroso per trasformarlo in acido nitrico, si è fissato all'aldeide per formare l'acido corrispondente. La scissione dell'acido nitroidrossilamminico nelle sostanze che hanno servito a prepararlo, idrossilammina ed acido nitrico, per quanto indiretta si può dunque considerare come completa.

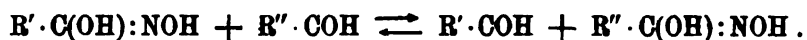
Riassumendo, ne risulta che finora è stato possibile scindere l'acido nitroidrossilamminico in sei differenti maniere, che per maggiore chiarezza riferiremo tutte all'acido libero:

$$(1) \quad H_2N_2O_3 = 2\,NO + H_2O$$
$$(2) \quad H_2N_2O_3 = NO_2H + NOH$$
$$(3) \quad H_2N_2O_3 = NO_2H + NO + H$$
$$(4) \quad H_2N_2O_3 + H_2O = NO_2H + O + NH_2 \cdot OH$$
$$(5) \quad 2\,H_2N_2O_3 = 2\,NO_2H + (NOH)_2$$
$$(6) \quad 2\,H_2N_2O_3 = 2\,NO_2H + N_2O + H_2O$$

La (1) si riferisce all'acido libero, la (3) al sale d'argento, le (2), (5), (6) al sale sodico.

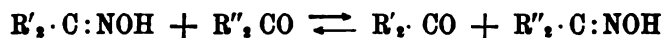
Queste trasformazioni procedono tutte con la massima facilità, si possono quasi sempre effettuare in tubi da saggio e si prestano benissimo anche come esperienze di lezione.

Il tentativo di preparare l'acido nitroidrossilamminico facendo reagire i nitriti sopra gli acidi idrossammici:

$$R \cdot C(OH):NOH + NOOH = NOH:NOOH + R \cdot COH$$

non ebbe buon risultato perchè il residuo NOH è unito al carbonio in modo assai più intimo che con altri elementi. Questo spiega come finora sieno riusciti infruttuosi anche i tentativi diretti ad effettuare la trasformazione espressa dallo schema (ripartizione del residuo NOH fra due aldeidi):

$$R' \cdot C(OH):NOH + R'' \cdot COH \rightleftarrows R' \cdot COH + R'' \cdot C(OH):NOH .$$

Siccome le aldeidi da una parte e gli acidi idrossammici dall'altra presentano reazioni che sono in gran parte comuni e che perciò non permettono di differenziarli facilmente, così vennero scelti acidi idrossammici che potessero fornire aldeidi facilmente riconoscibili per altre proprietà, ed in questo caso soprattutto per il loro odore caratteristico; ma trattando l'acido benzidrossammico e l'acido piperonilidrossammico

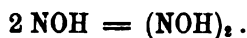
con le aldeidi formica od acetica, non fu possibile percepire l'odore delle mandorle amare (aldeide benzoica) oppure quello dell'eliotropio (piperonalio). Una trasformazione poco diversa avviene invece spesso fra ossime ed aldeidi o chetoni:

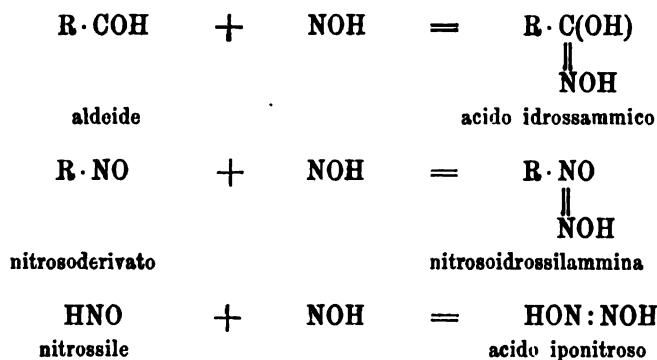
$$R'_2\cdot C:NOH + R''_2CO \rightleftharpoons R'_2\cdot CO + R''_2\cdot C:NOH$$

e talora venne anche utilizzata per mettere in libertà i composti carbonilici dalle corrispondenti ossime.

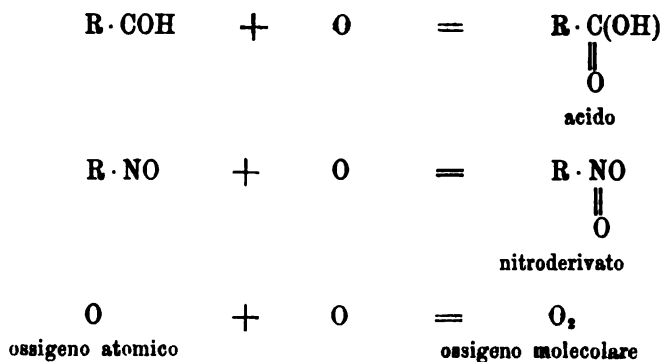
II.

Il residuo NOH e la biossiammoniaca.

Il residuo NOH che si stacca dall'acido nitroidrossilamminico e che si addiziona con tanta facilità alle aldeidi ed ai nitrosoderivati, per brevità venne anche chiamato *nitrossile*. Tale reazione si presta altresì a spiegare il meccanismo di formazione dell'acido iponitroso, il quale si ridurrebbe ad una polimerizzazione del nitrossile:

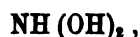
$$2\,NOH = (NOH)_2\,.$$

Secondo questo modo di vedere tale residuo funzionerebbe quasi come un elemento bivalente e le reazioni finora studiate ne danno alcuni esempî:

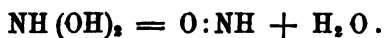
$R\cdot COH$ aldeide	+	NOH	=	$R\cdot C(OH)\!=\!NOH$ acido idrossammico
$R\cdot NO$ nitrosoderivato	+	NOH	=	$R\cdot NO\!=\!NOH$ nitrosoidrossilammina
HNO nitrossile	+	NOH	=	HON:NOH acido iponitroso

i quali trovano un perfetto riscontro nei corrispondenti derivati che fornisce p. e l'ossigeno:

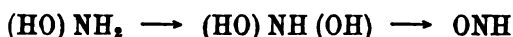
$R\cdot COH$	+	O	=	$R\cdot C(OH)\!=\!O$ acido
$R\cdot NO$	+	O	=	$R\cdot NO\!=\!O$ nitroderivato
O ossigeno atomico	+	O	=	O_2 ossigeno molecolare

Riguardo alla struttura del nitrossile, le reazioni descritte, a prima vista, condurrebbero ad attribuirgli la forma:

$$N(OH),$$

nella quale l'azoto figurerebbe come monovalente; ma lo studio di altre trasformazioni ed un più attento esame dei fatti, rendono molto più probabile che esso sia da considerarsi come l'anidride corrispondente alla *biossiammoniaca*:

$$NH(OH)_2,$$

l'acido ipofosforoso della serie dell'azoto:

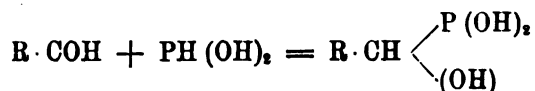
$$NH(OH)_2 = O{:}NH + H_2O.$$

Tale supposizione viene anche avvalorata dal fatto che ossidando l'idrossilammina con acido di Caro, fu possibile ottenere una soluzione

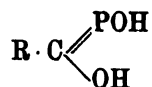
$$(HO)NH_2 \longrightarrow (HO)NH(OH) \longrightarrow ONH$$

che per trattamento con le aldeidi fornisce in modo intenso le reazioni degli acidi idrossammici. Che la formazione dell'acido idrossammico in questo caso sia dovuta ad azioni secondarie, p. e. azione di idrossilammina sopra l'aldeide (formazione dell'ossima) e successiva ossidazione [1], non è ammissibile, giacchè il liquido che per trattamento con le aldeidi forniva le reazioni degli acidi idrossammici non riduceva il liquore di Fehling (assenza di idrossilammina), mentre invece a caldo riduce il nitrato d'argento ammoniacale, come fanno gli ipofosfiti.

Estraendo il liquido con etere e quindi trattando l'estratto con aldeidi ecc. non si hanno le reazioni degli acidi idrossammici; il composto non passa quindi nell'etere. L'ossidazione dell'idrossilammina con acido di Caro procede quindi in modo analogo a quanto ha trovato Bamberger [2] per il caso delle ammine primarie organiche, le quali per azione di questo reattivo forniscono le idrossilammine:

$$R \cdot NH_2 \longrightarrow R \cdot NH(OH).$$

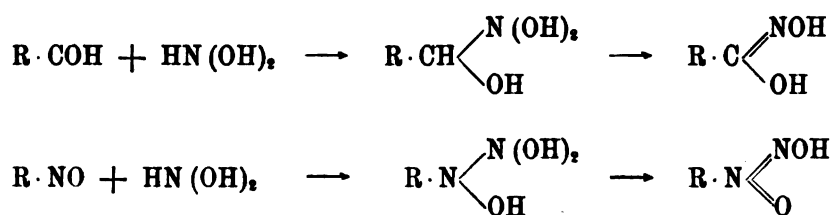
Da parecchio tempo è noto che anche l'acido ipofosforoso [3] si addiziona alle aldeidi per dare i prodotti:

$$R \cdot COH + PH(OH)_2 = R \cdot CH \begin{cases} P(OH)_2 \\ (OH) \end{cases}$$

i quali si possono riguardare come idrati degli *acidi idrossammici della serie del fosforo*:

$$R \cdot C \begin{cases} {=}POH \\ OH \end{cases}$$

(1) Bamberger, Berliner Berichte, XXXIII, 1781.
(2) Berliner Berichte, XXXII, 1676.
(3) Ville, Compt. rend., 109, 71 e seg.

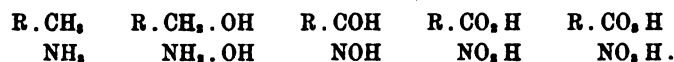
Ricordando che vi sono acidi idrossammici che trattengono tenacemente acqua di cristallizzazione, l'analogia apparisce più evidente ancora. È quindi molto probabile che anche la formazione degli acidi idrossammici e delle nitrosoidrossilammine sia preceduta da un processo di addizione della biossiammoniaca:

$$R\cdot COH + HN(OH)_2 \longrightarrow R\cdot CH{<}^{N(OH)_2}_{OH} \longrightarrow R\cdot C{<}^{NOH}_{OH}$$

$$R\cdot NO + HN(OH)_2 \longrightarrow R\cdot N{<}^{N(OH)_2}_{OH} \longrightarrow R\cdot N{<}^{NOH}_{O}$$

Il nitrosobenzolo infatti (quando è fuso colorato in verde) nella soluzione del sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico si scioglie per dare un liquido intensamente colorato in *rosso fucsina*; la tinta lentamente scompare e finalmente si ottiene una soluzione incolora che contiene il sale della nitrosoidrossilammina formatasi. Con tutta probabilità il composto rosso rappresenta il prodotto di addizione intermedio.

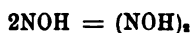
D'altra parte è da aspettarsi che la biossiammoniaca stessa abbia grande tendenza a perdere una molecola di acqua, giacchè come si verifica per la maggior parte dei composti del carbonio, finora non sono note sostanze nelle quali due ossidrili sieno uniti ad uno stesso atomo di azoto. Nelle pagine che seguono torna perciò indifferente parlare di nitrossile oppure di biossiammoniaca; la sua grande alterabilità finora non ha permesso di ottenerla che sotto forma di soluzione, ed anche in questo stato è molto instabile e facilmente si decompone per dare soprattutto iponitrito e protossido di azoto. Ciò non di meno le reazioni che verranno descritte più avanti si possono eseguire egualmente bene e nella maggior parte dei casi si compiono in modo pressochè quantitativo [1].

[1] Ricordando le analogie che esistono fra molti composti che in luogo di un atomo di azoto contengono il residuo $HC\equiv$ oppure $R.C\equiv$, dove R indica un radicale monovalente, si nota che i derivati che l'azoto fornisce con l'idrogeno e con l'ossigeno corrispondono ai prodotti che si ottengono dal carbonio. Ora che Baeyer ha completata la serie per i derivati del toluolo (Berichte 33, 1569) si vede subito che a ogni termine dei composti dell'azoto corrisponde un termine analogo per i derivati del carbonio; ponendo $R = C_6H_5$:

$R.CH_3$	$R.CH_2.OH$	$R.COH$	$R.CO_2H$	$R.CO_3H$
NH_3	$NH_2.OH$	NOH	NO_2H	NO_3H.

Al toluolo corrisponde l'ammoniaca, all'alcool benzilico l'idrossilammina, all'aldeide benzoica il nitrossile, all'acido benzoico l'acido nitroso, all'acido perbenzoico di Baeyer l'acido nitrico. Oltre alle molte analogie che si osservano fra i termini corrispondenti delle due serie è notevole il fatto che la benzaldeide facilmente si polimerizza per dare il benzoino:

$$2R.COH = (R.COH)_2$$

nello stesso modo che il nitrossile

$$2NOH = (NOH)_2$$

si trasforma in acido iponitroso.

La biossiammoniaca rappresenterebbe un termine dei successivi prodotti di ossidazione dell'ammoniaca:

NH_3	ammoniaca
$NH_2(OH)$	idrossilammina
$NH(OH)_2$	biossiammoniaca
$N(OH)_3$	acido nitroso

dove per rendere l'analogia più appariscente anche l'acido nitroso è rappresentato sotto forma di idrato. Dei due termini estremi, l'ammoniaca (naturalmente sotto forma di idrato) è una base debole ($K = 0{,}0023$) e l'acido nitroso è del pari un acido debole ($K = 0{,}045$). La costante di affinità dell'idrossilammina non è stata ancora determinata, ma senza dubbio si tratta di una base debolissima, giacchè non dà sali stabili che con gli acidi energici ed anche questi sali sono idrolizzati in soluzione acquosa. La biossiammoniaca, intermedia all'idrossilammina ed all'acido nitroso dovrebbe avere i caratteri di una sostanza quasi neutra o tutto al più di un acido debolissimo.

Queste sostanze, nel loro comportamento, presentano naturalmente delle differenze, ma presentano anche analogie le quali sono maggiori fra due termini consecutivi, mentre invece le differenze si fanno più spiccate nei termini estremi. Analogie e differenze sono quindi puramente graduali. Sopra questo punto si ritornerà più avanti.

A) Altre sostanze che cedono biossiammoniàca.

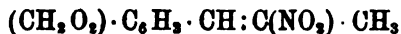
Dopo aver dimostrato che l'acido nitroidrossilamminico può scindersi in modo di dar origine alla biossiammoniaca e successivamente all'acido iponitroso, si rese subito necessario di studiare se anche altre sostanze, già note, potessero decomporsi con formazione di biossiammoniaca.

Nell'acido iponitroso:

$$\begin{array}{c} NOH \\ \| \\ NOH \end{array}$$

questo non è possibile; i due residui sono riuniti in modo stabilissimo e, per mezzo delle reazioni prima descritte, gli atomi di azoto non si possono separare; esso tutto al più perde una molecola di acqua. L'attenzione venne quindi rivolta a quelle sostanze che possono dare origine ad iponitriti e quindi in una prima fase al nitrossile. Fra queste sono da citarsi i nitrositi, l'acido idrossilamminsolfonico e l'acido benzolsolfoidrossammico [1].

1. *Nitrositi.* — Venne studiato il nitrosito dell'isosafrolo, il quale per azione degli alcali fornisce un nitroderivato non saturo al quale spetta la struttura [2]:

$$(CH_2O_2)\cdot C_6H_3\cdot CH{:}C(NO_2)\cdot CH_3$$

[1] Angeli A., Rend. Lincei (1900), vol. IX, 2° sem., pag. 183.

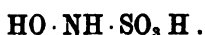
[2] La struttura di questo nitroderivato venne chiarita in modo definitivo da A. Angeli ed

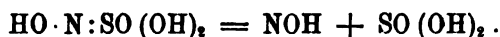
e quindi era da aspettarsi che contemporaneamente si ponesse in libertà nitrossile ed acido iponitroso:

$$\}(CH_2O_2).C_6H_3\cdot C_3H_5.N_2O_3\{_2 = 2(CH_2O_2).C_6H_3\cdot CH:C(NO_2)\cdot CH_3 = 2\,NOH\,.$$

L'acido iponitroso venne riscontrato per mezzo del caratteristico sale d'argento (1) ed il nitrossile per mezzo delle aldeidi, sebbene in questo caso le reazioni degli acidi idrossammici non sieno ben nette in causa del nitrocomposto che contemporaneamente si forma. Molto meglio riescono invece con l'

2. *Acido idrossilamminsolfonico*, cui viene attribuita la formola (Divers):

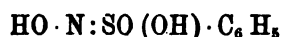
$$HO\cdot NH\cdot SO_3H\,.$$

Per azione degli alcali fornisce con buon rendimento iponitriti e per trattamento con le aldeidi dà origine agli acidi idrossammici; contemporaneamente si forma solfito; è quindi molto probabile che anche questa sostanza, sotto forma di sale, possieda una struttura analoga a quella del sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico e che la scissione proceda nello stesso modo:

$$HO\cdot N:SO(OH)_2 = NOH + SO(OH)_2\,.$$

Più comodo torna però l'impiego dell'

3. *Acido benzolsolfoidrossammico*, scoperto da Piloty (2) che gli assegna la costituzione:

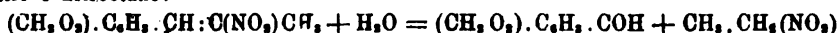
$$HO\cdot NH\,.\,SO_2\cdot C_6H_5\,.$$

Come ha trovato Piloty stesso, questa sostanza, per azione degli alcali, fornisce iponitrito assieme al sale dell'acido benzolsolfinico; e le nostre esperienze hanno dimostrato che per azione delle aldeidi, in presenza di alcali, fornisce subito gli acidi idrossammici. Anche a questa sostanza (sotto forma di sale) bisognerà attribuire una struttura:

$$HO\cdot N:SO(OH)\cdot C_6H_5$$

somigliante a quelle prima stabilite, e la scissione sarà da rappresentarsi per mezzo di una equazione perfettamente analoga (3):

$$HO\cdot N:SO(OH)\cdot C_6H_5 = NOH + C_6H_5\cdot SO_2H\,.$$

E. Rimini (Gazzetta Chimica, XXVI (I), pag. 7) studiando i prodotti che si formano per idrolisi, piperonalio e nitroetano:

$$(CH_2O_2).C_6H_3.CH:C(NO_2)CH_3 + H_2O = (CH_2O_2).C_6H_3.COH + CH_3.CH_2(NO_2)$$

e successivamente confermata da A. Angeli (Rend. Lincei, 1900, vol. IX, 1° sem., pag. 42), facendone la sintesi. — Quest'anno O. Wallach (Liebig's Annalen, 332, 305) che non conosceva questi lavori (comunicazione privata) è arrivato alla stessa conclusione giovandosi delle medesime reazioni.

(1) Angeli A. e Angelico F., Rend. Lincei, 1901, vol. X, 2° sem., pag. 303. Molto più tardi H. Wieland, che non conosceva questi lavori (Liebig's Annalen 329, 340) per mezzo di questa stessa reazione ha del pari ottenuto iponitrito d'argento.

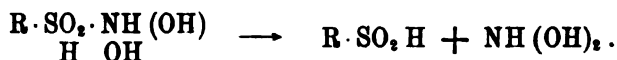
(2) Berliner Berichte, XXIX, pag. 1560.

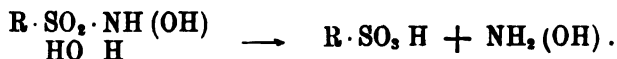
(3) Rimini E., Rend. Lincei, vol. X, 1° sem, pag. 355.

L'analogia di costituzione giustifica pienamente l'identità del comportamento, come meglio risalta dalle seguenti formole:

$$\begin{array}{ccc} NOH & NOH & NOH \\ \| & \| & \| \\ NOOH & (HO)\cdot SOOH & C_6H_5\cdot SOOH \end{array} .$$

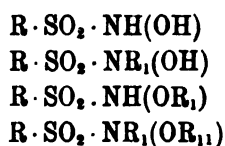
Allo scopo di porre in rilievo un nuovo fatto, consideriamo la « *scissione alcalina* » degli acidi solfoidrossammici (ed anche dell'acido nitroidrossilamminico) come un processo di idrolisi e rappresentiamolo a questo modo:

$$\begin{array}{l} R\cdot SO_2\cdot NH\,(OH) \\ \quad\;\; H \;\; OH \end{array} \longrightarrow R\cdot SO_2H + NH\,(OH)_2 .$$

Ora, le stesse sostanze (l'acido nitroidrossilamminico soltanto indirettamente, come si è già veduto) per azione degli acidi minerali diluiti subiscono la « *scissione acida* » e si forma un acido solfonico ed idrossilammina:

$$\begin{array}{l} R\cdot SO_2\cdot NH\,(OH) \\ \quad\; HO \;\; H \end{array} \longrightarrow R\cdot SO_3H + NH_2\,(OH) .$$

Ne risulta perciò che *nella scissione alcalina al posto del residuo* $R\cdot SO_2$- *nella idrossilammina si porta un ossidrile*; invece *nella scissione acida al posto del gruppo* $R\cdot SO_2$- *nel residuo dell'idrossilammina va un atomo d'idrogeno.*

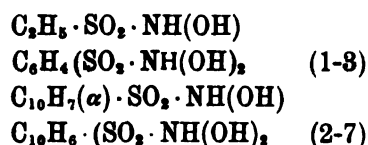
Questo fatto importante, come si vedrà in seguito, è di indole generale. Come è noto, nelle ordinarie scissioni, p. es. nella catalisi degli eteri, saponificazione delle ammidi ecc. i reattivi alcalini oppure i reattivi acidi conducono indifferentemente agli stessi prodotti finali (1).

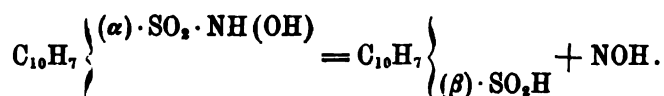
Altri acidi solfoidrossammici. — Allo scopo di meglio approfondire il meccanismo secondo cui si compiono queste interessanti trasformazioni venne esteso lo studio degli acidi idrossammici, cercando naturalmente di utilizzare anche i risultati cui erano pervenuti altri sperimentatori. A tal fine vennero preparati acidi delle forme:

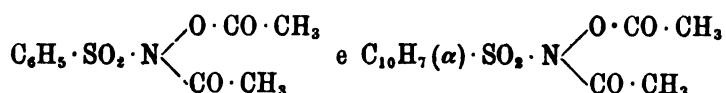
$$\begin{array}{l} R\cdot SO_2\cdot NH(OH) \\ R\cdot SO_2\cdot NR_1(OH) \\ R\cdot SO_2.NH(OR_1) \\ R\cdot SO_2\cdot NR_1(OR_{11}) \end{array}$$

(1) In queste scissioni degli acidi solfoidrossammici, si ottiene in entrambi i casi un acido: il solfonico ed il solfinico; ma per azione degli acidi, assieme all'acido solfonico, si forma una base, l'idrossilammina; per azione degli alcali invece (assieme ad acido solfinico) si ottiene un prodotto che probabilmente funziona da acido (biossiammoniaca) o che può dare origine ad acido iponitroso. A mio modo di vedere gli esempi di questo genere sono numerosi, ed in generale si potrebbe dire che i mezzi acidi tendono a formare sostanze di natura basica (è noto che anche sostanze organiche non azotate possono funzionare da basi) e reciprocamente che i reattivi alcalini tendono a dare origine a prodotti acidi. Ciò che si potrebbe anche esprimere dicendo che gli joni H determinano la formazione degli joni (OH) e reciprocamente, ovvero ancora che in ogni caso tende a formarsi acqua. Naturalmente sull'andamento della reazione avranno influenza anche la temperatura e la concentrazione.

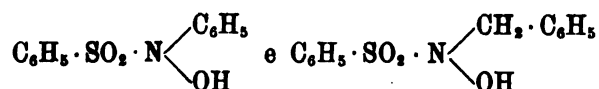
dove R rappresenta un residuo aromatico od alifatico, R_1 ed R_{11} residui aromatici, alifatici, oppure acidi.

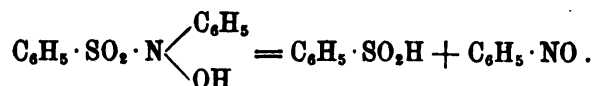
Per gli acidi della prima forma, analoghi all'acido benzolsolfoidrossammico,

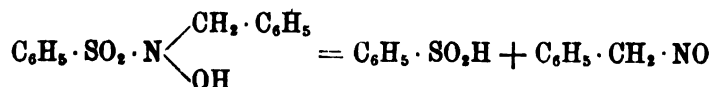
$$\begin{array}{ll} C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot NH(OH) & \\ C_6H_4(SO_2 \cdot NH(OH))_2 & (1\text{-}3) \\ C_{10}H_7(\alpha) \cdot SO_2 \cdot NH(OH) & \\ C_{10}H_6 \cdot (SO_2 \cdot NH(OH))_2 & (2\text{-}7) \end{array}$$

si è constatato che tutti e con eguale facilità subiscono le scissioni perfettamente identiche. Mentre però l'acido benzolsolfoidrossammico nella scissione alcalina, come si è già veduto, fornisce acido benzolsolfinico e nitrossile, nel caso dell'acido α-naftalinsolfoidrossammico assieme al nitrossile si forma l'acido β-naftalinsolfinico:

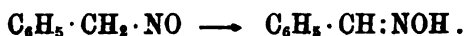
$$C_{10}H_7 \left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \cdot SO_2 \cdot NH(OH) \\ \end{array} \right. = C_{10}H_7 \left\{ \begin{array}{l} \\ (\beta) \cdot SO_2H \end{array} \right. + NOH.$$

Questa migrazione del residuo solforato è tanto più rimarchevole inquantochè si compie in modo istantaneo, a temperatura ordinaria ed in soluzione acquosa anche diluitissima. In modo identico, rispetto agli alcali, si comportano gli acidi solfoidrossammici nei quali i due atomi di idrogeno del residuo dell'idrossilammina sono sostituiti da radicali acidi, quali p. e.

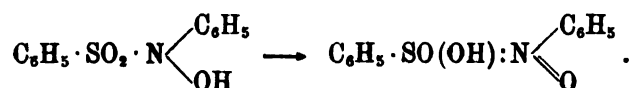
$$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot N \begin{cases} O \cdot CO \cdot CH_3 \\ CO \cdot CH_3 \end{cases} \quad e \quad C_{10}H_7(\alpha) \cdot SO_2 \cdot N \begin{cases} O \cdot CO \cdot CH_3 \\ CO \cdot CH_3 \end{cases}$$

Per azione degli alcali queste sostanze vengono dapprima saponificate, si rigenera l'acido solfoidrossammico primitivo il quale viene tosto scisso nel modo prima accennato. Come è noto anche l'acido dibenzidrossammico, per azione degli alcali viene facilmente trasformato in acido benzoico ed acido benzidrossammico. Nello stesso modo sono da intendersi anche le scissioni che presentano gli acidi preparati da Piloty:

$$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot N \begin{cases} C_6H_5 \\ OH \end{cases} \quad e \quad C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot N \begin{cases} CH_2 \cdot C_6H_5 \\ OH \end{cases}$$

Il primo fornisce acido benzolsolfinico e nitrosobenzolo, che è l'etere fenico del nitrossile:

$$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot N \begin{cases} C_6H_5 \\ OH \end{cases} = C_6H_5 \cdot SO_2H + C_6H_5 \cdot NO.$$

Il secondo dovrebbe fornire un nitrosotoluolo:

$$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot N \begin{cases} CH_2 \cdot C_6H_5 \\ OH \end{cases} = C_6H_5 \cdot SO_2H + C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot NO$$

il quale naturalmente subito si trasforma nell'ossima della benzaldeide:

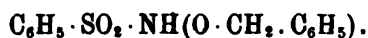
$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot NO \longrightarrow C_6H_5 \cdot CH:NOH .$$

Anche queste scissioni si spiegano bene, come prima venne accennato, ammettendo che tali composti in soluzione alcalina, e quindi sotto forma di sali, reagiscano secondo la forma tautomera, p. e.

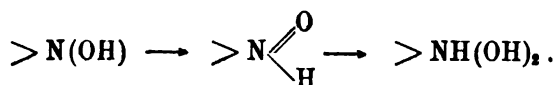
$$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot N \begin{matrix} \diagup C_6H_5 \\ \diagdown OH \end{matrix} \longrightarrow C_6H_5 \cdot SO(OH):N \begin{matrix} \diagup C_6H_5 \\ \diagdown O \end{matrix} .$$

Un comportamento molto differente si osserva invece per gli acidi idrossammici della forma:

$$R \cdot SO_2 \cdot NOH(OR_1)$$

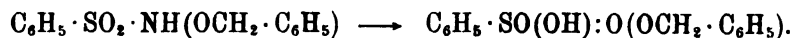
dove R_1 indica un residuo alcoolico.

Venne preso in esame il composto che già anni addietro venne preparato da Hantzsch:

$$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot NH(O \cdot CH_2 . C_6H_5).$$

È solubile negli alcali e dalle soluzioni riprecipita inalterato, per azione degli acidi, anche dopo prolungato riscaldamento. Questo fatto dimostra che affinchè gli alcali possano determinare la scissione è necessario che sia libero l'atomo di idrogeno che nel residuo dell'idrossilammina appartiene all'ossidrile. Ancora non si comprende a quale causa debba attribuirsi tale comportamento: ma non è improbabile che l'ossigeno ossimmico, in presenza di alcali, assuma la forma di un ossido:

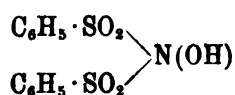
$$>N(OH) \longrightarrow >N \begin{matrix} \diagup\!\!\diagup O \\ \diagdown H \end{matrix} \longrightarrow >NH(OH)_2 .$$

L'idrossilammina stessa, come è noto, in soluzione alcalina si comporta in modo diverso che in soluzione acida; a questo riguardo basti ricordare che il cloridrato di idrossilammina riduce a ferroso il cloruro ferrico, mentre invece in soluzione alcalina ossida l'idrato ferroso a ferrico [1].

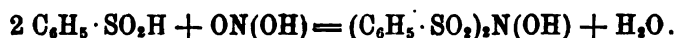
Il prodotto studiato si comporta quindi ad un dipresso come una ammide e le proprietà acide sono senza dubbio dovute all'atomo di idrogeno unito all'azoto, che probabilmente passa al residuo SO_2.

$$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot NH(OCH_2 \cdot C_6H_5) \longrightarrow C_6H_5 \cdot SO(OH):O(OCH_2 \cdot C_6H_5).$$

[1] Haber, Berliner Berichte, XXIX, 2444.

B) Acidi bisolfoidrossammici.

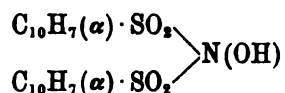
Per azione ulteriore del cloruro benzolsolfonico sopra l'acido benzolsolfoidrossammico, ovvero per ossidazione moderata di quest'ultimo, Piloty ha preparato l'acido dibenzolsolfoidrossammico:

$$\begin{matrix} C_6H_5 \cdot SO_2 \\ C_6H_5 \cdot SO_2 \end{matrix} \Big> N(OH)$$

il quale è perfettamente identico ad un acido che Koenigs [1] ha ottenuto facendo reagire l'acido nitroso sopra l'acido benzolsolfinico:

$$2\, C_6H_5 \cdot SO_2H + ON(OH) = (C_6H_5 \cdot SO_2)_2N(OH) + H_2O.$$

Molto probabilmente in questo caso l'acido nitroso reagisce come triossiammoniaca $N(OH)_3$ e la reazione è analoga a quella che si compie fra solfiti e nitriti. Siccome le esperienze fatte da Koenigs sopra questo acido interessante sono incomplete, fu necessario sottoporlo ad uno studio ulteriore allo scopo di determinare in modo più sicuro il suo comportamento ed anche di porre in rilievo le analogie che passano fra esso e l'acido benzolsolfoidrossammico.

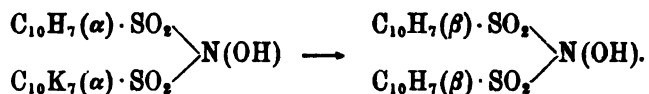
L'acido dibenzolsolfoidrossammico, per azione degli alcali, si scinde di nuovo in acido benzolsolfinico ed acido nitroso; trattando infatti con cloruro di bario precipita il sale baritico dell'acido benzolsolfinico, mentre il nitrito rimane in soluzione. Per trattamento invece con acidi minerali si forma idrossilamınina che venne identificata trasformandola nell'ossima del piperonalio. Anche l'acido benzolsolfoidrossammico, come prima venne accennato, per lo stesso trattamento fornisce idrossilammina che venne riconosciuta nello stesso modo.

Sebbene il comportamento degli acidi benzolsolfoidrossammico e dibenzolsolfoidrossammico, rispetto agli alcali, sembri a tutta prima alquanto diverso, esaminando attentamente i fatti si osserva che esso presenta la più stretta analogia. E questa analogia riesce ancora più manifesta quando si prenda in esame il corrispondente derivato della naftalina:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha) \cdot SO_2 \\ C_{10}H_7(\alpha) \cdot SO_2 \end{matrix} \Big> N(OH)$$

che agevolmente si prepara per azione dell'acido nitroso sopra l'acido α-naftalinsolfinico. Anche questo acido, quando venga trattato con alcali, si scinde in acido nitroso ed in acido solfinico; però non si forma l'acido α-naftalinsolfinico da cui si è partiti, ma bensì l'acido β-naftalinsolfinico, in modo precisamente identico come dall'acido α-naftalinsolfoidrossammico, per azione degli alcali, si ottiene acido β-nafta-

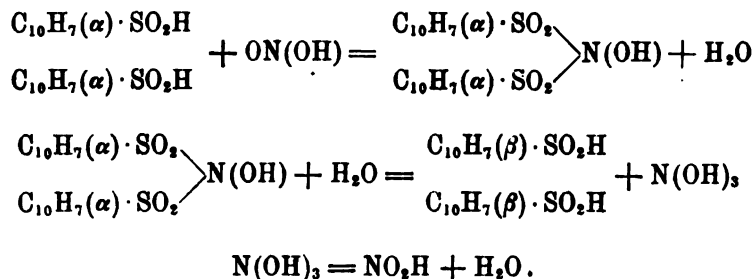
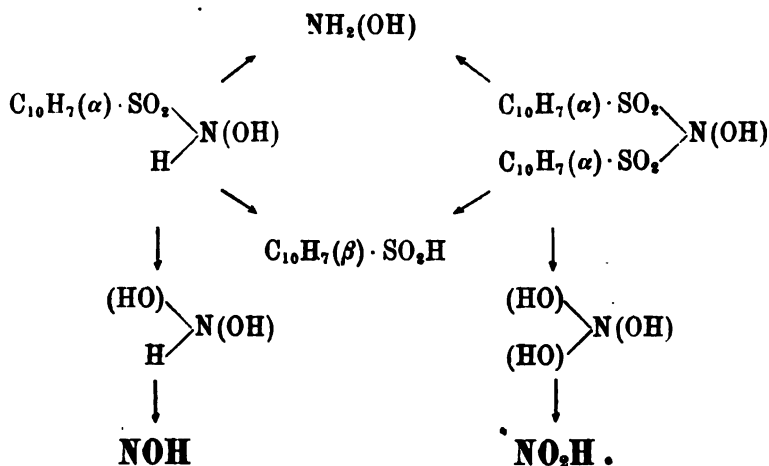
[1] Berliner Berichte, XI, 615.

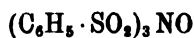
linsolfinico. Acidificando nuovamente il liquido, l'acido β-naftalinsolfinico formatosi reagisce a sua volta con l'acido nitroso per dare origine ad un acido isomero a quello da cui si è partiti, l'acido di-β-naftalinsolfoidrossammico:

$$\left.\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\cdot SO_2 \\ C_{10}K_7(\alpha)\cdot SO_2 \end{matrix}\right> N(OH) \longrightarrow \left.\begin{matrix} C_{10}H_7(\beta)\cdot SO_2 \\ C_{10}H_7(\beta)\cdot SO_2 \end{matrix}\right> N(OH).$$

Per ciò anche in questo caso, nella scissione alcalina *per ogni residuo solfonico che si stacca, all'atomo di azoto si porta un ossidrile.* Il seguente schema chiarisce meglio le reazioni:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\cdot SO_2H \\ C_{10}H_7(\alpha)\cdot SO_2H \end{matrix} + ON(OH) = \left.\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\cdot SO_2 \\ C_{10}H_7(\alpha)\cdot SO_2 \end{matrix}\right> N(OH) + H_2O$$

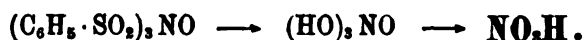
$$\left.\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\cdot SO_2 \\ C_{10}H_7(\alpha)\cdot SO_2 \end{matrix}\right> N(OH) + H_2O = \begin{matrix} C_{10}H_7(\beta)\cdot SO_2H \\ C_{10}H_7(\beta)\cdot SO_2H \end{matrix} + N(OH)_3$$

$$N(OH)_3 = NO_2H + H_2O.$$

La stessa reazione e le stesse trasposizioni molecolari del residuo solfonico avvengono, come si è già veduto, anche nella scissione dell'acido naftalin-α-solfoidrossammico ed il seguente specchietto illustra bene il completo parallelismo che lega queste interessanti trasformazioni:

Il nitrossile (biossiammoniaca) e l'acido nitroso (triossiammoniaca) si formano quindi per mezzo di reazioni analoghe e che si compiono nell'identico modo. Anche la *tribenzosolfoidrossilammina*

$$(C_6H_5\cdot SO_2)_3NO$$

può subire scissioni che con le precedenti presentano grande rassomiglianza: per azione degli acidi fornisce idrossilammina che venne identificata, come al solito trasformandola nell'ossima del piperonalio

$$(C_6H_5 \cdot SO_2)_3NO \longrightarrow H_3NO \longrightarrow H_2N(OH).$$

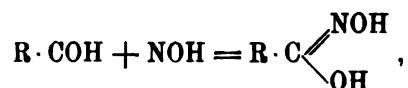
Per azione degli alcali si forma acido nitrico, sebbene la reazione in questo caso sia molto più lenta in causa della insolubilità della sostanza; dunque anche per questo composto, per ogni residuo solfonico che si stacca, all'azoto si porta un ossidrile:

$$(C_6H_5 \cdot SO_2)_3NO \longrightarrow (HO)_3NO \longrightarrow \mathbf{NO_3H}.$$

III.

Reazioni della biossiammoniaca.

A) Azione sopra le aldeidi: formazione di acidi idrossammici.

Come è stato più volte accennato le aldeidi addizionano nettamente il nitrossile per formare gli acidi idrossammici:

$$R \cdot COH + NOH = R \cdot C\begin{smallmatrix}\diagup NOH \\ \diagdown OH\end{smallmatrix},$$

i quali si identificano con grande facilità per mezzo del percloruro di ferro o con acetato di rame che li precipita sotto forma di sali caratteristici, colorati per lo più in verde od in azzurro chiaro. Per dare un'idea della sensibilità di questa reazione basti dire che due goccie di acqua coobata di lauro ceraso forniscono in modo marcatissimo la reazione dell'aldeide benzoica.

Gli acidi idrossammici si formano in quantità quasi teorica. I chetoni invece, a parità di condizioni, non reagiscono col nitrossile e perciò questa reazione presenta un mezzo molto semplice per *distinguere le aldeidi dai chetoni*. È noto che la maggior parte delle altre reazioni proprie delle aldeidi, vengono fornite anche da sostanze di altra natura. Infatti l'idrossilammina, le idrazine ed i bisolfiti reagiscono con le aldeidi ed anche con i chetoni; vi sono chetoni che colorano la soluzione solforosa di fucsina ed altre sostanze non aldeidiche che riducono le soluzioni alcaline di rame e di argento. Anche la trasformazione di una aldeide nell'acido corrispondente molte volte non procede netta e sempre richiede notevoli quantità di materiale che sempre non si possono avere a disposizione. La nuova reazione invece conduce subito agli acidi idrossammici, che sono sostanze stabili e ben cristallizzate, e si può applicare direttamente anche a miscugli complicati contenenti piccolissime quantità di aldeidi; così è stato possibile rinvenire aldeidi in quasi tutti gli oli es-

senziali [1] impiegando poche goccie di essenza soltanto; in alcuni casi vennero riscontrate anche prima d'ora, ma soltanto operando sopra enormi quantità di prodotto e perciò nelle grandi fabbriche esclusivamente.

Per eseguire la reazione torna indifferente impiegare il sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico, oppure gli acidi solfoidrossammici. Quando invece si tratta di isolare l'acido idrossammico è necessario dare la preferenza al primo se l'acido dà un sale di bario insolubile. In questo caso si opera sempre in mezzo neutro od alcalino, ed il nitrito che contemporaneamente si forma viene elimiuato per lavaggio con acqua.

Se però i sali di bario degli acidi idrossammici sono solubili in acqua, allora conviene impiegare gli acidi solfoidrossammici; in tal caso l'acido idrossammico che si forma viene separato sotto forma del sale di rame trattando il liquido acidificato con acido acetico con soluzione di acetato di rame.

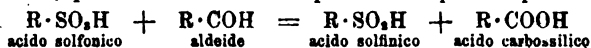
In generale, il primo metodo si applica bene nel caso di aldeidi aromatiche, del tipo dell'aldeide benzoica.

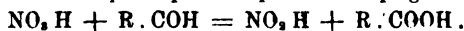
Alla soluzione acquosa di una molecola di sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico si aggiunge una molecola dell'aldeide; se questa è poco solubile nell'acqua si tratta con alcool in modo di avere un liquido omogeneo; per lo più la reazione avviene immediatamente ed è accompagnata da forte sviluppo di calore; in caso diverso si riscalda a b. m. fino a che l'odore dell'aldeide è quasi scomparso, si scaccia l'alcool ed il liquido che rimane viene trattato con cloruro di bario che determina la separazione del sale baritico. Questo, raccolto su filtro e lavato con acqua, viene trattato con acido cloridrico diluito; così si mette in libertà l'acido idrossammico. Invece che trattare con cloruro di bario si potrebbe anche impiegare acetato di rame; ma in questo caso il rendimento ne scapita un poco perchè si mette in libertà acido nitroso. il quale può decomporre una parte dell'acido idrossammico che si è formato.

Impiegando gli acidi solfoidrossammici, si procede in modo analogo; una molecola p. e. di acido benzolsolfoidrossammico, una molecola dell'aldeide si trattano con acqua (o con acqua ed alcool se l'aldeide è poco solubile) e con soluzione di potassa in modo da avere un liquido che reagisca nettamente alcalino. Anche in questo caso si nota il solito riscaldamento. Si scaccia l'alcool a b. m. ed il residuo della distillazione viene acidificato con acido acetico e quindi trattato con acetato di rame, il quale determina la separazione del sale ramico insolubile che viene lavato abbondantemente con acqua. L'acido solfinico che contemporaneamente si forma passa tutto nel liquido acquoso. Dal sale di rame si può porre in libertà l'acido idrossammico per mezzo di acidi minerali diluiti, oppure facendo passare una corrente di idrogeno solforato nel sale sospeso in alcool assoluto [2].

[1] Velardi, Gazzetta Chimica, XXXIV, pag. 66.

[2] In ultima analisi, questa trasformazione si può anche esprimere per mezzo dell'uguaglianza:

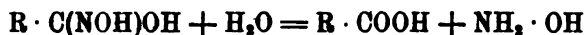
$$\underset{\text{acido solfonico}}{R\cdot SO_3H} + \underset{\text{aldeide}}{R\cdot COH} = \underset{\text{acido solfinico}}{R\cdot SO_2H} + \underset{\text{acido carbossilico}}{R\cdot COOH}$$

giacchè l'idrossilammina che s'impiega viene poi riottenuta nella idrolisi dell'acido idrossammico. In modo analogo la trasformazione si può esprimere quando si impieghi l'acido nitroidrossilamminico:

$$NO_3H + R.COH = NO_2H + R.COOH.$$

L'idrossilammina agisce come un catalizzatore.

1. *Alcuni esempi.* — La reazione riuscì benissimo impiegando le aldeidi: formica, acetica, bromoacetica, propionica, butirrica, isovalerianica, enantica, glicerica, δ-amminovalerianica; inoltre col furfurolo, aldeide benzoica, anisica, piperonilica, bromopiperonilica, etere etilico dell'aldeide salicilica, metanitrobenzaldeide; con le dialdeidi: gliossal, dialdeide succinica di Harries e dialdeide suberica di A. v. Baeyer. Anche le aldeidi non sature: acroleina, aldeide crotonica, citral, citronellal e aldeide cinnamica presentano la reazione in modo marcatissimo, ma il rendimento in acido idrossammico in questo caso è scarso perchè contemporaneamente si formano altre sostanze le quali con tutta probabilità sono da considerarsi come prodotti di addizione della biossiammoniaca ai doppi legami.

2. *Eccezioni.* — Non presentano invece questa reazione il glucosio ed il lattosio; questo fatto sarebbe d'accordo con altri e darebbe ragione a coloro che ammettono che queste sostanze invece di un residuo aldeidico contengano un ossigeno anidridico fra due oppure fra quattro atomi di carbonio consecutivi; però il fatto, sopraaccennato, che l'aldeide glicerica facilmente reagisce, rende più probabile la seconda ipotesi. La reazione riuscì negativa con l'aldeide salicilica, con l'elicina, acido opianico e con le aldeidi ortonitrobenzoica ed ortonitropiperonilica; tutte queste sostanze, come si vede, sono ortoderivati della serie aromatica, l'eccezione presentata dall'aldeide salicilica si può spiegare per il fatto che i fenoli reagiscono per conto loro ed in altro senso con la biossiammoniaca; nelle altre invece, che talora si comportano come aldeidi, non è improbabile che i due sostituenti in orto sieno legati fra loro in modo da non lasciare intatto il residuo aldeidico, come del resto anche altre reazioni condurrebbero a supporre. Risultato negativo si ebbe pure con l'aldeide pirrolica di E. Bamberger.

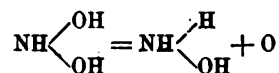
Gli acidi idrossammici che per tale mezzo si ottengono, vengono come è noto facilmente idrolizzati per dare origine all'acido carbossilico:

$$R \cdot C(NOH)OH + H_2O = R \cdot COOH + NH_2 \cdot OH$$

e perciò la nuova reazione si può altresì impiegare con vantaggio per *trasformare le aldeidi negli acidi corrispondenti*, senza bisogno di ricorrere agli ordinari mezzi di ossidazione. Questo è un fatto importante giacchè l'ossidazione diretta delle aldeidi nella maggior parte dei casi procede meno netta di quanto si crede.

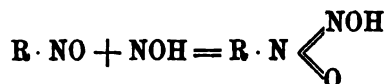
Nella reazione degli alcali sopra le aldeidi, una parte di queste viene ridotta negli alcool corrispondenti.

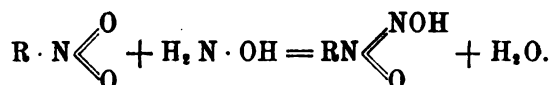
Invece l'idrolisi degli acidi idrossammici si compie con grande rapidità; a tale scopo si possono impiegare acidi minerali diluiti che si fanno reagire sopra gli acidi idrossammici direttamente, ovvero in modo ancora più spiccio, sopra i sali di bario e di rame che per i primi si ottengono [1].

[1] Questa trasformazione si intende subito quando si pensa che per azione della *biossiammoniaca* sopra l'*aldeide* (passando per l'acido idrossammico) si forma *idrossilammina* e l'*acido* corrispondente. La biossiammoniaca perde quindi un atomo di ossigeno:

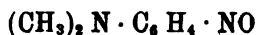
$$NH\langle{}^{OH}_{OH} = NH\langle{}^{H}_{OH} + O$$

B) Azione sopra i nitrosoderivati: formazione di nitrosoidrossilammine.

I nitrosoderivati, che presentano tante reazioni comuni con le aldeidi, rispetto al nitrossile si comportano in modo identico a queste ultime; come si è già detto avviene nettamente addizione:

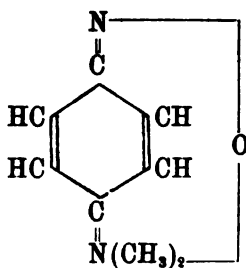
$$R \cdot NO + NOH = R \cdot N\begin{matrix} \diagup NOH \\ \diagdown O \end{matrix}$$

e si formano nitrosoidrossilammine. Anche in questa reazione si ottengono sotto forma di sali, e perciò si arriva alla stessa formola di struttura prima stabilita nel caso della loro preparazione dai nitrocomposti ed idrossilammina:

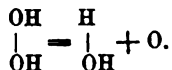
$$R \cdot N\begin{matrix} \diagup O \\ \diagdown O \end{matrix} + H_2N \cdot OH = RN\begin{matrix} \diagup NOH \\ \diagdown O \end{matrix} + H_2O.$$

Praticamente la reazione viene eseguita come per il caso delle aldeidi, e le nitrosoidrossilammine che si formano si isolano per lo più trattando il liquido con cloruro di bario; in tal modo precipitano i sali baritici in generale poco solubili. Per azione di acidi minerali diluiti facilmente si ottengono i composti allo stato libero. La reazione venne effettuata col nitrosobenzolo, nitrosoparatoluolo e con la nitrosobenzaldeide (meta) di Bamberger.

Per mezzo di questa reazione è stato possibile determinare la struttura della nitrosodimetilanilina, intorno alla quale i pareri erano ancora discordi. Questa sostanza infatti addiziona il nitrossile e perciò si deve considerare vero nitrosoderivato

$$(CH_3)_2N \cdot C_6H_4 \cdot NO$$

e non derivato chinonico:

```
        N————————┐
        ‖        │
        C        │
      ╱   ╲      │
   HC       CH   │
   ‖        ‖    O
   HC       CH   │
      ╲   ╱      │
        C        │
        ‖        │
     N(CH₃)₂—————┘
```

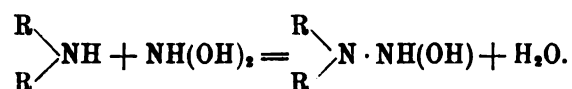
---

ad un di presso come può fare l'acqua ossigenata:

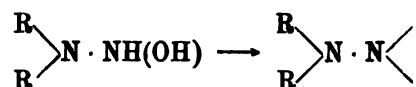
$$\begin{matrix} OH \\ | \\ OH \end{matrix} = \begin{matrix} H \\ | \\ OH \end{matrix} + O.$$

come altri ammettevano. Contemporaneamente e per tutt'altra via anche il Bruni è arrivato alla stessa conclusione (¹).

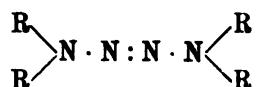
C) Azione sopra le ammine secondarie.

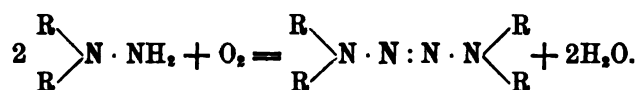
La biossiammoniaca reagisce sopra le ammine secondarie per dare origine a prodotti la cui natura varia a seconda dei radicali uniti all'atomo di azoto.

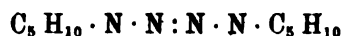
Finora non vennero studiate le ammine aromatiche, giacchè in questo caso la reazione assume un andamento più complicato. Sempre però la trasformazione si spiega nel miglior modo ammettendo che in una prima fase si formi un prodotto intermedio nel senso rappresentato dall'eguaglianza:

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>NH + NH(OH)_2 = \begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>N \cdot NH(OH) + H_2O.$$

Ammine alifatiche: formazione di tetrazoni. — Nel caso delle ammine secondarie alifatiche il prodotto intermedio perde a sua volta una molecola di acqua:

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>N \cdot NH(OH) \longrightarrow \begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>N \cdot N<$$

e due residui si riuniscono per dare i tetrazoni:

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>N \cdot N : N \cdot N<\!\!\begin{matrix}R\\R\end{matrix}$$

i quali sono identici a quelli preparati da Emilio Fischer per ossidazione delle idrazine:

$$2\,\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>N \cdot NH_2 + O_2 = \begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>N \cdot N : N \cdot N<\!\!\begin{matrix}R\\R\end{matrix} + 2H_2O.$$

La reazione si può eseguire trattando la soluzione acquosa del cloridrato della base col sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico; per lieve riscaldamento il liquido, dapprima limpido, si intorbida per il tetrazone formatosi. Alcuni tetrazoni sono liquidi, come quello della coniina e della diisoamilammina; quello della piperidina è solido e le sue proprietà coincidono a quelle descritte da Knorr:

$$C_5H_{10} \cdot N \cdot N : N \cdot N \cdot C_5H_{10}$$

(¹) Gazzetta chimica, XXXIV (II), p. 465.

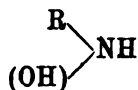
che per la prima volta l'ha ottenuto per ossidazione con ossido di mercurio dell'idrazina (N-amminopiperidina):

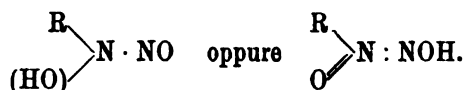
$$C_5 H_{10} \cdot N \cdot NH_2 .$$ [1]

Un caso particolare interessante di questa reazione è presentato dalle

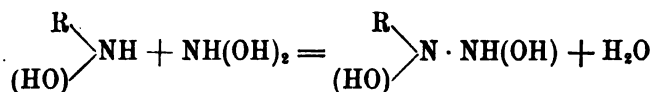
D) Idrossilammine monosostituite: formazione di diazocomposti.

Queste sostanze si possono considerare come ammine secondarie nelle quali uno dei due radicali è rimpiazzato dall'ossidrile:

$$\begin{matrix} R \diagdown \\ (OH) \diagup \end{matrix} NH$$

e come tali, per trattamento con acido nitroso forniscono le corrispondenti nitrosammine, alle quali come si è già veduto si possono assegnare le due formule:

$$\begin{matrix} R \diagdown \\ (HO) \diagup \end{matrix} N \cdot NO \quad \text{oppure} \quad \begin{matrix} R \diagdown \\ O \diagup\!\!\diagup \end{matrix} N : NOH.$$

Per lo studio venne data la preferenza alla fenilidrossilammina anche perchè la più facilmente accessibile.

Rispetto alla biossiammoniaca si comporta in modo analogo alle ammine secondarie; la sola differenza in questo caso risiede nel fatto che l'ossidrile unito all'azoto imprime al prodotto intermedio un carattere speciale, l'eliminazione di acqua può compiersi in altro modo, ed invece di ottenere il corrispondente tetrazone si arriva a composti diazoici:

$$\begin{matrix} R \diagdown \\ (HO) \diagup \end{matrix} NH + NH(OH)_2 = \begin{matrix} R \diagdown \\ (HO) \diagup \end{matrix} N \cdot NH(OH) + H_2O$$

da cui per eliminazione di una nuova molecola di acqua fra un atomo di idrogeno ed uno dei due ossidrili:

$$\begin{matrix} R \diagdown \\ (HO) \diagup \end{matrix} N \cdot NH(OH) = H_2O + \begin{matrix} R \diagdown \\ (HO) \diagup \end{matrix} N \vdots N$$

idrato del diazoniocomposto

[1] Assieme al tetrazone si formano anche altre sostanze, che si possono rappresentare con le formole:

(1) $C5\,N_2\,H_{12}$
(2) $(C5\,N_2\,H_{11})_2$
(3) $(C5\,N_2\,H_{10})_2$
(4) $(C5\,N_2\,H_9\,)_2$

di cui la prima è identica con la piperilidrazina e la (3) con il tetrazone.

ovvero anche:

$$\begin{matrix} R \\ (HO) \end{matrix}\!\!>\!N \cdot NH(OH) = H_2O + R \cdot N : N(OH)$$

idrato del diazocomposto

Invece di isolare l'idrato che per tale mezzo si forma, venne preferito utilizzare un artificio che in altri casi è stato impiegato con successo da E. Bamberger: si operò in presenza di una sostanza capace di fissare il composto diazoico, in questo caso l'α-naftolo il quale coi sali del diazobenzolo forma subito, come è noto, il caratteristico benzolazo-α-naftolo:

$$C_6H_5 \cdot N_2 \cdot C_{10}H_6(OH).$$

La soluzione alcoolica è raffreddata con ghiaccio di quantità equimolecolari di fenilidrossilammina, acido benzolsolfoidrossammico ed α-naftolo, venne resa alcalina con idrato sodico, aggiungendo se è necessario poca acqua in modo che tutto rimanga disciolto. Siccome la fenilidrossilammina, in presenza di alcali, assorbe con grande rapidità l'ossigeno dell'aria fu necessario operare in ambiente di idrogeno oppure di gas illuminante. Dopo pochi istanti il liquido, dapprima giallognolo, assume una tinta rosso-bruna che va sempre più aumentando di intensità. Nel domani il contenuto del pallone venne fortemente diluito con acqua e poi filtrato; nel liquido limpido si fa passare una corrente rapida di anidride carbonica e la sostanza solida che si separa si lava con acqua e successivamente con poco alcool. In tal modo si ottiene un composto, che purificato dal benzolo bollente, si presenta in cristalli dai riflessi metallici verdi, perfettamente identico con il benzolazo-α-naftolo.

Questo nuovo modo di formazione dei composti diazoici presenta uno speciale interesse e probabilmente rappresenta anche l'ultimo che la teoria fa prevedere.

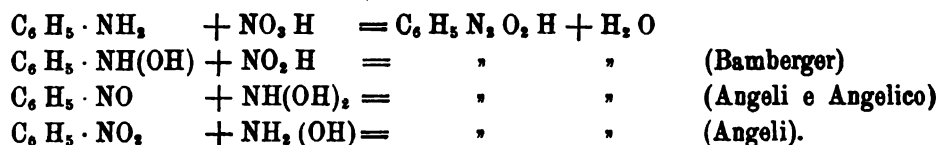
Riunendo ed ordinando le reazioni che conducono ai composti diazoici aromatici, si ottiene la seguente serie:

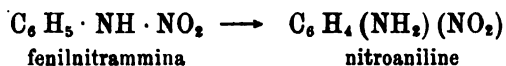
$C_6H_5 \cdot NH_2$	$+ NO_2H$	$= C_6H_5 \cdot N_2(OH) + H_2O$	(Griess)
$C_6H_5 \cdot NH(OH)$	$+ NOH$	$=$ » »	(Angeli e Angelico)
$C_6H_5 \cdot NO$	$+ NH_2(OH)$	$=$ » »	(Bamberger)
$C_6H_5 \cdot NO_2$	$+ NH_3$	$=$ » »	(Bamberger)

I termini della prima colonna rappresentano i successivi prodotti di ossidazione dell'anilina; quelli della seconda i prodotti di riduzione dell'acido nitroso: la loro somma è sempre costante. Altri metodi di formazione di composti diazoici non si possono immaginare e se anche un giorno si riuscisse p. e. a preparare un nuovo prodotto di ossidazione dell'anilina, ciò che è assai problematico, resterebbe sempre a scoprire il corrispondente termine di riduzione dell'acido nitroso, tale che soddisfaccia alla condizione sopra enunciata.

Gli altri metodi che in casi speciali vengono seguiti nella preparazione di taluni composti diazoici rientrano nella cerchia di quelli descritti ed appartengono quasi tutti, per quanto artificiosi si presentino, a quello che Griess scoperse per il primo.

A queste reazioni che conducono ai composti diazoici, corrisponde un altro gruppo di reazioni per mezzo delle quali si ottengono sostanze che contengono un atomo di ossigeno in più dei primi: le nitrosoidrossilammine, cui fu più volte accennato:

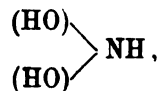
$C_6H_5 \cdot NH_2$	$+ NO_2H$	$= C_6H_5N_2O_2H + H_2O$	
$C_6H_5 \cdot NH(OH)$	$+ NO_2H$	= » »	(Bamberger)
$C_6H_5 \cdot NO$	$+ NH(OH)_2$	= » »	(Angeli e Angelico)
$C_6H_5 \cdot NO_2$	$+ NH_2(OH)$	= » »	(Angeli).

Bisogna però subito notare che la prima non è stata ancora realizzata, e che per diverse ragioni sarà difficile il poterla effettuare. Infatti, nelle nitrosoidrossilammine i due atomi di ossigeno sono uniti a due diversi atomi di azoto come lo dimostrano le sintesi sopra descritte ed anche il fatto che la stessa nitrosofenilidrossilammina si può altresì preparare per azione del biossido di azoto sopra il bromuro di magnesiofenile. Nell'azione dell'acido nitrico sopra l'anilina, nelle ordinarie condizioni, avviene salificazione e nulla più, si ottiene cioè nitrato di anilina; se si rende la reazione più energica elevando la temperatura ed impiegando l'acido in eccesso, nel caso più favorevole si otterranno gli isomeri orto e paranitroanilina; ora il fatto di ottenere queste sostanze dimostra, in modo non dubbio, che in tali condizioni, in una prima fase, si forma un altro isomero, la fenilnitrammina od acido diazobenzolico, scoperto da E. Bamberger:

$$\underset{\text{fenilnitrammina}}{C_6H_5 \cdot NH \cdot NO_2} \longrightarrow \underset{\text{nitroaniline}}{C_6H_4(NH_2)(NO_2)}$$

E piccole quantità di questo composto si possono preparare facendo reagire l'anidride nitrica sopra una soluzione fortemente raffreddata di anilina nell'etere assoluto; ma lo scopo non è raggiunto giacchè la fenilnitrammina è un derivato dell'acido nitrico e perciò a differenza della prima, nella sua molecola con tutta probabilità i due atomi di ossigeno sono uniti direttamente ad uno stesso atomo di azoto. Per mezzo delle reazioni descritte si può spiegare in modo soddisfacente anche la

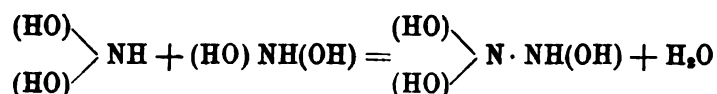
E) Formazione degli iponitriti

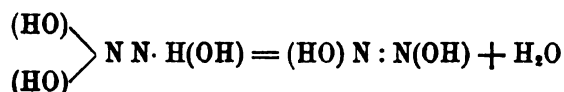
che finora era rimasta completamente oscura.

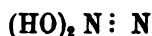
Esaminando infatti la formola della biossiammoniaca

$$\begin{matrix}(HO)\\(HO)\end{matrix}\!\!>NH,$$

si vede che essa pure può venir considerata come una ammina secondaria. Come

nei casi prima studiati essa potrà reagire sopra sè stessa per fornire un prodotto intermedio:

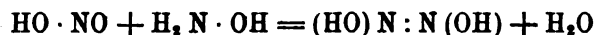
$$\begin{matrix}(HO)\\(HO)\end{matrix}\!\!>NH + (HO)\,NH(OH) = \begin{matrix}(HO)\\(HO)\end{matrix}\!\!>N\cdot NH(OH) + H_2O$$

il quale perdendo una molecola di acqua darà origine all'acido iponitroso:

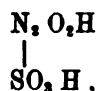
$$\begin{matrix}(HO)\\(HO)\end{matrix}\!\!>N\,N\cdot H(OH) = (HO)\,N:N(OH) + H_2O$$

trascurando l'altra possibilità

$$(HO)_2\,N\,\vdots\,N$$

meno probabile, almeno sotto forma di sali.

Il rendimento in iponitrito, come la pratica insegna, è maggiore quando si opera in soluzioni alcaline e concentrate; ciò si spiega bene, perchè gli iponitriti sono più stabili in presenza di alcali e perchè la formazione di questi sali deve seguire l'andamento delle reazioni di secondo ordine; in questo caso, come è noto, la velocità di formazione è proporzionale al quadrato della concentrazione e così i sali si formano in modo assai più rapido e la biossiammoniaca viene sottratta ad altre decomposizioni che può subire e che finora sono state incompletamente studiate.

Naturalmente non è necessario applicare queste considerazioni ad alcuni altri processi di formazione degli iponitriti che sono stati trovati. E qui basti accennare alla sintesi di W. Wislicenus ([1]) che consiste nel far reagire l'acido nitroso sopra l'idrossilammina:

$$HO\cdot NO + H_2\,N\cdot OH = (HO)\,N:N\,(OH) + H_2O$$

e la formazione di iponitriti, scoperta da Divers ([2]) in seguito ad idrolisi dei sali dell'acido

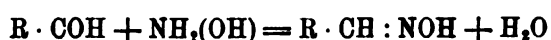
$$\begin{matrix}N_2\,O_2H\\|\\SO_3\,H\end{matrix},$$

che può venir riguardato come una nitrosoidrossilammina, analoga a quelle prima descritte.

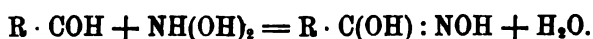
Sono reazioni abbastanze chiare e che facilmente si intendono. Hantzsch ammette che l'acido iponitroso sia stereoisomero della nitrammide ([3]); ma tale ipotesi, non giustificata da nessun fatto, è poco verosimile giacchè la nitrammide è un derivato dell'acido nitrico e come tale contiene i due atomi di ossigeno uniti ad uno stesso atomo di azoto.

([1]) Berliner Berichte, XXVI, 771.
([2]) Divers e Haga, Journ. Chem. Soc., 1885, 203.
([3]) Liebig's Annalen, 291, 317.

I pochi esempî finora riportati sono sufficienti per porre in rilievo le analogie e le differenze, cui venne anche prima accennato, che si riscontrano nel comportamento dell'ammoniaca e dei suoi prodotti di ossidazione, l'idrossilammina (ossiammoniaca) la biossiammoniaca e l'acido nitroso (triossiammoniaca).

Ammoniaca ed idrossilammina reagiscono entrambe col gruppo carbonilico, cianico, nitrico, con i composti non saturi, ecc.; a sua volta l'idrossilammina reagisce sopra le aldeidi con formazione di ossime:

$$R \cdot COH + NH_2(OH) = R \cdot CH : NOH + H_2O$$

nello stesso modo che la biossiammoniaca le trasforma in modo egualmente facile negli acidi idrossammici:

$$R \cdot COH + NH(OH)_2 = R \cdot C(OH) : NOH + H_2O.$$

Idrossilammina e biossiammoniaca reagiscono sui veri nitrosoderivati per dare rispettivamente diazocomposti:

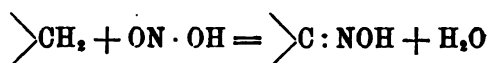
$$R \cdot NO + H_2N(OH) = R \cdot N : NOH + H_2O.$$

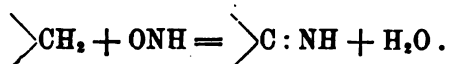
e nitrosoidrossilammine:

$$R \cdot NO + NH(OH)_2 = R \cdot NO : NOH + H_2O.$$

L'idrossilammina, come si è già detto, può addizionarsi ai doppi legami per dare idrossilammine sostituite (Harries) e da alcune esperienze eseguite risulta molto probabile che anche la biossiammoniaca faccia altrettanto, in questo caso con formazione di ossime. Anche l'acido nitroso reagisce sui composti non saturi, sebbene con formazione di sostanze un poco più complesse ma che stanno in relazione molto semplice con i prodotti da cui si è partiti.

L'acido nitroso reagisce inoltre sopra alcuni gruppi metilenici con formazione di isonitrosoderivati, per esempio:

$$>CH_2 + ON \cdot OH = >C : NOH + H_2O$$

e come accennano alcune ricerche iniziate ultimamente, pare che anche la biossiammoniaca si comporti nello stesso modo:

$$>CH_2 + ONH = >C : NH + H_2O.$$

L'acido nitroso trasforma le ammine secondarie nelle nitrosammine

$$R_2 \cdot NH + NOOH = R_2 \cdot N \cdot NO + H_2O$$

e si è già veduto come la formazione dei tetrazoni, dei composti diazoici e degli iponitriti, per mezzo della biossiammoniaca, si possa spiegare giovandosi di una reazione perfettamente analoga [1].

[1] La biossiammoniaca reagisce pure con i nitroderivati primarî ed anche col fenolo; in quest'ultimo caso si ottiene un prodotto che all'aria si colora intensamente in azzurro (probabilmente indofenolo).

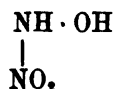
IV.

Nitrazioni per mezzo degli eteri nitrici.

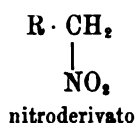
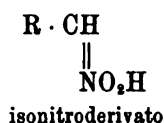
Come si è visto fin da principio, facendo reagire il nitrato di etile sopra l'idrossilammina in presenza di etilato sodico, si ottiene il sale dell'acido nitroidrossilamminico al quale (sotto tale forma) con grande probabilità spetta la struttura:

$$\begin{array}{l} NOH \\ \| \\ NO_2H \end{array}$$

che si può considerare come la tautomera della nitroidrossilammina

$$\begin{array}{l} NH \cdot OH \\ | \\ NO_2 \end{array}$$

Tali forme stanno fra loro nello stesso rapporto di un acido nitronico organico (isonitroderivato) al corrispondente nitrocomposto:

$$\begin{array}{ll} R \cdot CH & \qquad R \cdot CH_2 \\ \quad\;\, \| & \qquad \quad\;\, | \\ \quad\;\, NO_2H & \qquad \quad\;\, NO_2 \end{array}$$

isonitroderivato — nitroderivato

L'acido nitroidrossilamminico si può dunque risguardare come l'acido nitronico corrispondente alla nitroidrossilammina e l'impiego del nitrato di etile in presenza di alcali presenta quindi un nuovo mezzo di nitrazione che permette di ottenere direttamente i sali degli acidi nitronici senza passare per i corrispondenti nitroderivati. Questo è un vantaggio notevole perchè alcuni nitrocomposti, molto alterabili allo stato libero, sotto forma di sali presentano una grande stabilità.

Per mezzo della nuova reazione infatti è stato possibile preparare nitrocomposti che seguendo l'antico metodo di nitrazione diretta, per mezzo dell'acido nitrico (che nelle altre serie e specialmente nell'aromatica è di impiego generale) non fu possibile di ottenere.

In tal guisa venne preparato il β-nitroindolo (1)

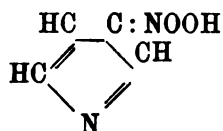
$$C_6H_4\langle \begin{array}{c} C \cdot NO_2 \\ \diagup\!\!\diagdown \\ NH \end{array} \rangle CH$$

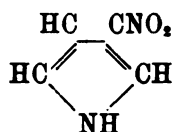
(1) Angelico e Velardi, Rend. Lincei, vol. XIII, 1° sem., 241.

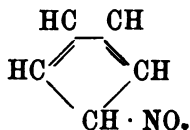
ed il β-nitrometilindolo (1)

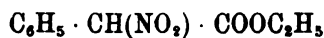
$$\begin{array}{c} C\cdot NO_2 \\ C_6H_4\langle\rangle C\cdot CH_3 \\ NH \end{array}$$

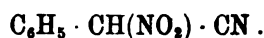
identico a quello che si ottiene per ossidazione del β-nitrosometilindolo; il pirrolo stesso fornisce un sale il quale è senza dubbio da considerarsi (2) come il sale sodico dell'acido pirrolnitronico

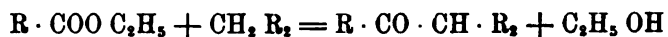
$$\begin{array}{ccc} HC & - & C:NOOH \\ HC & & CH \\ & N & \end{array}$$

il quale deriva dalla forma tautomera del β-nitropirrolo:

$$\begin{array}{ccc} HC & - & CNO_2 \\ HC & & CH \\ & NH & \end{array}$$

È da accennarsi infine che nello stesso modo è stato ottenuto il nitrociclopentadiene (3):

$$\begin{array}{ccc} HC & - & CH \\ HC & & CH \\ & CH\cdot NO_2 & \end{array}$$

ed i nitroderivati dell'etere fenilacetico

$$C_6H_5\cdot CH(NO_2)\cdot COOC_2H_5$$

e del cianuro di benzile (4):

$$C_6H_5\cdot CH(NO_2)\cdot CN\,.$$

Tale metodo di nitrazione, che permette di unire azoto ad azoto oppure azoto a carbonio, presenta una grande analogia con quel processo di sintesi, fondato sull'impiego degli eteri carbossilici:

$$R\cdot COO\,C_2H_5 + CH_2\,R_2 = R\cdot CO\cdot CH\cdot R_2 + C_2H_5\,OH$$

che è stato così fecondo nelle sue applicazioni e che forse quanto nessun altro ha contribuito allo sviluppo della chimica dei composti del carbonio.

Gli eteri dell'acido nitrico si comportano dunque in modo analogo agli eteri carbossilici e quindi è necessario ammettere che anche il meccanismo secondo cui la reazione si compie sia da spiegarsi nell'identico modo.

(1) Angeli e Angelico, Rend. Lincei, vol. XII, 1° sem., 344.
(2) Angeli, Angelico e Calvello, Rend. Lincei, vol. XI, 2° sem., 16.
(3) Thiele, Berliner Berichte, XXXIII, 667.
(4) W. Wislicenus e A. Endres, Berliner Berichte, XXXVI, 1194.

PUBBLICAZIONI

DALLE QUALI VENNE DESUNTA LA PRESENTE MEMORIA.

1896. Angeli A., *Sull'azione del nitrato di etile sopra l'idrossilammina.* Rendiconti Lincei, vol. V, 1° sem., pag. 120.

» Angeli A., *Sopra la nitroidrossilammina.* Gazzetta chimica, XXVI (II), pag. 17.

» Angeli A., *Ueber das Nitrohydroxylamin.* Chemiker Zeitung, 1896, pag. 176.

» Angeli A., *Ueber die Einwirkung des Hydroxylamins auf Nitrobenzol.* Berliner Berichte, XXIX, pag. 1384.

1897. Angeli A., *Ueber einige explosive Gemische.* Chemiker Zeitung, 1897, pag. 893.

» Angeli A., *Sopra l'acido idrossilamminico.* Gazzetta chimica XXVII (II), pag. 357.

1899. Angeli A. e Angelico F., *Sopra alcuni nitroderivati aromatici.* Rend. Lincei, 1899, vol. VIII, 2° sem., pag. 28.

1900. Angeli A., *Sopra i nitrochetoni e gli ortonitroderivati.* Rend. Lincei, 1900, vol. IX, 1° sem., pag. 41.

» Angeli A. e Angelico F., *Sopra l'acido nitroidrossilamminico.* Gazzetta chimica, XXX (I) pag. 593.

» Angeli A. e Angelico F., *Sopra una reazione dei nitroderivati* Rend. Lincei, vol. IX, 2° sem., pag. 44.

» Angeli A., *Sopra i tetrazoni.* Rend. Lincei, vol. IX, 2° sem., pag. 180.

1901. Angeli A. e Angelico F., *Sopra alcune reazioni del nitrossile.* Rend. Lincei, vol. X, 1° sem., pag. 164.

» Angeli A. e Angelico F., *Ricerche sopra l'acido nitroidrossilamminico.* Rend. Lincei, vol. X, 1° sem., pag. 249.

» Rimini E., *Sopra una reazione delle aldeidi.* Rend. Lincei, vol. X, 1° sem., pag. 355.

» Angeli. A., *Sopra alcuni acidi dell'azoto.* Rend. Lincei, vol. X, 2° sem., pag. 158.

» Angeli A. e Angelico F., *Sopra alcuni composti dell'azoto.* Rend. Lincei, vol. X, 2° sem.. pag. 303.

» Angelico F. e Fanara S., *Sopra l'acido nitroidrossilamminico,* Gazzetta chimica, XXXI (II), pag. 15.

1902. Angeli A., Angelico F. e Scurti F., *Ricerche sopra alcuni acidi idrossammici.* Rend. Lincei, vol. XI, 1° sem., pag. 555.

» Angeli A., Angelico F. e Calvello E., *Sopra alcuni derivati del pirrolo.* Rend. Lincei, vol. XI, 2° sem., pag. 16.

1903. Angeli A. e Angelico F., *Sopra i nitropirroli.* Rend. Lincei, vol. XII, 1° sem., p. 344.

1904. Angeli A. e Angelico F., *Sopra alcuni acidi idrossammici.* Gazzetta chimica, XXXIV (II), pag. 50.

» Angelico F. e Velardi G., *Sopra il nitroindolo.* Rend. Lincei, vol. XIII, 1° sem., pag. 241.

» Angeli A., *Neue Bildungsweise von Diazoverbindungen.* Berliner Berichte, XXXVII, pag. 2390.

» Angeli A. e Angelico F., *Nuove reazioni del nitrossile.* Rend. Lincei, vol. XIII, 2° sem., pag. 67.

» Velardi G. *Sopra la ricerca dei composti aldeidici.* Gazzetta chimica, XXXIV (II), pag. 66.

1905. Angeli A. e Castellana V., *Sopra una reazione delle ammine secondarie.* Rend. Lincei, vol. XIV, 1° sem.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 5°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII. (1892-1904). Fasc. 1°-8°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 3°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

4

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCI

SERIE QUINTA — VOLUME V — FASCICOLO IV.

RAFFAELLO NASINI

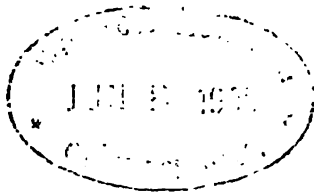
LE LEGGI FONDAMENTALI

DELLA

STECHIOMETRIA CHIMICA E LA TEORIA ATOMICA

IL DISCORSO FARADAY DEL PROF. W. OSTWALD

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

Le leggi fondamentali della stechiometria chimica e la teoria atomica.
Il discorso Faraday del prof. W. Ostwald.

Memoria del Corrispondente RAFFAELLO NASINI

presentata nella seduta del 18 dicembre 1905.

Il giorno 19 aprile 1904 il prof. W. Ostwald (¹) tenne a Londra il discorso Faraday sopra i fondamenti della stechiometria, scopo del quale discorso sarebbe di mostrare l'inutilità della teoria atomica nella esplicazione e nella deduzione delle leggi principalissime della chimica, quelle cioè delle proporzioni definite e multiple e dei pesi di combinazioni, le quali leggi potrebbero invece dedursi *a priori* dalla dinamica chimica. « È possibile (sono le sue precise parole) di dedurre, basandosi unicamente sulla dinamica chimica, le leggi fondamentali della stechiometria, vale a dire la legge delle proporzioni definite, quella delle proporzioni multiple e quella dei numeri proporzionali. La dinamica chimica permette quindi di raggiungere quello a cui non si era arrivati senza il soccorso della teoria atomica. Essa ha quindi resa superflua la teoria atomica in questo ordine di idee ».

Il discorso Faraday ha sempre avuto nelle nostre scienze una importanza capitale. Certo non esagero dicendo che in quell'anfiteatro così suggestivo della Royal Institution, le più ardite e geniali concezioni scientifiche sono state esposte ed esposte davanti ad un pubblico che più eletto intellettualmente è difficile di trovare. Spesso, col discorso Faraday, le idee nuove ed ardite, hanno avuto la loro sanzione, e data da quel momento il loro generale espandersi e la loro generale accettazione. Potrà dirsi questo anche in riguardo al discorso del prof. Ostwald?

La grande importanza dell'argomento mi ha indotto ad esporre quello che io penso in proposito: e sono certo che il prof. Ostwald non se la vorrà prender con me, se io mi permetto di avere idee assài differenti dalle sue, ma vorrà invece, nel-

(¹) W. Ostwald, *Éléments et combinaisons.* Journal de Chimie Physique, t. II, pag. 377-1904; *Ueber die Grundlagen der Stöchiometrie.* Zeitschrift für Elektrochemie, X, pag. 572, anno 1904 (Seduta della Riunione della Società Bunsen in Bonn). Vedi anche Journ. chem. Soc. e opuscolo a parte.

l'interesse dell'insegnamento e del metodo, illuminare, là dove sbaglia, un modesto maestro, che non crede per ora di poter cambiare strada nell'esposizione didattica delle leggi fondamentali della chimica.

Il prof. Ostwald riconosce che la sua affermazione lo metterà sopra un terreno piuttosto vulcanico perchè, tra le altre ragioni, circa un secolo fa la teoria atomica era nata proprio in Inghilterra, e molti dei presenti al suo discorso avevano partecipato al recente centesimo anniversario di questo avvenimento, e in questa occasione si erano convinti di nuovo degli enormi progressi compiuti dalla scienza in base a questa teoria. Ed anche egli avrebbe potuto aggiungere che trentadue anni or sono in quella stessa Aula aveva risonato la voce potente del Cannizzaro, mostrando quale immensa utilità la teoria atomica, sia pure considerata come un insieme di relazioni stechiometriche e indipendente dalla concezione filosofica dell'atomo, fosse stata e fosse per il progresso della chimica: quali difficoltà aveva eliminate, quanto ordine e quanta chiarezza aveva portato in tutte le questioni; gli inni che a lei innalzarono Th. Thompson, il Berzelius, il Liebig. Quella teoria atomica che esposta dal Cannizzaro stesso nel Congresso di Karlsruhe rischiarò di tanta luce la mente di quel profondo pensatore che è il Mendeleeff! [1].

Terreno scottante l'Inghilterra, perchè in essa nacque la teoria atomica daltoniana, ma terreno scottante anche, e direi più, l'Italia. Il concetto daltoniano certo fu il primo germe e servì a dare una esplicazione, invocando, come vedremo, altre necessarie ipotesi, alle leggi fondamentali: però di per sè sarebbe rimasto assai sterile e forse, lo diremo a suo tempo, non è da escludersi che possa essere stato dannoso per un più rapido sviluppo della scienza. Ma fu in Italia che si sviluppò la vera

[1] Riporto integralmente le parole del Cannizzaro:

« Le così dette leggi delle proporzioni definite, reciproche e multiple, degli equivalenti semplici e composti e dei volumi gassosi, senza l'aiuto della teoria atomica e molecolare, non penetrano abbastanza nell'intelligenza della maggior parte degli studenti e non vi si fissano; ma vi restano come isolate e fluttuanti senza alcun legame fra loro.

« Al contrario, per abbracciare tutte queste leggi d'un solo colpo d'occhio e d'uno sguardo netto e chiaro, basta comprendere che le cose avvengono come se in realtà ciascun elemento fosse fatto d'atomi omogenei dotati di un peso speciale ed invariabile e come se dalla juxtaposizione di questi atomi risultassero le molecole dei corpi semplici e composti, molecole di cui esisterebbero sempre numeri uguali in volumi uguali di gas perfetti nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione: cioè basta comprendere la teoria atomica e molecolare al grado di sviluppo cui è giunta oggi.

« Essa è il riassunto più succinto, più preciso, più evidente e più accessibile ai differenti tipi di spiriti che si incontrano in una scuola, di tutto ciò che concerne l'origine, il significato, il valore e l'uso delle formule grezze e delle equazioni.

« Essa deve esser dunque introdotta di buon'ora nell'insegnamento della chimica: quand'anche non si volesse riguardare se non come un artificio, una finzione utile per aiutare lo spirito a scoprire le relazioni tra i fatti.

« Non bisogna maravigliarsi di questa necessità di una ipotesi per comprendere delle leggi. Avviene spesso che l'intelligenza di chi impara una scienza nuova, deve passare per tutte le fasi per le quali passò la scienza medesima nella sua evoluzione storica ». S. Cannizzaro, *Sui limiti e sulla forma dello insegnamento teorico della Chimica*. Discorso Faraday, *Scritti intorno alla teoria molecolare e atomica*, ecc. Palermo, Tipografia « Lo Statuto », 1896, pag. 297.

teoria molecolare e atomica, quella che ci serve di guida e in base alla quale sono determinati i pesi molecolari e atomici, che si chiamino pure, se si vuole, pesi di reazione e pesi di combinazione. Fu in Italia che, per opera dell'Avogadro, si introdusse la distinzione tra molecola e atomo e si giunse dal grande piemontese a quella geniale ipotesi che per la maggior parte dei chimici e dei fisici è sempre la base della chimica attuale. Fu pure in Italia che il Cannizzaro, dalla regola dell'Avogadro traendo tutto quello che essa poteva dare, potè mettere questa ipotesi d'accordo con tutti i fatti chimici e fisici e giunse a stabilire, in base alla sua legge degli atomi, quel sistema di pesi atomici che meglio risponde di ogni altro alla semplicità delle leggi che incontriamo nella nostra scienza. Terreno scottante dunque anche l'Italia, e questo spiega anche un poco il perchè di queste mie osservazioni.

Esporrò ordinatamente le idee dell'Ostwald facendo poi seguire le osservazioni mie.

La teoria atomica e la deduzione delle leggi fondamentali.

L'Ostwald sembra affermare che sin qui si erano potute dedurre le leggi fondamentali in base alla teoria atomica. Ora questo non pare veramente esatto e credo che nessun chimico ciò abbia pensato.

Il grande nostro maestro colla sua consueta vivacità, che gli anni non hanno diminuita, ha già messo in rilievo che non è giusto di dire che sino al giorno d'oggi era stato possibile dedurre le leggi stechiometriche solo poggiandosi sull'ipotesi atomica: « poichè le leggi stechiometriche sono state dedotte e dimostrate dalla esperienza indipendentemente dall'ipotesi o teoria molecolare ed atomica, che ha servito e serve a spiegarle o per lo meno a collegarle in un modello. L'ipotesi atomica ha qualche volta affrettato lo scoprimento di qualcuna di quelle leggi per mezzo dell'esperienza, ma è questa sola che le ha dimostrate ed è questa la vera base su cui sono fondate e riposano » (1).

Ed infatti: ammessa quanto si vuole la costituzione atomica della materia, attribuendo pesi differenti agli atomi degli elementi differenti, in nessun modo ne consegue la legge delle proporzioni definite: inoltre, in riguardo anche alla verificazione esperimentale di essa legge, supposto pure che le combinazioni avvengano in modo definito, il che può spiegarsi ammettendo che lo stesso numero di atomi di un elemento si unisca collo stesso numero di quelli di un altro, se questi numeri fossero molto complicati non sarebbe stata possibile la deduzione *a priori* delle leggi delle proporzioni multiple e degli equivalenti: od almeno esse si sarebbero del tutto sottratte alla verifica sperimentale.

Si possono portare facili esempi.

Supponiamo di avere due ossidi di azoto e che sieno i soliti i pesi atomici dei due elementi, azoto e ossigeno: sia un ossido $N^{100} O^{307}$, l'altro $N^{105} O^{347}$: si avrebbe pel primo per $N = 14$, $O = 36.32$, pel secondo per $N = 14$, $O = 37.63$, quindi nessun accenno alla legge delle proporzioni multiple, pur potendo sussistere l'ipotesi atomica

(1) Cannizzaro, nei Rend. Soc. chim. Roma, anno 1904, pag. 128. Seduta del 24 luglio 1904.

e la legge delle proporzioni definite. E lo stesso è a dirsi per la legge degli equivalenti. Se non si ammette che la sostituzione si faccia atomo per atomo o per rapporti semplicissimi di atomi, nulla si troverebbe. Se si ammette p. es. che 112 atomi di bromo possano rimpiazzare 127 atomi di cloro una volta, 155 un'altra, che 107 di bromo sostituiscano 188 di ossigeno, che alla loro volta 117 di bromo si uniscano con 139 di cloro e così via, esperimentalmente parlando nulla si troverebbe. Quindi possiamo dire che il Dalton, oltre l'ipotesi atomica, dovette fare, e fece, anche l'altra che l'unione degli atomi avvenisse sempre secondo rapporti numerici semplicissimi. Più volte è stato messo in rilievo che se la chimica avesse cominciato collo studio dei composti organici e ne avesse avuto a sua disposizione il numero stragrande che ne ha adesso, difficilmente si sarebbe giunti alla deduzione esperimentale delle leggi fondamentali.

Data però questa ipotesi sussidiaria del Dalton è certo che esse leggi ricevono una esplicazione semplicissima e didatticamente molto utile, che per l'indole dirò quasi pedagogica di questa Memoria, credo opportuno di ricordare.

Legge delle proporzioni definite. — L'unione degli elementi avviene secondo la juxtaposizione degli atomi che conservano sempre il loro peso, e, nella stessa combinazione, il loro numero: quindi uguali vengono ad essere le quantità dei componenti una specie chimica.

Legge delle proporzioni multiple. — Un atomo di un elemento si può unire con uno, due, tre atomi di un altro elemento: oppure l'unione avviene secondo rapporti semplicissimi nel numero di atomi: quindi proporzioni doppie, triple nelle quantità di un elemento quando ci si riferisca ad una quantità costante dell'altro.

Legge degli equivalenti. — Le combinazioni avvengono sostituendosi un atomo ad un altro, quindi rapporti invariati tra i pesi esprimenti il peso dell'atomo o multipli semplici di questo peso, qualunque sia la combinazione di cui l'elemento fa parte: che il cloro si unisca coll'ossigeno, col bromo, coll'idrogeno, coll'argento è sempre l'atomo col suo peso invariabile che entra nei diversi composti, che si sostituisce ad altri atomi per formare combinazioni nuove e così via.

Esplicazioni eleganti come si vede, ma non dimostrazioni, nè deduzioni.

Deduzione della legge delle proporzioni definite.

L'Ostwald si ferma sul concetto di equilibrio e parla a lungo sulle fasi. Egli dice che si può fare a meno, nei casi più semplici, di introdurre il concetto di componente, su cui ci sono tante divergenze. Ma poichè nei ragionamenti successivi e nelle deduzioni successive, quelle che a noi specialmente interessano, delle fasi in definitiva non si parla più, così credo più opportuno di soffermarmi sul punto fondamentale, sulla deduzione della legge delle proporzioni definite.

L'Ostwald chiama ilotrope quelle sostanze che, senza cambiamento, possono trasformarsi in un'altra fase e poi di nuovo trasformarsi nella primitiva: invece le sostanze che si cambiano, trasformandosi in un'altra fase, egli le chiama soluzioni in senso lato. Questo, egli dice, è il concetto generale di soluzioni. L'introduzione del

nuovo nome era necessaria, secondo il suo modo di vedere, perche il concetto di sostanza ilotropa è molto più largo che il concetto di individuo chimico: questo non è che un caso speciale del concetto di sostanza ilotropa.

Il concetto di forme e di gruppi ilotropi fu introdotto dall'Ostwald già nel 1896 nel suo « *Trattato di Chimica generale* » (1). Senza ricorrere allora al linguaggio tolto alla teoria delle fasi, egli definiva come ilotrope quelle sostanze le quali possono subire una trasformazione in altre sostanze, tale che la composizione elementare del prodotto di trasformazione sia uguale a quella della sostanza da cui si parte. Differiscono dalle sostanze isomere, le quali pure hanno uguaglianza di composizione, perchè le sostanze ilotrope sono effettivamente trasformabili, il che può non essere per le sostanze isomere: dall'altra parte poi perchè non debbono essere necessariamente individui chimici, ma possono constare anche di mescolanze di più sostanze. Se si stabilisce un'ordinaria equazione chimica, ogni termine dell'uguaglianza rappresenta una forma ilotropa delle sostanze indicate e tutta l'uguaglianza un gruppo ilotropo. E si spiega ancora più chiaramente. Ghiaccio, acqua, vapore formano il gruppo ilotropo H_2O; così l'acido cianico, cianurico, la ciamelide e i loro vapori il gruppo ilotropo CNOH. Il gruppo ilotropo zolfo contiene sei o otto forme diverse. Le trasformazioni chimiche consistono nel passaggio da una forma ilotropa ad un'altra: se due forme ilotrope si trovano una in presenza dell'altra senza influenzarsi scambievolmente, allora si ha l'equilibrio chimico. Queste le prime idee dell'Ostwald sull'ilotropia.

Distingue l'Ostwald nella « Faraday Lecture » due specie di sostanze ilotrope, quelle che tali sono soltanto in determinate condizioni e quelle che tali si mantengono in limiti più estesi in riguardo alle condizioni esteriori. E si ferma sulla distillazione delle mescolanze di liquidi e precisamente su quelle che ammettono un massimo nel punto di ebullizione, come le soluzioni acquose di acidi minerali studiate dal Roscoe. Come è noto esse presentano un massimo nel punto di ebullizione per una determinata concentrazione, cosicchè l'acido di quella speciale concentrazione bolle ad una determinata temperatura, alla quale passa tutto inalterato come se fosse una specie chimica vera e propria che bolla senza decomporsi. Ma se si varia la pressione, allora si nota che quella stessa miscela si comporta differentemente in quanto che non bolle tutta a una determinata temperatura: o, se vogliamo, mentre nel primo caso si aveva ilotropia, cioè il liquido e il vapore avevano la stessa composizione, variando la pressione ciò non avviene più e il vapore ha composizione diversa dal liquido, il residuo ha composizione differente dal distillato. Quindi, per tali miscugli, l'ilotropia non si ha che per una determinata temperatura ad una determinata pressione, o per una determinata pressione ad una determinata temperatura, pur sussistendo, come è noto, il fatto fondamentale che il punto di ebullizione è costante anche ad altre temperature (sotto pressioni differenti), ma la composizione del miscuglio è diversa. E questa fu la ragione principale che fece riconoscere non trattarsi di specie chimiche. Invece per una specie chimica, l'alcool p. es., l'ilotropia si ha per un intervallo assai esteso di pressione e di temperatura, si ha, p. es., aumentando la temperatura sino

(1) Lehrbuch der allg. Chemie. Leipzig, 1896 2 Band, 2ª parte, pag. 298.

a che non si raggiunga quella a cui l'alcool stesso si decomporrebbe: ma, sino a questo limite, il vapore ha la stessa composizione del liquido, il residuo la stessa composizione del distillato. Mostra l'Ostwald colle curve che rappresentano le variazioni dei punti di ebullizione dei miscugli in funzione della composizione, come procedano le cose: per ogni miscuglio si ha una curva che presenta un massimo, ma questo massimo non corrisponde alla stessa composizione del miscuglio, cosicchè facendo per i massimi passare una curva, questa avrà forma e inclinazione diverse: solo quando il massimo sarà indipendente dalla composizione, unendo i punti che rappresentano i massimi si avrà una retta perpendicolare all'asse delle X. Questa è la caratteristica dell'individuo chimico, questo si verifica quando si ha ilotropia, indipendente, entro limiti sufficientemente estesi, dalla temperatura e dalla pressione. Esprimendoci in linguaggio volgare, quando una sostanza conserva la stessa composizione, bollendo a un punto fisso a diverse pressioni, essa è, secondo l'Ostwald, una specie chimica. Sin qui era questa una delle proprietà più importanti per caratterizzare la specie chimica: per l'Ostwald ne costituisce la definizione. Che cosa è dunque la specie chimica per l'Ostwald? è una sostanza che ha composizione costante e che bolle a temperatura fissa senza decomporsi a varie pressioni. Parrà che io sbagli, ma pure è così.

Debbo prima fare una obiezione preliminare. Per le soluzioni vanno bene le curve dell'Ostwald, che sono quelle del Konowaloff rovesciate. Ma si può parlare di simili curve per le vere specie chimiche e per quelle sostanze eminentemente ilotrope che sono gli elementi? Non esistono in tali casi le curve dalle quali si dovrebbe originare quella caratteristica che definirebbe la specie chimica, giacchè dal miscuglio non si passa in realtà alla specie chimica per gradi seguitando ad aggiungere uno dei componenti, ma bruscamente e indipendentemente, entro certi limiti, dalle proporzioni loro. Ad ogni modo ecco la definizione dell'Ostwald: « *Tra le infinite possibilità della forma di tal curva noi distinguiamo il caso di una linea retta verticale. Ciò significa che la composizione è indipendente dalla pressione. Quando ciò avviene noi chiamiamo questo corpo ilotropo una sostanza o un individuo chimico* ».

Per molti motivi, a me pare non sia accettabile la definizione dell'Ostwald della specie chimica: 1° perchè è pensabile e prevedibile che vi sieno sostanze ilotrope in un campo sufficientemente esteso e che sieno miscugli e non specie chimiche; 2° perchè, chimicamente parlando, non è la maggiore o minore estensione del campo di esistenza che caratterizza la specie chimica; 3° perche in questa definizione della specie chimica non si tien conto che, per noi chimici, la specie chimica, è caratterizzata non solo dal fatto della fissità dei rapporti, ma anche dall'essere i componenti in rapporti esprimibili dai numeri equivalenti.

L'Ostwald, nel suo *Trattato di chimica generale*, a proposito proprio degli acidi studiati dal Roscoe, dice queste precise parole (¹):

« Si potrebbe anche pensare che ci fossero combinazioni di liquidi tali che il

(¹) Es wäre denkbar, dass es Flüssigkeitenkombinationen gäbe, bei welchen das Minimum des Dampfdrucks unabhängig von der Grösse derselben stets auf den gleichen Prozentgehalt trifft. solche Kombinationen würden auch bei verschiedenen Druck und verschiedene Temperatur keine Aenderungen in der Zuzammensetzung des nach bleibendes Anteiles erkennen lassen. Ostwald, Lehrbuch der allg. Chemie, 2ª Auflage, I, pag. 649.

minimo della tensione di vapore (massimo del punto di ebullizione), indipendentemente dalla sua grandezza, si avesse sempre per un uguale percentuale dei componenti: tali combinazioni non mostrerebbero a diverse temperature e a diverse pressioni nessuna differenza nella composizione del liquido che resta indietro nella distillazione ».

Ora questo fatto, se si verificasse, non toglierebbe che si trattasse di soluzioni, sia perchè mancherebbe il rapporto stechiometrico, sia perchè si potrebbe separare una sostanza dall'altra con semplici mezzi fisici, meccanici e via discorrendo.

È a notarsi che su questo argomento tutti quelli che se ne sono occupati non hanno ammesso come necessità che la composizione debba variare colla pressione, sebbene questo debba ritenersi come il caso più frequente. Dice il Duhem: (1) « La composition d'un composé défini ne change pas avec la pression à laquelle on le soumet: au contraire si au lieu de distiller notre mélange liquide sous la pression π, nous le distillons sous une pression différente π', le mélange liquide capable de passer en entier à la distillation sans changement de composition et sans variation du point d'ébullition correspondra à une valeur de ξ' de x, qui ne sera pas en général égale a ζ ».

È poi da mettersi in rilievo, almeno dal punto di vista esperimentale, che G. André, nella sue Ricerche *Sur les combinaisons de la triméthylamine avec les acides formique et acétique* (2) non constatò nessun cambiamento nella posizione del minimo di tensione tra 760 mm. e 16 mm. per alcuni determinati miscugli.

Il Roozeboom (3) opina che realmente nella maggior parte dei casi non ci possa essere completa uguaglianza della concentrazione o composizione colle variazioni di temperatura e di pressione. Cosicchè crede che alle esperienze dell'André si debba dare solo questo significato, che le differenze nella composizione sono molto piccole.

Ma sia come vuolsi, c'è un caso in cui si può prevedere *a priori* che si potrà avere un *miscuglio*, il quale pure essendo un miscuglio, presenterà un massimo nel punto di ebullizione indipendente dalla composizione, ossia presenterà la completa ilotropia in termini estesi di temperatura e di pressione: questo avverrà per un miscuglio di due antipodi ottici che offra un massimo nel punto di ebullizione: e questo si avrà per un miscuglio a parti uguali dell'uno e dell'altro. Ciò è stato messo in rilievo dal Roozeboom (4), le cui parole ho presso che tradotte:

« Nur eine einzige Kategorie von Flüssigkeitspaaren lässt eine unveränderte Lage des Punktes des Maximumdruckes bei allen Temperaturen vorhersehen: nämlich die Mischungen optischer Antipoden. Wenn solche ein Maximum zeigen so wird dieses immer bei 50 Mol. Prz. liegen ».

Credo opportuno di citare anche quello che a me scriveva in proposito su questo argomento il prof. G. Bruni, alla competenza del quale mi era rivolto:

« Qualsiasi diagramma nel quale si rappresentino sulle ascisse la composizione del miscuglio di due antipodi ottici partendo da 100 % del d e arrivando al 100 %

(1) Duhem, *Thermodynamique et Chimie, Leçons élémentaires*, etc. Paris, Hermann, 1902, pag. 259.

(2) Bull. Soc. chimique, 3me, XXII, pag. 285.

(3) *Die heterogenen Gleichgewichte*, etc., Zweites Heft, Systeme aus 2 Komponenten. Vieweg, 1904, pag. 93.

(4) Loco citato.

del *l* e sulle ordinate una proprietà qualsiasi di questa miscela, costituisce necessariamente una curva simmetrica rispetto all'ordinata che esprime la composizione del miscuglio inattivo (50 %). Quindi se la curva ha un punto di massimo o di minimo od un punto multiplo (per es. crioidratico) questo deve trovarsi sulla detta ordinata. Questo naturalmente per la uguaglianza delle proprietà fisiche dei due componenti.

« Nella miscela di due componenti non simmetrici (per es. acqua e acido formico, ecc.) le curve di tensione del vapore aventi un massimo subiscono uno spostamento di questo massimo (in generale) col variare della temperatura a cui sono determinate. Nelle miscele di isomeri ottici invece questo non potrà accadere, ma tutte le curve resteranno parallele coi massimi sull'ordinata corrispondente al 50 %.

« In pratica i liquidi racemici bollono generalmente alla stessa temperatura dei componenti attivi e quindi le curve anzidette saranno delle rette orizzontali. Così tutte le miscele a qualsiasi composizione percentuale del composto *d* e del composto *l*, sono ilotrope nel senso dell'Ostwald e restano tali a qualsiasi temperatura (se si osservano le curve della tensione di vapore) ed a qualsiasi pressione (se si determinano le curve di ebullizione) ».

Per tutte queste considerazioni a me pare che la definizione dell'Ostwald non sia accettabile, giacchè non solo non è escluso il caso che si possano avere dei miscugli ilotropi per intervalli considerevoli di temperatura e di pressione, ma si hanno realmente tali miscugli e si può prevedere l'esistenza di altri pei quali la curva dei massimi è una retta perpendicolare all'asse delle X.

Nondimeno si potrebbe forse anche, modificando la definizione di sostanza ilotropa, giungere alla conseguenza dell'Ostwald, in ciò che riguarda la deduzione della legge, se non ci fosse l'obiezione fondamentale che si possono dare sostanze ilotrope che pur non sono specie chimiche. Si potrebbero definire come sostanze ilotrope quelle che danno fasi aventi proprietà fisiche costanti: basterebbe constatare in tal caso per i singoli distillati ottenuti a temperature e pressioni differenti la costanza delle proprietà fisiche, senza dovere constatare la fissità delle proporzioni il che, come ho detto, rende superflua la deduzione.

Od anche per maggiore semplicità si potrebbe dire che tutte le fasi ottenute variando temperatura e pressione debbono comportarsi identicamente, riportate a una certa temperatura e a una certa pressione: nel qual caso la sola determinazione del punto di ebullizione ad una certa pressione dei vari distillati e dei vari residui ottenuti a temperature e a pressioni differenti, basterebbe per stabilire che si tratta di corpi a composizione costante.

Bene inteso che le obiezioni da me fatte riguardo a ciò che dice l'Ostwald — in quanto definisce la specie chimica — non perdono in nulla il loro valore. Il ragionamento che ho tracciato non so poi quanto sarebbe logicamente corretto, perchè prima bisognerebbe provare che la costanza di una o più determinate proprietà fisiche porta *necessariamente*, non come *controllo*, alla costanza di composizione.

Noi ricorriamo sì alla constatazione della costanza nelle proprietà fisiche per riconoscere e identificare le specie chimiche, ma, se si tratta di composti nuovi, l'affermazione finale deve esser sempre data dall'analisi, la quale deve dare risultati identici per i diversi cambiamenti di fase (sostanza solida, liquida, gassosa, disciolta, cristallizzata anche più volte ecc. ecc.).

Riguardo al secondo punto, a me sembra che non si possa nemmeno dire che il concetto di specie chimica sia necessariamente connesso colla estensione del suo campo di possibile esistenza. Se ricorrono gli estremi voluti, cioè fissità di rapporti e rapporti esprimibili per quantità stechiometriche, sparizione delle proprietà dei componenti, proprietà fisiche costanti, ecc. ecc., la sostanza noi là chiameremo specie chimica ancor quando il campo di esistenza fosse limitato a un intervallo di pochissimi gradi di temperatura. E qui debbo dire di passaggio come non sembri didatticamento corretto di dare una definizione in materia sperimentale basandosi sopra una proprietà che per la maggior parte delle sostanze non si può constatare. In che modo potremmo giudicare dell'ilotropia della maggior parte dei composti esplosivi e di quelli non suscettibili di prendere lo stato aeriforme?

Finalmente è evidente che la definizione dell' Ostwald non implica in nessun modo che i componenti della specie chimica debbano trovarsi in quantità espresse da multipli semplici degli equivalenti; e così viene trascurata una delle condizioni fondamentali perchè una sostanza si abbia a ritenere quale una specie chimica.

Sin qui si tratta di definizione: veniamo alla deduzione della legge delle proporzioni definite.

« L'individuo chimico è un corpo che forma delle fasi ilotrope in una determinata regione di temperatura e di pressione ».

Cito le parole testuali dell'Ostwald e seguito a citarle.

« Ora l'esperienza ci mostra che i corpi che hanno simile proprietà si formano frequentemente partendo da altri corpi, nel modo stesso delle soluzioni. Quando questo è il caso, risulta dalla precedente definizione dell'individuo chimico che la composizione del corpo formato deve corrispondere a un rapporto costante e determinato dei componenti, che, entro certi limiti, è indipendente dàllà pressione e dalla temperatura.

« Così *la nozione stessa dell'individuo chimico permette di dedurre la prima legge stechiometrica, la legge delle proporzioni definite* ».

È l'Ostwald che ha sottolineato queste parole.

Io ritengo che siamo ben lontani da una deduzione. In parole povere, sostanza ilotropa è quella che avendo composizione fissa bolle, mantenendo la stessa composizione, à temperatura diversa sotto diverse pressioni. Nel concetto d'ilotropria c'è il concetto della fissità delle proporzioni, altrimenti che cosa potremmo dire dal momento che i parametri sono le proporzioni dei componenti e il punto di ebullizione? Dunque bisogna constatare che, bollendo la sostanza, il vapore e il liquido hanno la stessa composizione e che la stessa composizione si mantiene se l'ebullizione avviene, per variata pressione, a temperatura diversa. In altri termini, bisogna constatare che la composizione è costante perchè si possa dire che una determinta sostanza è un individuo chimico. E allora? Si può parlare di deduzione della legge delle proporzioni fisse, se la definizione implica questa fissità e la verifica sperimentale si riferisce al riconoscimento di questa fissità?

Malgrado questo, l'Ostwald dice: « Come avete visto, questa deduzione è straordinariamente semplice: il modo in cui si concepisce l'individuo chimico porta necessariamente con sè la costanza della composizione ».

E qui vediamo spuntare, trasformata, un'idea del Wald.

Definizione degli elementi.

Giunge poi l'Ostwald al concetto di elemento. La sostanza ilotropa, se si esce dal dominio in cui l'ilotropia si mantiene, passa ad essere una soluzione, si può, formando altre fasi, decomporre in parti differenti. In termini poveri, la specie chimica si decompone. Non so però quanto sia giusto il parlare di soluzione: e se la decomposizione avviene appunto subito in varie fasi, che cosa è la soluzione? Non certo il sistema delle fasi che di per sè è inomogeneo? Ma passiamo oltre.

Esistono certe sostanze, dice l'Ostwald, per le quali non si è mai osservato il passaggio in un dominio in cui si comportino come soluzioni. *Queste sostanze si chiamano elementi.* Gli elementi sono, in altri termini, dei corpi che sottomessi a tutte le condizioni conosciute non possono formare che fasi ilotrope.

Su questa definizione di elemento io avrei molto da osservare. *Sono corpi che sottomessi a tutte le condizioni conosciute non possono dare che fasi ilotrope.* Ora si dovrebbe intendere, trattandosi di ilotropia, che le condizioni non riguardano che la temperatura e la pressione e allora la silice, l'ossido di magnesio si comportano precisamente come un elemento, perchè non fondendo, o fondendo senza decomposizione anche alla temperatura del forno elettrico, si comportano nè più nè meno come il carbonio. Se poi, tra tutte le condizioni, si dovessero includere anche quelle che hanno relazione colle trasformazioni chimiche, pure in tal caso la cosa sarebbe inesatta. Perchè tanto il carbonio quanto l'ossido di magnesio e la silice reagiscono e danno altre fasi, quindi difficilmente si potrà definire fisicamente l'elemento e bisognerà sempre introdurvi il concetto della sua non ulteriore scindibilità, della sua non trasformabilità che a patto di aggiungere a lui qualche cosa (salvo la trasformabilità senza cambiamento di peso). Che se poi si volesse dire che dallo elemento non si può *per ulteriore scissione* ricavare che una fase ilotropa, allora tanto vale l'antica definizione, colla quale, astrazione fatta dal linguaggio diverso, essa coinciderebbe.

Nè sarebbe corretto il dire: noi sappiamo, per esempio, che dall'ossido di magnesio si può ricavare magnesio ed ossigeno. La definizione deve mettere in condizioni tali, esperimentalmente, da poter riconoscere se siamo o no in presenza dell'oggetto definito. Qui non si tratta che del riconoscimento dell'ilotropia, e sperimentalmente, come ho detto, la magnesia e il carbonio non presentano nessuna differenza. Si può obiettare: a una temperatura sufficientemente elevata una si scinderà e l'altro no. Che ne sappiamo? possiamo fare queste ipotesi sperimentali nel campo di una definizione? A me queste ipotesi sperimentali, di cui ora si fa spesso tanto abuso proprio da chi non vuole ipotesi, sembrano assai, assai più pericolose che quelle filosofiche e mentali. Le comprendo in certi casi. Per es., J. J. Thomson potè dedurre le leggi riguardanti le soluzioni diluite ammettendo che ogni corpo, a temperatura sufficientemente elevata o a pressione sufficientemente bassa, prenda lo stato aeriforme: anche la parete semipermeabile è in fondo una finzione sperimentale; ma in questo caso il loro impiego è giustificato, non già

lo sarebbe nel caso di una definizione che deve servire a riconoscere sperimentalmente il corpo (¹).

Presso a poco nel modo solito l'Ostwald giunge alla conclusione che ogni combinazione è decomponibile in elementi, la qual legge, ravvicinata alla definizione di elemento, è l'origine della legge della conservazione degli elementi, legge che parte dal fatto che non si è mai potuto ottenere un elemento B a partire da un elemento A.

E l'Ostwald fa poi una digressione storica per mettere in rilievo la grande importanza dell'opera del Wald:

« La questione di sapere, egli dice, se è possibile di trovare una spiegazione delle leggi stechiometriche al di fuori della teoria atomica non è stata posta sin qui che per risponderví negativamente. Un solo uomo, per quanto io sappia, ha lavorato colla speranza di ottenere un risultato positivo: non credo che molti di voi lo conoscano: voglio parlare di Franz Wald ».

Prosegue poi dicendo che deve al Wald due idee essenziali: la prima che la definizione di composto e di elemento ha qualche cosa di arbitrario, *dipende dai nostri metodi di separazione* ed ha per scopo di dare ai metodi analitici e sintetici una forma di espressione rapida. L'altra idea colla quale, egli afferma, il Wald ha aperto a tutti gli investigatori una via che gli sembra giusta, è che la nozione delle fasi è più generale di quella degli individui chimici e che per conseguenza la deduzione delle leggi stechiometriche deve potersi effettuare a partire da questa nozione senza altre ipotesi. « È per me un bisogno imperioso di portare a questo pensatore solitario, che è intento al suo fine da tanti anni, l'espressione della mia considerazione e della mia obbligazione riconoscente ».

Esamineremo tra poco le idee del Wald. Intanto non posso astenermi dal dire che non vedo la fecondità d'idea riguardante le fasi. Anche la nozione di corpo è più generale di quella di individuo chimico, e non per questo mi pare si possa effettuare da essa la deduzione delle leggi stechiometriche. Che cosa vuol dire fase? In un sistema di corpi in equilibrio, fasi sono quelle parti fisicamente distinte l'una dall'altra e meccanicamente asportabili. Il concetto è più comprensivo che quello di individuo chimico, perchè la fase può constare di un miscuglio fisico omogeneo complicatissimo, quindi può constare di molti individui chimici. Ma non so vedere quanto possa esser fruttuoso un simile riconoscimento salvo che in relazione alla continuità tra fenomeno chimico e fenomeno fisico, tra miscuglio omogeneo e combinazione chimica. Se poi si passa alla coesistenza delle fasi, alla regola delle fasi si potrà dire che questa regola è di larghissima applicazione e che riguarda tanto sistemi i cui componenti sono individui chimici, quanto quelli in cui non sono tali, fasi constanti ciascuna di un solo individuo chimico o invece di miscugli omogenei di individui chimici; potremo dire che le regole generali della legge delle fasi si applicano anche quando abbiamo a che

(¹) Tutte le questioni riguardanti la definizione dei corpi puri in relazione al concetto di fase, la definizione dei corpi semplici e tutte quelle attinenti alle leggi fondamentali della stechiometria, sono trattate maestrevolmente e informandosi a concetti modernissimi e rigorosi da Jean Perrin nel suo bel libro *Traité de Chimie physique*, (Paris-Gauthier Villars 1903), la cui lettura e il cui studio è veramente consigliabile. Vedere specialmente il cap. VII *Corpi puri e leggi delle combinazioni*, a pag. 202.

fare con sistemi che constano di soli individui chimici, potremo stabilire le condizioni di equilibrio... ma sarà difficile che ne scaturiscano fuori delle relazioni quantitative del genere di quelle che sono rappresentate dalle leggi stechiometriche. La regola delle fasi riguarda principalmente i fattori qualitativi dell'equilibrio, il loro numero, anzichè la quantità loro assoluta o ponderalmente relativa: riguarda il limite dell'esistenza di una data fase ed in questo campo delle applicazioni agli individui chimici si potranno forse fare e delle utili definizioni e illustrazioni sulla natura dell'individuo chimico, anche in relazione ai suoi componenti, potranno scaturir fuori, ma, al di là di questo credo che poco si possa andare.

Ritengo che accadrà sempre quello che è accaduto all'Ostwald e al Wald, che cioè pur partendo da considerazioni fondate sulla dinamica chimica, sugli equilibri, sulla regola delle fasi, a poco a poco si è costretti, senza avvedersene, ad abbandonare tutte le nozioni da cui si son prese le mosse per giungere a stabilire, o a voler stabilire, delle semplicissime relazioni di peso, se si vuole arrivare alle aride, e nella loro aridezza meravigliose, leggi stechiometriche, delle quali base principalissima è l'analisi e la bilancia. E sempre illudendosi di esser guidati da quei principî di dinamica, di leggi degli equilibri, dai quali, prendendo le mosse, si era cominciato a discorrere!

E qui apro una parentesi per parlare delle idee del Wald [1].

Idee di F. Wald.

Il modo col quale il Wald concepisce le cose chimiche è presso a poco il seguente. I chimici, che egli considera veramente come persone un po' strane, mancanti di cultura matematica ed idolatri della teoria atomica, vanno a caccia delle sostanze a proporzioni definite; se non le trovano in natura, tanto fanno che finiscono per averle: se la sostanza contiene una parte solubile nell'acqua, insistono tanto sino a che non l'hanno portata via tutta, se c'è una parte volatile la mandano via e quando si preparano da sè i prodotti in laboratorio presso a poco fanno lo stesso, e facendo variare i parametri, temperatura e pressione, tanto si adoperano sino a che non giungono a un composto con proporzioni definite. Quindi, credo sia il pensiero del Wald, non c'è da meravigliarsi della legge delle proporzioni definite: il chimico non colleziona, tra le innumerevoli sostanze offerte dalla natura, che quelle a proporzioni definite che egli, più o meno artificialmente, ha creato. Sarebbe lo stesso, per esprimermi più chiaramente, che un collezionista non collezionasse che vitelli a due teste e poi mettesse in rilievo che tutti i suoi vitelli hanno due teste. Così credo che il Wald intenda la genesi della legge delle proporzioni definite.

Le idee del Wald non trovarono una grande considerazione e ciò egli crede dipenda sopra tutto dal fatto che i chimici sono troppo imbevuti delle teorie atomistiche e troppo poco matematici. Io credo piuttosto che la ragione sia stata questa,

[1] F. Wald, *Die Genesis der stöchiometrischen Grundgesetze*. I. Zeitschrift für physik. Chemie, XVIII, pag. 337, ann. 1895; II. Ibidem, XIX, pag. 607, 1896; *Die chemischen Proportionen*. Ibidem, XXII, pag. 252, 1897.

che le idee non sono esposte abbastanza chiaramente, a confessione del Wald stesso, e che, in tutto il modo di concepire del Wald, la chimica, l'analisi, la bilancia sono lasciate un po' troppo in disparte.

Espongo alcune sue idee che giustificheranno quello che ho detto.

Se prepariamo il solfuro di carbonio, egli dice, avremo un composto con un eccesso di zolfo, non CS_2, ma CS_x dove $x > 2$. Si cerca di fare x più piccolo che è possibile e si giunge a $x = 2$, ossia ci si avvicina a questo limite.

La differenza fra le idee degli atomisti e le sue è più che altro formale, secondo il suo modo di vedere. Il chimico atomistico dice che le tracce di zolfo sono impurità, egli invece crede che il 2 sia un limite non raggiungibile del composto CS_x. Egli ammette in generale una serie non interrotta dal miscuglio alla combinazione, da CS_x a CS_2, ed ammette che l'effetto della purificazione converga verso l'ottenimento del prodotto CS_2, mentre secondo i chimici si raggiunge esattamente il limite CS_2. Come si vede ritroviamo in parte le idee bertholettiane le quali potrebbero essere anche giustificate, al di fuori dei limiti degli errori sperimentali a noi accessibili: ma certo non sembra bene scelto l'esempio.

Dice il Wald: è forse un po' ardita, ma io non posso esprimere meglio il mio pensiero sulla natura dei composti chimici che riguardando i preparati chimici come una meravigliosa, ricca, bella e utile raccolta di rarità, ma pur nondimeno come una raccolta di rarità, che non dà che un'immagine incompleta e in parte sbagliata della Natura. Poichè la Natura ci offre una quantità troppo grande di miscugli di sostanze, così dobbiamo da principio limitarci alla conoscenza delle più straordinarie e queste sono quelle la cui composizione chimica è costante.

L'indirizzo moderno chimico fisico è, secondo il Wald, un riconoscimento che si era fuori di strada, studiandosi adesso a preferenza le soluzioni e i miscugli: questo indirizzo moderno riguarda il prodotto chimicamente puro solo come il termine finale di certi determinati miscugli e si propone il fine, non puramente e semplicemente di conoscere la composizione e lo stato di questo termine estremo, ma anche di preparare tutti i termini intermedî, di studiare più o meno esattamente le loro condizioni e così di gettare i ponti sugli abissi che sembrano separare gli uni dagli altri i preparati chimici puri.

Ma chi mai aveva detto al Wald che la chimica non si occupava che di stabilire la composizione delle specie chimiche e di studiar queste sole?

Il chimico sarà molto addolorato, secondo il Wald, di dover riconoscere che i suoi preparati puri nell'economia della natura non hanno nessun valore maggiore che i materiali greggi da cui si è partiti.

È deplorevole, dice, che si sia perso tanto tempo, mentre c'erano tante altre questioni da studiare. Il tempo nondimeno lenisce i dolori ed egli spera che, anche in questo caso, il sentimento subiettivo dell'uomo di scienza non avrà una perniciosa influenza sullo sviluppo delle idee!

E speriamolo pure, tanto più che i chimici si consoleranno pensando che i materiali greggi non sono che miscugli di specie chimiche, o specie chimiche o elementi e che molte altre scienze, oltre la chimica e la fisica, studiano queste materie greggie, così la mineralogia, la geologia, la geografia fisica. Ed auguriamoci che invece di ab-

bandonarsi a simili malinconiche meditazioni i chimici seguiteranno a fare i chimici, da una parte analizzando, e dall'altra pesando e poi dandosi, sia pure, alla chimica fisica!

Il Wald crede che sopra tutto si debbano dirigere le ricerche allo studio delle fasi di un sistema. Ma questo in fondo è quello che sempre si è fatto e si fa nella analisi immediata, in cui in definitiva non si cerca altro che di ottenere il massimo numero di fasi per ottenere il massimo numero di separazioni.

Riepilogando, e volendo spogliare le idee del Wald di tutto ciò che hanno di fantastico e di non corretto, esse si riassumono brevemente così:

Le sostanze chimiche pure debbono la loro composizione costante secondo proporzioni semplici non a una posizione eccezionale tra tutte le combinazioni possibili di due o più sostanze, ma alle condizioni nelle quali vengono isolate. La definizione che egli dà dell'individuo chimico può esprimersi così: un individuo chimico è una sostanza che persiste, come fase di composizione costante, quando le condizioni di temperatura, pressione e composizione delle altre fasi presenti subiscono continue alterazioni, dentro certi limiti, i limiti di esistenza della sostanza.

A maggiore esplicazione di quello che ho detto aggiungerò che l'idea del Wald sarebbe giusta [1] se in natura o tra i prodotti artificiali non depurati esistessero specie chimiche a composizione variabile, se per esempio ci fossero delle piriti che, pur conservando fondamentalmente le proprietà di pirite avessero composizione variabile tra $Fe\,S_2$ e $Fe\,S_6$, carbonati di calcio che pur mantenendo le proprietà del carbonato ordinario contenessero quantità variabile d'anidride carbonica e calce. Ma ciò non essendo, almeno dentro i limiti degli errori sperimentali, ne viene che tutto quello che esiste in natura o che si ottiene artificialmente, o è una specie chimica a proporzioni definite, o un elemento, o un miscuglio di specie chimiche o di elementi. Cosicchè il chimico non colleziona delle mostruosità fabbricando, purificando, descrivendo specie chimiche, ma colleziona i componenti di tutti i miscugli, omogenei o no, che, nelle condizioni accessibili all'indagine e all'esperienza, ci vengono offerti dalla natura o sono prodotti artificialmente, come non colleziona delle mostruosità isolando e descrivendo gli elementi, i quali dalle specie chimiche risultano in un modo analogo, se vogliamo, a quella pel quale dai miscugli si arriva alle specie chimiche.

Il Wald deduce poi la legge dei numeri proporzionali. Egli prende le mosse dalle equazioni fondamentali del Gibbs [2] che esprimono delle relazioni fra l'energia, l'entropia, il volume e la quantità dei differenti costituenti, la riunione delle cui masse omogenee costituisce il sistema che si studia: insieme con le equazioni fondamentali considera poi altre equazioni che sussistono per ogni fase e che avrebbero la forma:

$$\varepsilon = t\eta - pv + \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \cdots \mu_n m_n$$

dove ε rappresenta l'energia, η l'entropia del sistema, t e p temperatura e pressione, le m le masse e le μ dei parametri.

(1) Il Guldberg in modo corretto e magistrale espose nel 1870 simili idee nella sua Memoria: *Beitrag zur Theorie der unbestimmten chemischen Verbindungen.*

(2) Gibbs, *Équilibre des systèmes chimiques*, pag. 50. Paris, Naudin, 1899.

Se ci si riferisce ad h condizioni di stato differenti, avremo h parametri; questi si potranno ricavare da h equazioni della forma:

$$\varepsilon' = t\eta' - pv' + \mu_1 m_1' + \mu_2 m_2' + \cdots\cdots + \mu_n m_n'$$
$$\varepsilon'' = t\eta'' - pv'' + \mu_1 m_1'' + \mu_2 m_2'' + \cdots\cdots + \mu_n m_n''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon^h = t\eta^h - pv^h + \mu_1 m_1^h + \mu_2 m_2^h + \cdots\cdots + \mu_n m_n^h$$

Ora il Wald vuole applicare queste equazioni al caso che si abbiano varî composti risultanti, come vedremo, da un certo numero di componenti diversamente accoppiati ed allora, poichè il chimico nei lavori analitici e di preparazione fa variare arbitrariamente la pressione e la temperatura, così le equazioni si riducono a

$$\pi' = \mu_1 m_1' + \mu_2 m_2' + \cdots\cdots + \mu_h m_h'$$
$$\pi'' = \mu_1 m_1'' + \mu_2 m_2'' + \cdots\cdots + \mu_h m_h''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi^h = \mu_1 m_1^h + \mu_2 m_2^h + \cdots\cdots + \mu_h m_h^h$$

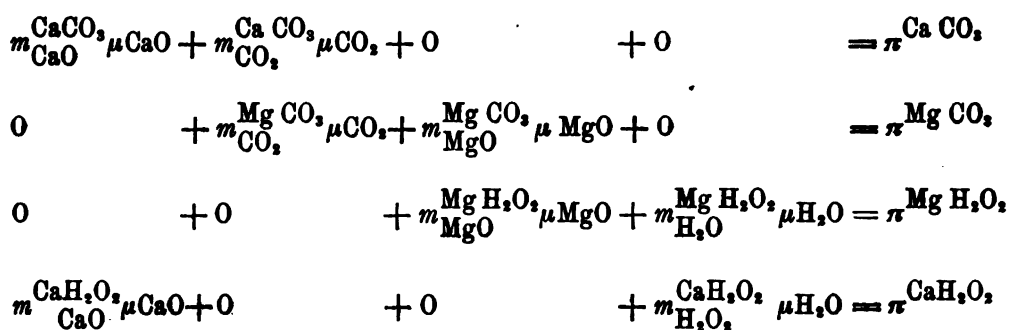
equazioni dove non entrano più che delle quantità in peso, cioè sono uguaglianze fra la quantità totale di ciascun sistema e la somma dei suoi componenti affetti da coefficienti diversi.

Ma il Wald fa ulteriori semplificazioni venendo al caso pratico. Consideriamo, egli dice, la coesistenza delle quattro combinazioni dei corpi CaO, MgO, H_2O e CO_2 e cioè CaO, CO_2; CaO, H_2O; MgO, H_2O; MgO, CO_2. Naturalmente per ogni uguaglianza non verranno a figurare che due dei componenti, gli altri due saranno uguali a zero: di più la quantità totale di ciascuno dei quattro composti binari sarà uguale alla somma delle quantità in esso contenute dei due componenti; in altri termini nel carbonato di calcio ad esempio non entrano che CaO e CO_2 e nei precisi rapporti determinati: allora le equazioni divengono

$$m_{\mathrm{CaO}}^{\mathrm{CaCO_3}} \mu\mathrm{CaO} + m_{\mathrm{CO_2}}^{\mathrm{Ca\,CO_3}} \mu\mathrm{CO_2} + 0 \qquad + 0 \qquad = \pi^{\mathrm{Ca\,CO_3}}$$

$$0 \qquad + m_{\mathrm{CO_2}}^{\mathrm{Mg\,CO_3}} \mu\mathrm{CO_2} + m_{\mathrm{MgO}}^{\mathrm{Mg\,CO_3}} \mu\,\mathrm{MgO} + 0 \qquad = \pi^{\mathrm{Mg\,CO_3}}$$

$$0 \qquad + 0 \qquad + m_{\mathrm{MgO}}^{\mathrm{Mg\,H_2O_2}} \mu\mathrm{MgO} + m_{\mathrm{H_2O}}^{\mathrm{Mg\,H_2O_2}} \mu\mathrm{H_2O} = \pi^{\mathrm{Mg\,H_2O_2}}$$

$$m_{\mathrm{CaO}}^{\mathrm{CaH_2O_2}} \mu\mathrm{CaO} + 0 \qquad + 0 \qquad + m_{\mathrm{H_2O_2}}^{\mathrm{CaH_2O_2}} \mu\mathrm{H_2O} = \pi^{\mathrm{CaH_2O_2}}$$

dove per esempio $m_{\mathrm{CaO}}^{\mathrm{Ca\,CO_3}}$ rappresenta la quantità di ossido di calcio contenuta nella quantità considerata di carbonato di calcio.

In definitiva il Wald stabilisce un' identità tra la somma di CO_2 e MgO e la quantità corrispondente di Mg CO_3 e così via. Le equazioni si riducono per maggior semplicità al sistema seguente, chiamando

x = quantità di CaO
y = » CO_2
z = » MgO
v = » H_2O

e

a = CaO, CO_2
b = CaO, H_2O
c = MgO, CO_2
d = MgO, H_2O

$$x + y = a \tag{1}$$
$$x + v = b \tag{2}$$
$$z + y = c \tag{3}$$
$$z + v = d \tag{4}$$

Abbiamo un sistema di quattro equazioni con quattro incognite, ma indeterminato; infatti sommando (2) e (3):

$$x + y + v + z = b + c$$

da cui poichè $x + y = a$

$$z + v = b + c - a$$

e sostituendo in questa i valori in funzione di x e di y:

$$(c - y) + (b - x) = b + c - a$$
$$b + c - (x + y) = b + c - a$$

che è un' identità.

Perchè poi questo sistema ammetta una soluzione è necessario che $a - b = c - d$ come apparisce sottraendo membro a membro le equazioni, ossia che la differenza tra la quantità di anidride carbonica e di acqua contenute nel carbonato e idrato di calce sia uguale alla differenza delle stesse quantità contenute nei composti corrispondenti di magnesio, che la differenza tra la calce e la magnesia sia uguale nei carbonati e negli idrati e così via. Quindi soltanto a questa condizione la risoluzione è possibile: è poi indeterminata, perchè per ogni valore di v abbiamo un valore corrispondente di x, y, z.

Dal momento che il Wald suppone che ci sia una soluzione delle quattro equazioni, ossia un valore comune di x, y, z, v che soddisfi a tutte e quattro, è evidente che si fa l'ipotesi che la stessa quantità di CaO che entra nel carbonato deve entrare nell' idrato e così via discorrendo. Il Wald stabilisce la formula finale di risoluzione

e trova che prendendo quantità tali dei diversi composti binarî che contengano la stessa quantità di CaO, MgO, CO_2 si giunge alla conclusione che la quantità di H_2O in $Ca H_2 O_2$ e in $Mg H_2 O_2$ deve essere uguale: quindi, egli dice, è dimostrata la legge dei numeri proporzionali o equivalenti.

Ma, per quello che ho detto, a me sembra che tutto ciò non sia che una conseguenza pura e semplice dell'avere stabilito delle equazioni tra le quantità dei componenti e quella dei composti, e di avere ammesso una unica soluzione che implica, necessariamente, che la quantità di ciascuno dei componenti debba essere la stessa nei due composti in cui esso figura.

Noi non facciamo altro, anche se vogliamo uscire dalle equazioni, che prendere per quattro combinazioni di quattro componenti, dei quali due entrano in due e solo in due combinazioni, dei pesi tali che la stessa quantità entri nelle due combinazioni, ossia la stessa quantità di CaO nel carbonato e nell'idrato, la stessa quantità di MgO nel carbonato e nell'idrato, la stessa di CO_2 nei due carbonati, la stessa di H_2O nei due idrati.

Se non esistesse la legge delle proporzioni definite e degli equivalenti, sarebbe sempre possibile di trovare quattro pesi di sostanze che soddisfacessero a queste esigenze. Se si trattasse di quattro sostanze che mescolate fra loro due a due facessero quattro miscugli nel modo che suppone il Wald, il problema, analiticamente, verrebbe trattato nello stesso modo con quelle equazioni. Si tratterebbe di stabilire dei miscugli tali di anidride carbonica, ossido di calcio, ossido di magnesio e di acqua pei quali si avesse sempre il fatto che due componenti non entrassero che in due dei miscugli. Ed allora si giungerebbe alla stessa conclusione che, affinchè una soluzione sia possibile, è necessario quella equazione di condizione ed è necessario, se si impiantano le equazioni, che ogni sostanza entri per la stessa quantità nei due composti. E, ragionando allora nel modo del Wald, si verrebbe alla conclusione che l'acqua nei due miscugli deve essere in quantità eguale. E questo senza che esistesse legge delle proporzioni definite e multiple, i miscugli potendosi scegliere tali come si vuole e non invocandosi nessun altro principio generale che possa costringere la natura a essere sottoposta a questi leggi.

Il ragionamento del Wald è il più bell'esempio del come, partendo dai concetti di dinamica chimica, di fasi, dai teoremi del Gibbs, a poco a poco si finisce coll'abbandonare per la strada tutto il bagaglio per impiantare delle semplici equazioni di regola dei miscugli.

E non sembrò la deduzione del Wald persuadente all'Ostwald, giacchè egli per giungere alla legge dei numeri proporzionali o equivalenti, seguì tutt'altra strada.

In una Memoria posteriore il Wald [1] si occupa ancora dell'argomento. Riconosce che ci sono differenze sostanziali fra miscuglio e combinazione, ma ritiene che si tratti di questione di definizione. Egli dice: è empirico il riconoscimento che ci sono certi miscugli che hanno una composizione costante. Ma l'affermazione che tutte queste sostanze e soltanto queste si debbano considerare come combinazioni chimiche, è arbitraria. Quindi alle combinazioni chimiche si attribuisce *ex definitione* una com-

[1] *Die chemischen Proportionen*, ecc.

posizione costante. Le sostanze che non obbediscono sufficientemente a questa condizione non sono combinazioni chimiche.

E su questo poco vi è da osservare, salvo che il chimico definisce la specie chimica non solo in base alla composizione costante, ma in base anche ad altre sue proprietà ed ai rapporti dei componenti tra loro. Del rimanente mi pare che sempre si faccia così: ad un quadrato spetta per la definizione l'uguaglianza dei quattro lati e dei quattro angoli, ad un triangolo l'avere tre lati e così via.

Il Wald si preoccupa poi dell'esistenza innegabile delle proporzioni chimiche, e dice che è una cosa meravigliosa e stupefacente. E da questo stupore riguardo alle combinazioni chimiche non siamo ancora usciti fuori, ed a questa circostanza, secondo il Wald, la teoria atomica deve la più gran parte della considerazione di cui gode in chimica: solo essa ci aiuta a superare un abisso che sembra del tutto insuperabile. Il meraviglioso nelle leggi delle proporzioni è che si trovano relazioni dove nessuno le avrebbe sospettate.

Ora di tutto questo che dice il Wald non si vede bene il perchè: quasi tutte le leggi fondamentali della natura offrono questa semplicità e questa meravigliosità che lo fa stupire: gli esempi sono troppo facili perchè io debba dilungarmi ad addurli.

Per diminuire questo stupore il Wald vorrebbe dimostrare che le cose debbono andare così e ragiona nel seguente modo. Se noi abbiamo n componenti e ne facciamo dei miscugli di arbitraria composizione, la trasformazione quantitativa degli uni negli altri è soltanto possibile se di questi miscugli ne abbiamo per lo meno $n + 1$. E l'inversa si potrebbe enunciare così: quando è possibile la trasformazione quantitativa di j mescolanze che hanno una composizione arbitraria stabilita, i miscugli al più debbono contenere $j - 1$ componenti: il numero dei componenti deve essere almeno di 1 inferiore al numero dei miscugli, la cui trasformazione quantitativa si prende in considerazione. Ora nelle trasformazioni chimiche ciò non avviene: per la trasformazione di due sali neutri in due altri, abbiamo quattro componenti e quattro mescolanze che reagiscono. Che vuol dir ciò? Vuol dire che una delle premesse da cui siamo partiti nell'esempio dei miscugli arbitrari è falsa quando l'applichiamo alle trasformazioni chimiche: ed è facile accorgersi che la premessa non applicabile è che la composizione delle combinazioni chimiche sia arbitraria. Quindi, il Wald conclude, la composizione delle specie chimiche, non può essere arbitraria: ecco le sue parole: « Così viene dimostrato che nei numeri che danno la composizione empiricamente constatata delle combinazioni chimiche una qualche relazione ci deve essere, perchè il numero dei componenti chimici possa essere maggiore del numero degli individui chimici preesistenti più quello degli altri formatisi. In conseguenza di ciò, secondo il mio modo di vedere, si toglie alle leggi stechiometriche la più gran parte di quello che hanno di meraviglioso ».

E questa conclusione a me sembra veramente meravigliosa. Ciò che dice il Wald, e suppongo che il suo ingegnoso ragionamento sia esattissimo, non porta ad altro che a riconoscere in un modo indiretto che debbono sussistere delle relazioni tra i componenti le specie chimiche: invece di constatare queste relazioni coll'analisi, egli le constata indirettamente dal numero dei composti che si originano, ecc. ecc. Ma questo fatto non è che una estrinsecazione di quello fondamentale dell'esistenza delle proporzioni chimiche, il quale mi sembra che resti (se così pare al Wald) sempre ugualmente meravi-

glioso. È strano come ci si possa illudere di dedurre una legge da un principio più comprensivo, mentre non si fa che mettere in evidenza una conseguenza della legge stessa, dalla quale conseguenza al più la legge può essere confermata.

In questa Memoria del Wald troviamo un accenno all'opera del Richter, che poi viene invocata anche dall'Ostwald. Egli dice che il Richter presso a poco ragionò come egli ha ragionato: osservò che nella reazione dei sali neutri non si mette in libertà nè base, nè acido e ne dedusse la legge dei numeri proporzionali.

A proposito dell'opera del Richter, e di questo Richter un po' diverso dal vero che si sono foggiati tanto l'Ostwald che il Wald, dirò a suo tempo.

Ho voluto esporre con una certa larghezza le idee del Wald, perchè in esse, a seconda di quanto dice l'Ostwald, sono i primi germi dell'opera intrapresa dall'Ostwald stesso per dedurre le leggi fondamentali della stechiometria [1].

Legge dei numeri proporzionali e delle proporzioni multiple.

L'Ostwald dedotta, come egli crede, la legge delle proporzioni definite, passa alle altre fondamentali, preferendo di dimostrare prima quella dei numeri proporzionali e poi quella delle proporzioni multiple. Ecco il suo ragionamento quale apparisce dalla sua prima esposizione:

Consideriamo tre elementi A, B, C che si combinino due a due e che formino anche la combinazione ABC: ammette che ogni volta non si formi che una sola combinazione. Formiamo prima AB, il rapporto tra i componenti deve essere definito: poi combiniamo AB con C: anche in questo caso il rapporto deve essere fisso. Riferiamoci ad A come unità e troveremo gli equivalenti di B e di C. Combiniamo ora A con C: poi formiamo ACB partendo da AB e C. Non essendoci che una sola combinazione degli elementi fra di loro ACB deve essere identico ad ABC: quindi AC non può avere una composizione qualunque, ma deve contenere A e C nello stesso rapporto che si ha in ABC a partire da AB e C. Così si può calcolare il rapporto B e C della combinazione sconosciuta BC. Riassumendo (dice l'Ostwald), i numeri proporzionali riferiti ad A conservano il loro valore per le combinazioni che non contengono A. È precisamente la legge dei numeri proporzionali. Segue poi: se A e B possono formare un secondo composto, siccome la combinazione non può avvenire che secondo gli equivalenti così questo secondo composto deve contenere B secondo quantità equivalenti: quindi, dice l'Ostwald, continuando questo ragionamento noi arriviamo a questa legge generale che le combinazioni contengono i differenti elementi in una proporzione corrispondente a multipli interi qualsiansi dei numeri proporzionali.

Questa dimostrazione così come fu data in origine, senza invocare nessun sussidio, altro che quello dell'esistenza delle proporzioni definite, può e deve considerarsi *a priori* come inesatta.

(1) Sulla genesi delle idee del Wald da quelle del Berthollet e del Guldberg e sulla trasformazione, a mio credere non corretta, che a queste ultime si è fatta subire, tratterò ampiamente in una Memoria di prossima pubblcazione intitolata: *I concetti del Berthollet e del Guldberg sulla stechiometria delle combinazioni chimiche, esaminati dal punto di vista della loro verifica sperimentale.*

L'esistenza della legge delle proporzioni definite è conciliabile con l'assenza completa degli equivalenti. Si può benissimo pensare che ogni composto abbia una composizione fissa, che si abbiano per ogni elemento degli equivalenti quante sono le combinazioni che esso forma con altri elementi: così, per esempio, si potranno per un elemento stabilire gli equivalenti rispetto all'idrogeno, poi rispetto al cloro, ecc., ecc., e questi equivalenti possono essere diversi: vale a dire, pur constando che le diverse quantità di elementi equivalgono a 1 di idrogeno, quelle che si uniscono a 35.5 di cloro sieno differenti: si avrebbero dei numeri equivalenti in quanto che equivalgono a una stessa quantità di un elemento, ma non equivalenti fra di loro. Quindi è assurdo pensare che si debba giungere alla legge degli equivalenti senza introdurre qualche altra condizione. E del rimanente a questa dimostrazione avrebbero potuto giungere i chimici da cento anni ormai a questa parte. E ci sono stati degli uomini valentissimi e dei pensatori profondi che di questi problemi si sono con grande amore occupati. Poteva l'Ostwald ritenere che a nessuno fosse venuto in mente la deduzione *a priori* della legge dei numeri proporzionali?

Veniamo al caso speciale. L'ipotesi dell'esistenza di una sola combinazione è falsa: e ritorno a quanto ho detto sulle ipotesi sperimentali. Non è permesso, io credo, che con molta parsimonia di fare delle ipotesi sperimentali e di fare poi delle ipotesi che l'esperienza ha dimostrato già non vere. Che si possano fare ipotesi false in altre discipline lo ammetto, ma appunto per dimostrare, traendone conclusioni assurde, che l'ipotesi è falsa. Tanto più poi in questo caso, il ragionamento non corre: correrebbe forse se si dicesse: per semplicità supponiamo l'esistenza di una sola combinazione: poi, fatta la dimostrazione, mostrare che essa si estende anche se di combinazioni se ne formano due o più. Ma invece per la dimostrazione dèlla legge delle proporzioni multiple bisogna metter subito da parte questa ipotesi, necessaria essenzialmente, non per semplicità, nella prima dimostrazione, e così l'errore logico si aggrava. Si invoca l'unicità della composizione per dedurre la legge degli equivalenti e poi si invoca l'equivalenza, dedotta in base a quella ipotesi, ammettendo che esistano più combinazioni degli stessi elementi.

Quale principio, quali fatti autorizzano l'Ostwald ad ammettere che ABC si possa fare integralmente da AB con aggiunta di C, con semplice aggiunta?

Per es. 1 di idrogeno si unisce con 35.5 di cloro, ma nella combinazione di idrogeno, cloro e ossigeno si potrebbe benissimo avere:

1 di idrogeno, 25 di cloro, 10 di ossigeno: combiniamo idrogeno con ossigeno, per esempio, 1 di idrogeno con 15 di ossigeno: poi combiniamo questo composto con cloro e ritroveremo, se c'è un solo composto:

1 di idrogeno, 25 di cloro e 10 di ossigeno. Il di più di ciascun elemento se ne anderà via. Reagiranno i corpi come si vuole, ma si giungerà sempre a quella proporzione. La legge delle proporzioni definite sarà sempre soddisfatta.

Ed obiezioni furono fatte all'Ostwald allorchè egli espose le sue idee nella riunione della Società Bunsen il 14 maggio 1904. Il van't Hoff osservò che la deduzione non era valida se non si poteva provare che l'azione di C sopra AB non provochi la separazione di un eccesso di A o di B, e la stessa obiezione gli aveva fatto il Roozeboom. Il van't Hoff mise anche in rilievo la non correttezza logica di ammettere l'esistenza di una sola combinazione, per poi subito distruggere l'ipotesi se si vuole giungere alla legge delle proporzioni multiple.

A queste obiezioni l'Ostwald replicò dicendo sostanzialmente che il suo discorso conteneva già la risposta. Essa risiede nel fatto che dal punto di vista di queste relazioni gli elementi e le combinazioni non differiscono fondamentalmente e che la definizione di elemento non è che un limite puramente esperimentale dipendente dal progresso della tecnica.

Cito testualmente le sue parole: « l'esperienza provando che gli elementi non sono decomponibili, le loro combinazioni non potranno dare un nuovo corpo qualsiasi: in altri termini la combinazione dei due elementi A e B non potrà dare il prodotto AB e un resto di un terzo corpo C, ma le sole possibilità quando si fanno agire A e B in proporzioni arbitrarie, sono che uno degli elementi A o B resti in eccesso, o che il corpo AB solo prenda origine ».

E dopo altre considerazioni l'Ostwald prosegue: « forse io renderò più chiaro il pensiero che è la base di queste considerazioni comparando queste ultime operazioni mentali a quelle che J. B. Richter ha effettuato ora è più di un secolo e che permisero a questo scienziato di risolvere un problema analogo, per quanto meno esteso, e di scoprire il primo esempio dei numeri proporzionali. Come è noto il Richter dedusse, dalla costanza della neutralità nella doppia decomposizione dei sali, che in certe reazioni nè gli acidi, nè le basi dei sali neutri si separano in eccesso, che per conseguenza non si combinano che in proporzioni determinate e caratteristiche per ciascuno di essi. Poichè questa costanza della neutralità è un fenomeno indipendente dalla natura speciale degli acidi, basi e sali in azione, i numeri proporzionali così trovati sono delle costanti fisiche ».

« La variazione del numero dei corpi in seguito a reazioni chimiche, come la costanza della neutralità, implica la necessità di relazioni numeriche determinate fra le proporzioni dei corpi che prendono parte alle reazioni. Se si forma una combinazione definita ABC a partire dai corpi AB e C bisogna necessariamente che la decomposizione di ABC formi i componenti A e B nello stesso rapporto che quello che risulta dalla decomposizione di AB, perchè senza di ciò non si sarebbe ottenuto il corpo ABC, ma un miscuglio di questo corpo con l'uno o coi due componenti ».

Come si vede spuntano qui le idee che il Wald espose nella sua ultima Memoria.

Ed in tal modo chiude:

« Così per il problema che ci occupa noi abbiamo cercato di utilizzare un fatto esperimentale di una portata generalissima, per dedurne le leggi fondamentali della stechiometria. Nè in un caso, nè nell'altro si può concepire una deduzione *a priori* che avrebbe per conseguenza un fatto sperimentale, anzi una legge che ne sarebbe indipendente ».

A me sembra che l'Ostwald non sia nel giusto invocando per analogia la legge del Richter. La legge del Richter certo si poteva dedurre, come l'Ostwald suppone che il fondatore della stechiometria l'abbia dedotta; ma vediamo quali conoscenze qualitative e quantitative erano necessarie, conoscenze puramente di indole chimica. Prima di tutto conoscenza della costituzione binaria dei sali, che cioè essi derivavano dall'unione di un acido e di una base; poi conoscenza del fenomeno della neutralizzazione e del fatto che certe quantità di base, sia pure non determinate nella grandezza assoluta, erano saturate da una certa quantità di acido; finalmente poi conoscenza del

fenomeno della costanza della neutralità, fatto anche questo di indole quantitativa data la conoscenza del fenomeno della esatta neutralizzazione: con tutto questo si comprende benissimo che si potrebbe dedurre là legge dell'equivalenza applicata agli acidi e alle basi: esistono certe quantità di basi che sono neutralizzate esattamente da certe quantità di acidi: prendendo due acidi e due basi e facendo due sali differenti, per la loro mescolanza si ha conservazione della neutralità, quindi la quantità di una base che neutralizza una certa quantità di acido neutralizza anche una corrispondente quantità dell'altro acido che era unito con una determinata quantità dell'altra base per formare il sale. Non vedrei nessun inconveniente che si estendesse puramente e semplicemente a tutte le combinazioni degli elementi fra loro, la legge del Richter, data l'analogia fra tutte le combinazioni nel loro modo di formarsi, sia che si abbiano dagli elementi, sia da altre combinazioni: certo la via è resa didatticamente facile considerando i sali degli alogeni e i solfuri che facilmente, per la loro formazione, si possono derivare dai fenomeni di neutralizzazione. Anche nell'insegnamento si prendono le mosse dalla legge del Richter per giungere poi alla legge generale degli equivalenti con un procedimento che mi pare del tutto logico.

Questo procedimento io seguo nel mio corso e credo altri colleghi lo seguano; con certezza so del prof. Ciamician. Del rimanente era questo il metodo che si teneva dai vecchi maestri per giungere agli equivalenti. Notisi poi che, entrando un poco più addentro nelle ricerche e nelle deduzioni del Richter, si può anche aggiungere che egli studiò l'azione di un metallo sopra la soluzione di un sale di un altro, la precipitazione di un metallo operata da un altro, fatto già noto, ma preso in considerazione attenta solo dal Bergman prima e dal Richter poi. Ed il Richter, spogliando quello che egli dice dal linguaggio dei tempi e sopra tutto dal linguaggio flogistico, aveva riconosciuto che quando un metallo scaccia l'altro la soluzione resta neutra, o, in altri termini, aveva riconosciuto l'equivalenza di quantità diverse dei diversi metalli. Dato tutto questo, naturalmente si può giungere alla dimostrazione della legge dei numeri proporzionali, anzi credo questo ottimo metodo d' insegnamento.

Debbo infine osservare che a me sembra che tanto l'Ostwald quanto il Wald si sieno un po' foggiati un Richter a modo loro. La costanza della neutralità era già nota: il Richter intraprese delle ricerche sperimentali per spiegarla e trovato il fatto fondamentale riguardante la neutralizzazione reciproca degli acidi e delle basi, che cioè stabilite le quantità di acidi diversi che si uniscono con uno stesso peso di base, queste quantità sono proporzionali a quelle relative ad un altro peso fisso di un'altra base, fece l'applicazione del fatto sperimentale scoperto alla spiegazione del fenomeno della conservazione della neutralità. Il processo logico mi pare assai diverso di quello che al Richter attribuiscono l' Ostwald e il Wald.

Credo opportuno di citare altre considerazioni dell'Ostwald:

« La legge sperimentale che si avvicina di più alla deduzione generale della legge dei numeri proporzionali è quella che dice che quando due corpi decomponibili reagiscono fra di loro, esiste un rapporto definito per il quale i due corpi producono, senza residuo, un terzo corpo. Si potrà esprimere la legge sperimentale in questione in un modo più generale dicendo che in seguito alla reazione di *m* corpi

si sono formati *n* nuovi corpi, *m* e *n* essendo in generale differenti. Se *n* è più piccolo di *m* si parla di combinazione, se *n* è più grande di *m* di decomposizione: se $m = n$ si impiega spesso il termine di trasformazione, o anche di doppia o tripla scomposizione ».

E segue poi:

« Il fatto fondamentale senza del quale non si potrebbe dedurre la legge dei numeri proporzionali risiede in questa variazione del numero dei corpi che formano il sistema, dopo che hanno reagito. Ma ogni corpo dàto può essere distrutto o creato in reazioni dove il numero dei corpi in presenza è differente avanti e prima della reazione, di modo che si può estendere la prova a ogni caso dato ed essa è del tutto generale. Vi è in ciò una relazione evidente con questo fatto che si può ottenere uno stesso corpo con reazioni molto differenti, ciascuna di queste reazioni fornendo una relazione ben determinata e la coesistenza di tutte le relazioni ottenute non è possibile senza l'ipotesi dei numeri proporzionali ».

L'Ostwald con questi ragionamenti, che furono successivi alla primitiva esposizione della « Faraday Lecture », cerca di uscire dalla confusione nella quale si era messo ed invoca considerázioni che in nessun modo da principio aveva invocato. Non vi è dubbio che egli dice delle cose giuste, ma certo esse non fánno fare un passo alla deduzione della legge degli equivalenti. Se egli intende parlare di rapporti quantitativi, va bene, ma in tal caso o in un modo o in un altro, non si fa che dedurre la legge degli equivalenti dalle esperienze: se però intende parlare solo di relazioni qualitative, la cosa proprio non va ed i rapporti quantitativi possono cambiare in tutti modi pure ottenendo un corpo in base a reazioni diversissime.

Quale è il tarlo del ragionamento dell'Ostwald? Questo io credo. Egli ammette che si possa per semplice addizione del composto AB (già essendo determinàte le proporzioni di A e di B) ottenere il composto ABC: che si possa poi per semplice addizione del composto AC ottenere il composto ABC ecc. ecc. Ora in questa ammissione c'è esperimentalmente la legge dei pesi proporzionali: esiste una certa quantità di AB la quale con una determinata quantità di C darà integralmente il composto ABC e naturalmente una determinata quantità di ABC: ed esiste pure una certa proporzione di AC la quale per semplice addizione con B dà una determinata quantità di ABC: ora se B e C non si combinano che in una sola proporzione e che da BC si può avere ABC, è fissato il rapporto tra B e C. Ed anche potrebbero sorgere dei dubbi sulla estendibilitá delle considerazioni fatte!

Ad ogni modo così si dimostrerebbe che il rapporto tra A e B non cambia quando avviene l'unione con C e si potrebbe giungere alla dimostrazione della legge, ma invocando naturalmente l'esperienza quantitativa. Quindi, concludendo, la dimostrazione dell'Ostwald non ha nessun valore a meno che non si presuma l'esistenza di certe quantità per le quali la combinazione avviene integralmente per addizione o le trasformazioni o reazioni integralmente senza residuo, ed in tal modo si invocano i fatti quantitativi che appunto servono a stabilire la legge degli equivalenti, colla differenza che invece di dedurre la legge nel modo più semplice dai numeri trovati, si segue un cammino indiretto, certo didatticamente non raccomandabile. Al più, dimostrata la legge, si potrebbe utilmente far vedere, come sua conseguenza, quello che abbiamo esposto.

Ritornando sull'argomento e sulle considerazioni dell'Ostwald, debbo anche aggiungere che per stabilire delle equazioni ci vogliono delle quantità e delle quantità non si possone trovare che in base alle analisi o almeno alle pesate. Non vi ha dubbio che impiantando le equazioni, come dice l'Ostwald, si giungerebbe alla legge degli equivalenti e ci si giunge anche, bene inteso, preparando uno stesso composto per vie diverse e tenendo conto delle reazioni scambievoli, ecc. Ma sempre si dovranno introdurre, tacitamente o esplicitamente, delle quantità le quali non possono esser date che dall'analisi o dalla pesata, le sole basi possibili per la deduzione della legge. Ho detto tacitamente, perchè appunto la deduzione della legge del Richter si può fare senza parlare esplicitamente di quantità, o, per meglio dire, non introducendo nel ragionamento delle quantità determinate.

E anche una volta mi sembra che sia da mettere in evidenza che la dimostrazione dell'Ostwald è di ordine puramente chimico, quando anche si volesse modificare nel senso anzi detto, nel qual caso non sarebbe che un altro enunciato della legge degli equivalenti: non si invoca in nessun modo nè la dinamica chimica, nè la regola delle fasi e nemmeno, per fortuna, il secondo principio dell'energetica o della termodinamica, di cui si è fatto tanto e tanto inutile abuso!

Riepilogo.

Il succo del ragionamento dell'Ostwald è in fondo il seguente. Le soluzioni si fanno per semplice addizione dei componenti uno all'altro: in modo analogo spesso si ottengono i composti: quindi il resto del ragionamento che già abbiamo esposto.

L'esperienza insegna però che realmente le soluzioni si fanno in tutte le proporzioni con variazioni progressive delle loro proprietà fisiche, nè è necessario prendere delle determinate quantità dell'uno e dell'altro componente. Invece, perchè i composti si facciano per addizione semplice, è sempre l'esperienza che lo insegna, bisogna che ci sia una determinata quantità dell'uno per una determinata quantità dell'altro componente. E questo è un modo di verifica della legge delle proporzioni definite. Che se poi si dice: ci sono certe proporzioni degli elementi e degli individui chimici per le quali tutte le combinazioni si fanno per addizione, bene inteso dal semplice punto di vista stechiometrico, senza includere la realizzazione pratica, allora si potrà anche dimostrare che queste quantità sono gli equivalenti, anzi, se non se ne ammette che una per ogni elemento, la cosa va da sè. Ma si ritorna sempre lì: bisogna ammettere l'esistenza di queste determinate quantità le quali non sono poi che gli equivalenti.

Considerazioni generali.

Siamo giunti presso che al fine, in quanto riguarda le idee dell'Ostwald, e riassumo.

A me non sembra, prescindendo dalla teoria atomica, che l'Ostwald sia riuscito nel suo assunto, di dedurre cioè da principî più generali le leggi fondamentali della stechiometria chimica.

Riguardo alla legge delle proporzioni fisse egli non fa, in sostanza, che definire l'individuo chimico basandosi sopra una delle proprietà fisiche caratteristiche ed invo-

cando poi nel tempo stesso la fissità della composizione: ma di deduzione non è nemmeno da parlarne. Di più la definizione non è esatta, potendosi applicare anche a dei miscugli fisici che non siano specie chimiche e lasciandosi con essa da parte alcune proprietà fondamentali caratteristiche delle specie chimiche stesse.

La ragione di questo insuccesso è da riconoscersi, secondo il mio modo di vedere, nel processo logico di ragionamento. Sta benissimo che non ci sia una distinzione netta tra fenomeno chimico e fenomeno fisico, tra combinazione e miscuglio fisico, che ci sieno varî ponti, varî anelli di congiunzione; che, modificando le condizioni sperimentali, si possa vedere la continuità anche là dove non sembra esserci: nessuno più di me riconosce l'importanza enorme che da tutto questo modo di vedere ne è venuta alla scienza: la chimica fisica non si è sviluppata, non ha raggiunto la presente meravigliosa fioritura che ponendosi in questo indirizzo segnato da quei grandi che furono il Berthollet e il Guldberg. Ma tutto ciò non toglie che il fenomeno chimico tipico è differente dal fenomeno fisico tipico, come la combinazione tipica è differente dal miscuglio fisico, sia esso omogeneo o no. Ora quando si vuole da considerazioni di ordine puramente fisico, applicabili ai miscugli omogeni, passare alle combinazioni chimiche vere e proprie e definirle ne avverrà sempre, credo, che la definizione sarà incompleta, e difficilmente ad ogni modo potrà trattarsi di più che di una definizione.

Nel caso speciale io penso che difficilmente dalla considerazione delle proprietà fisiche delle soluzioni si giungerà alla legge delle proporzioni definite. Al più si potrà dire che sostanze godenti di una determinata proprietà, costante entro certi limiti, hanno composizione costante, ma con tutta probabilità anche un miscuglio potrà avere questa proprietà costante a cui corrisponderà composizione determinata, se si è partiti da considerazioni inerenti ai miscugli fisici. E notisi che, anche quando si riuscisse, si tratterebbe sempre di una definizione, non di una deduzione.

Forse potrebbe arrivarsi per altra via a qualche cosa di più concreto: p. es., tener conto della sparizione delle proprietà dei componenti un miscuglio e definire come specie chimica quella sostanza che si ha quando le proprietà caratteristiche di uno dei componenti sono sparite o almeno bruscamente cambiate, nè più riconoscibili col metodo abituale.

Così nel caso contemplato dal Wald: quando nel sistema CS_x le proprietà caratteristiche di S, che prima lo facevano riconoscere, sono sparite, quel punto segnerebbe la comparsa della specie chimica e si potrebbe forse dimostrare che a quel punto deve corrispondere una composizione costante. Accenno e non approfondisco. Ma ad ogni modo, anche così, non si giungerebbe ad includere nella definizione la notazione del fatto che le proporzioni dei componenti debbono essere secondo rapporti espressi dagli equivalenti. E si potrebbe incorrere nel rischio di escludere dalla definizione dei veri composti, nei quali i componenti conservano sempre alcune delle proprietà caratteristiche. Io ritengo che la definizione della specie chimica deve insieme tener conto della costanza della composizione, della costanza delle proprietà fisiche e dei rapporti stechiometrici dei componenti.

Nè è da meravigliarsi che si giunga a resultati simili a quelli ottenuti dall'Ostwald, in dipendenza appunto da volere troppo vicini ritenere il fatto chimico e

il fatto fisico [1]. Cito quello che dice uno dei più illustri maestri della chimica matematica, un uomo al quale tanto deve la nostra scienza, il Duhem [2]. Da simili premesse non si può giungere che a conclusioni imperfette in riguardo alle relazioni stechiometriche, che per ora in verità appaiono stare così isolate nella scienza:

« Una domanda si pone immediatamente, precisa e inevitabile: quale distinzione la nuova meccanica chimica stabilisce fra il miscuglio fisico e la combinazione chimica?

« Fra il miscuglio fisico e la combinazione chimica, essa non stabilisce alcuna distinzione: o, per parlare in modo più preciso, i principî della termodinamica, che sono i suoi fondamenti, non le permettono di attribuire nessun senso a queste due denominazioni; non le forniscono niente che le permetta di stabilire nei suoi ragionamenti o nelle sue equazioni, se un fenomeno è una reazione chimica o un semplice cambiamento di stato fisico.

(1) E. Duhem, *Le Mixte et la Combinaison chimique*, pag. 192 e seg.. Paris, Naud, 1902.

(2) Discorrendo sulle idee dell'Ostwald con colleghi di altissima competenza, sentii da loro esternare il pensiero che forse la via tracciata dall'illustre e geniale scienziato in riguardo alla deduzione della legge delle proporzioni definite, potrebbe esser feconda di risultati, in questo senso che, partendosi dal concetto di soluzione o di misto, si potrà giungere ad affermare che, tra le varie composizioni o misti a cui due sostanze danno origine, una o più ve ne siano per le quali si abbia una o più proprietà fisiche costanti, colla costanza delle quali sia necessariamente legata la fissità di composizione; cosicchè poi dalla esistenza di questa costanza nelle proprietà fisiche si possa dedurre per simili corpi, che si definirebbero come specie chimiche, la fissità di composizione come necessaria conseguenza. E questo non si può escludere, come risulta anche da quanto ho detto a pag. 90. Sebbene io ritenga che, in scienza, specialmente si sbaglia, quando si nega la possibilità di un fatto o di una deduzione, nondimeno mi sembra che un esame approfondito non lasci molte speranze in proposito La considerazione di una proprietà fisica è a prevedersi che non basti: evidentemente ci troveremo nel caso che si presenta per un liquido che bolla a temperatura fissa. Si potrebbe invocare un insieme di proprietà fisiche costanti, ma nemmeno questo credo possa bastare, almeno se ci riferiamo alle proprietà fisiche che noi conosciamo: quelli acidi del Roscoe hanno un indice di rifrazione, una costante di capillarità, un peso specifico, benissimo determinato in determinate condizioni, nè più nè meno che una specie chimica. Quindi bisognerà ricorrere alle variazioni col variare delle condizioni fisiche e in questo campo sarà forse possibile di venire a qualche cosa di concreto. Dico forse, perchè nemmeno questo mi pare sicuro. Proprietà indipendenti in modo assoluto dalla temperatura e dalla pressione non ne conosco: queste sarebbero le uniche utilizzabili; ed anche ci sarà sempre lo scoglio che variando temperatura e pressione, pur trattandosi di specie chimiche potrà avvenire le decomposizione, e quindi come criterio diagnostico anche questo della costanza nelle proprietà fisiche potrebbe fallire. Se poi si tratta di variazioni, ci sarà sempre l'inconveniente che in definitiva si dovrà dire: la composizione resta costante col variare delle condizioni mentre variano in un dato modo la proprietà o le proprietà fisiche considerate, ed in tal caso, come è appunto nel ragionamento dell'Ostwald, sarà sempre necessario un riconoscimento sperimentale della fissità di composizione e mancherà la deduzione a priori. Soltanto dalla costanza nelle proprietà fisiche, in determinate condizioni di temperatura e di pressione, delle fasi ricavate variando temperatura e pressione si può giungere ad una apparenza di deduzione aprioristica sulla fissità di composizione, non sulla esistenza della specie chimica quale noi c'intendiamo. Ad ogni modo poi sarà certo difficile che per questa via si possa giungere a stabilire che nelle specie chimiche i componenti debbano trovarsi in rapporti stechiometrici.

« La sola distinzione che essa possa introdurre nelle sue deduzioni e nelle uguaglianze matematiche, che le accompagnano, è la distinzione fra i corpi che hanno una composizione fissa e i corpi che hanno una composizione variabile: il carbonato di calcio è sempre formato da una massa di gas carbonico e da una massa di calce che stanno fra loro come i numeri 44 e 55.9: al contrario, per formare un miscuglio di aria e di vapor d'acqua, si possono prendere delle proporzioni arbitrarie di questi due gas: ecco i caratteri che essa può affermare e di cui essa deve tener conto.

Ma gli elementi che formano un corpo a composizione non definita sono semplicemente mescolati? Sono invece parzialmente combinati e il composto chimico nato dalla loro unione resta mescolato all'eccesso degli elementi rimasti liberi? Per la meccanica chimica, fondata sui soli principî della termodinamica, queste questioni sono prive di ogni senso ».

E parlando dei sistemi gassosi egli dice queste parole che credo utile di riportare:

« Io ho sotto gli occhi un miscuglio che si è formato prendendo 2 gr. di idrogeno e 71 gr. di cloro: io non saprei enunciare una proposizione come questa: nell'istante attuale, questo miscuglio contiene 1 gr. di idrogeno libero, 35.5 gr. di cloro e 36.5 gr. di acido cloridrico: questa proposizione non è nè vera nè falsa: essa non ha alcun senso. Possiamo dargliene uno? Possiamo noi fare in modo che a questa proposizione corrisponda una relazione algebrica accessibile alla meccanica chimica, di cui questa scienza possa riconoscere la verità o l'errore? Possiamo noi fissare questo senso non in un modo interamente arbitrario, il che sarebbe legittimo, ma senza interesse, ma in modo che si accordi nelle applicazioni con quello che adottano i chimici guidati dalle ipotesi atomistiche? ».

E spiega poi come l' Horstmann e il Gibbs hanno dato una soluzione del problema nei casi che i corpi mescolati sieno gassosi e vicini allo stato di gas perfetti, e la spiegazione è questa: prendiamo il miscuglio di cui fu detto e dall'altra parte 1 gr. di idrogeno, 35.5 gr, di cloro e 36.5 di acido cloridrico: mettiamoli in recipienti separati dello stesso volume di quello che conterrà il miscuglio: portiamo tuiti i recipienti alla stessa temperatura. Se il potenziale interno del miscuglio è uguale al potenziale interno dei tre gas isolati, si dirà che il miscuglio contiene 36,5 gr. di acido cloridrico, 1 gr. di idrogeno e 35.5 gr. di cloro libero. Aggiunge poi sui tentativi fatti dal van't Hoff e dall'Arrhenius per stabilire una relazione analoga per le soluzioni diluite.

Come conclusione riguardo all' indirizzo moderno della meccanica chimica il Duhem dice:

« Tutte le ipotesi sulla natura intima della materia, sulla struttura dei miscugli e sulle combinazioni chimiche, e specialmente tutte le ipotesi atomistiche saranno bandite dal dominio della scienza: non si farà alcun uso di principî tratti da queste ipotesi: se una espressione non ha un senso che a patto di ammettere implicitamente o esplicitamente queste supposizioni, si rigetterà senza pietà, oppure, avanti di adottarla, se ne darà una nuova definizione, assolutamente indipendente dalla dottrina alla quale si è deciso di non fare più appello: le definizioni, le proposizioni della meccanica chimica non si riferiranno in ultima analisi che a grandezze rappresentanti delle proprietà fisiche misurabili: la meccanica chimica così costituita non avrà la pretesa

di farci penetrare dentro all'intima essenza della materia, di rivelarci il *quid proprium* delle reazioni chimiche; il suo fine, più modesto, ma più sicuro, sarà di classificare e di ordinare le leggi che l'esperienza ci permette di scoprire: l'accordo dei suoi corollari coi fatti sarà per essa il criterio della certezza ».

Non vi ha dubbio che tutto questo è bellissimo: ed è veramente al di fuori delle mie intenzioni di non riconoscere l'importanza di simile modo di vedere e quale enorme progresso tali e analoghe considerazioni abbiano fatto fare alla scienza. Ma ciò che è un non senso per la meccanica chimica, non è un non senso per la chimica, una parte della quale, e non certo la meno importante, è l'analisi chimica. In quel miscuglio la chimica (e le idee atomistiche non c'entrano per nulla) riconosce facilmente il cloro libero, l'idrogeno libero e la loro combinazione e ne determina assai facilmente e senza timore d'ingannarsi le singole quantità!

Come ho già detto, molte delle conseguenze non giuste a cui si giunge dipendono dal non riflettere abbastanza che la chimica è una scienza che ha per fondamento l'analisi: potranno a lei venire sussidî dalle altre scienze nelle ulteriori deduzioni, negli ulteriori sviluppi; ma alle leggi stechiometriche altro fondamento io non so vedere per ora che la rigorosa determinazione analitica.

A conclusioni analoghe sembra a me si debba giungere riguardo alla definizione di elemento e credo inutile di ripetere quello che ho detto.

Per ciò che riguarda la deduzione della legge dei numeri proporzionali a me sembra che la dimostrazione dell'Ostwald nella sua forma primitiva fosse del tutto inesatta: colle successive modificazioni ed aggiunte non si fa altro che ammettere, in via indiretta, l'esistenza, dimostrata dalla esperienza, di quei numeri proporzionali la cui necessità avrebbe dovuto dimostrarsi *a priori*.

La teoria atomica nello insegnamento.

Sino a qui abbiamo parlato esclusivamente della legittimità delle deduzioni e delle definizioni dell'Ostwald: e tutto questo nulla ha che vedere colla teoria atomica.

Se la teoria atomica si debba ancora mantenere nella nostra scienza o no, è cosa del tutto diversa. Credo che bisogna distinguere in quanto si riferisce prima di tutto all'utilità sua.

Se si tratta della teoria atomistica del Dalton considerata in sè e non in quanto per essa si sviluppò la teoria molecolare atomica quale noi la concepiamo, io veramente sono in dubbio se essa abbia portato buoni o cattivi frutti, e sono un poco dell'idea dell'Ostwald che così briosamente in quell'aureo libro, *Die Schule der Chemie*, parla dell'ipotesi atomica (1).

Il maestro spiega allo scolaro che i pesi di combinazione e l'espressione della legge delle proporzioni multiple sono semplici sussidî di calcolo per esprimere i fatti. Lo scolaro si meraviglia e dice: curiosa! io pensava che questi numeri avessero un significato più profondo, dal quale la legge delle proporzioni multiple potesse essere

(1) Ostwald, *Die Schule der Chemie*, 2a Teil, pag. 39, anno 1904.

spiegata. E poichè il maestro gli domanda che cosa c'è di poco chiaro nella legge, lo scolaro replica che non c'è niente di poco chiaro, ma che gli sembrava che ci potesse essere qualche ragione nascosta dell'esistenza di una così meravigliosa legge. Già, dice il maestro, questo è un pensiero infantile, come quello del contadino, quando cercavano di spiegargli come era fatta una locomotiva. Il contadino, dopo esser stato ben bene a sentire, disse alla fine: già, ho capito tutto benissimo, ma vorrei sapere dove è il cavallo che trascina tutti i vagoni. Che bestia! dice lo scolaro. Non tanto, replica il maestro. Il contadino non conosceva altro mezzo che i cavalli per trasportare le vetture, non aveva visto altro, e quindi pensava di non poter capire bene la locomotiva che quando gli avessero mostrato il cavallo. Un simile cavallo nascosto hanno ammesso cento anni fa i chimici nella legge dei pesi di combinazione. Un cavallo? ma come? dice lo scolaro. Mi spiegherò meglio, risponde il maestro. Io penso che si ebbe a quei tempi un bisogno simile di trovare una causa qualunque della legge dei pesi di combinazione, perchè senza questa non si poteva capire come una simile legge potesse sussistere: precisamente come il contadino non sapeva capacitarsi che un carro si possa mettere in movimento senza un cavallo. E quale sarebbe dnnque il cavallo dei chimici? domanda lo scolaro. Ed il maestro: Lo conosci già: sono gli atomi.

E qui c'è qualche cosa di vero. Realmente si potrebbe forse pensare che i chimici della prima metà del secolo XIX persero molto tempo per stabilire gli equivalenti o pesi atomici. Da un certo punto di vista questo è innegabile e credo che qualche volta la colpa ne sia stata l'idea atomistica, cioè di volere attaccare al concetto di equivalente quello di una costante fisica vera e propria, del peso di qualche cosa che in natura esiste, che ha un'esistenza a sè, che ha un peso assoluto ed immutabile, il peso dell'atomo. E questo va detto anche per coloro che formalmente prescindevano dalla teoria atomica: anche essi non sarebbero andati alla caccia del vero equivalente e avrebbero riconosciuto che per un elemento ci sono tanti equivalenti quante sono le forme di combinazione, solo che i varî equivalenti stanno fra loro in rapporto semplice. Se i chimici fossero stati più matematici, si sarebbero contentati del fatto che esistono certi numeri, secondo i quali, o multipli o summultipli dei quali, avvengono tutte le combinazioni chimiche: i quali, o i loro multipli o summultipli, moltiplicati per il calore specifico del corpo semplice danno il prodotto costante 6.4: pei quali, affetti da certi coefficienti interi semplicissimi, si hanno formule corrispondenti per sostanze isomorfe, i quali, o col coefficiente uno o con coefficienti semplicissimi, sono uguali al peso di volumi uguali di gas o vapori riferiti a quello dell'idrogeno fatto uguale ad uno ecc. ecc. Quanto al fissare per ogni elemento un equivalente per comodità di calcolo e per avere analogia di formule, e, specialmente in chimica organica, un sistema di formule meglio corrispondenti ai fatti chimici, poteva farsi una convenzione qualsiasi, e certo per una mente matematica tutto sarebbe andato perfettamente bene e le leggi generali non avrebbero perso niente della loro importanza, e non si avrebbe nemmeno avuto troppa paura delle formule con coefficienti frazionari. Ma i chimici non erano matematici. E così credo che il pregiudizio atomico possa qualche volta aver fatto perdere del tempo in relazione allo sviluppo della chimica teorica o generale che dir si voglia, se però si può dire aver perso del tempo l'essersi moltiplicati i lavori

analitici e le discussioni sopra argomenti di tanto interesse, l'avere la ricerca del vero equivalente acuiti i mezzi di osservazione e di analisi. Questo quanto all'ipotesi daltoniana nuda e cruda.

Se però veniamo all'ipotesi molecolare atomica, quella che ha per base i concetti e l'ipotesi dell'Avogadro e la legge degli atomi del Cannizzaro, quella che ci ha condotti agli attuali pesi molecolari e atomici, o pesi di reazione e pesi elementari, le cose sono molto diverse.

Supponiamo pure che si fossero fissati arbitrariamente gli equivalenti e si fosse in base a questi lavorato e stabilite formule e constatate relazioni. Un momento sarebbe venuto in cui si sarebbe ricercato se vi erano, e quali erano, gli equivalenti pei quali senza nessun coefficienze, cioè col coefficiente 1, si verificava la legge del Dulong e del Petit, si avevano formule analoghe per composti isomorfi, che coincidevano con i pesi di volumi uguali di vapori, che obbedivano tali e quali alla classificazione del Mendeleeff, ecc. Si sarebbe allora visto che sono pesi di volumi uguali allo stato gassoso quelli che esprimono le quantità secondo le quali avvengono le reazioni, e, progredita la scienza, che solo prendendo i corrispondenti di questi pesi potevasi giungere alla dimostrazione delle leggi riguardanti le soluzioni diluite e che sono i pesi minimi degli elementi che entrano nei pesi di volumi uguali di vapore dei diversi composti quelli che rappresentano gli equivalenti che, senza coefficiente, obbediscono a tutte le condizioni di cui sopra abbiamo detto. E questi fatti avrebbero necessariamente condotto ad ammettere che tali pesi delle sostanze debbono rappresentare qualche cosa di fisicamente definito, obbedendo a leggi così semplici e tanto diverse l'una dall'altra: e l'ipotesi atomica avrebbe fatto di nuovo la sua apparizione, E poichè l'ipotesi molecolare atomica dell'Avogadro è quella che proprio conduce ad ammettere necessariamente l'adozione di pesi di volumi uguali di sostanze allo stato gassoso come quantità chimicamente e fisicamente comparabili, così l'ipotesi stessa avrebbe ricevuto, come riceve, una grande conferma sperimentale, e anche se fosse stata messa da parte, sarebbe stata ripresa e messa in grande onore.

Ho detto una grande conferma sperimentale: secondo la mia opinione tale conferma è incomparabilmente di maggior valore che non quella che si ricava dalla teoria cinetica dei gas. A questa non credo, contro il parere di molti, che si debba dare grande importanza. La pressione dipende dal numero delle molecole e dalla forza dell'urto, la quale alla sua volta dipende dalla massa e dalla velocità della molecola. Si ammettono volumi uguali, pressioni uguali dei gas, ossia uguale forza degli urti totali, si ammette, per ipotesi, che la forza dell'urto per ciascuna molecola sia uguale nelle due masse gassose: bisogna quindi ammettere che sia uguale il numero delle molecole. Non ritroviamo nella dimostrazione che quello che ci abbiamo introdotto colle diverse premesse e supposizioni.

L'Ostwald si propone di cercare se è possibile la eliminazione della teoria atomica anche dalla chimica organica. Non sembra a dire il vero che siamo sulla strada. Non so nemmeno se proprio sia scelto bene il momento per l'eliminazione della teoria atomica in genere, ora che gli elettroni ci riconducono ai concetti atomistici.

Ma l'eliminazione della teoria atomica nulla ha che vedere colle deduzioni dell'Ostwald, quando, come egli ha inteso in precedenti lavori, si prendano sempre come

base i pesi di volumi uguali di sostanze allo stato gassoso o allo stato di soluzione diluita nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione del gas o di pressione osmotica: poco importa che si chiamino invece di pesi molecolari, pesi normali o pesi di reazione o pesi molari: e per pesi di combinazione, se non si vogliono chiamar pesi atomici, quelli che derivano dalla legge del Cannizzaro. L'abbandono della teoria atomica inteso in questo senso non lo credo utile nè opportuno; ma ad ogni modo in definitiva non si tratterebbe, per noi chimici, che di parole.

Credo opportuno di riportare quanto io stampai or sono quattro anni a questo proposito in una monografia: *Generalità e leggi fondamentali della chimica*, comparsa nel volume I della *Nuova Enciclopedia* del prof. Guareschi.

« **Abbandono dell'ipotesi molecolare e atomica.** — Ma la tendenza attuale nella chimica è piuttosto di liberarsi ogni volta che si può dalle ipotesi, per quanto attraenti, ove non sieno assolutamente necessarie. Quel geniale pensatore e grande agitatore di idee che è Guglielmo Ostwald crede che noi possiamo adesso nella chimica generale mettere da parte l'ipotesi molecolare e atomica e non parlar più di atomi e molecole, ma solo di pesi di combinazione e di pesi normali e nella deduzione di essi prescindere da ogni ipotesi sulla costituzione della materia. Su questo argomento, che tanto interessa noi italiani, giacchè è per opera di scienziati italiani che la teoria atomica si è sviluppata, ci soffermeremo un poco.

« Non vi ha dubbio che il concetto di peso molecolare e atomico è indipendente affatto dalla teoria da cui esso ha preso origine, come già disse maestrevolmente il Cannizzaro nelle parole che altrove abbiamo riportate. E non vi ha dubbio alcuno che, anche nella deduzione di essi, noi dalla ipotesi atomica possiamo prescindere e la via migliore di far ciò sembra a noi essere la seguente. Quello che vi è di essenziale in tutta la stechiometria chimica è l'esistenza della legge degli equivalenti, estesa anche alle sostanze composte, ed inoltre che pesi di volumi uguali della materia allo stato di estrema attenuazione, o rappresentano l'equivalente dedotto per via chimica, o stanno con esso in rapporti espressi da numeri interi. Ragionevole quindi si presenta l'idea di assumere tali pesi di volumi uguali come quelli di quantità chimicamente comparabili, salvo poi a vedere se tutte le conseguenze che derivano da tale assunzione, che è la più semplice che possa farsi, ma non l'unica, la giustifichino poi sufficientemente. Ne viene poi di conseguenza, che in pesi di volumi uguali dovendo essere contenute quantità di un determinato elemento tutte multiple di uno stesso numero (legge del Cannizzaro), per maggior semplicità, anche per la scrittura delle formule, come pesi di combinazione degli elementi sarà opportuno prendere le più piccole quantità contenute in questi pesi di volumi uguali in precisate condizioni. Tutto poi porta a giustificare le scelte fatte: per i pesi di combinazione la semplicità e l'uniformità che assume la legge del Dulong e del Petit, l'isomorfismo e le analogie chimiche rispettate, la grande generalizzazione del Mendeleeff possibile solo, nella espressione sua più semplice, con tali pesi di combinazione; per i pesi di volumi uguali poi, oltre il fatto che sono essi la base per calcolare tali pesi di combinazione, l'esistenza di tutte le proprietà collegative che si riferiscono alle soluzioni diluite e anche ad alcune proprietà fisiche che si studiano nella così detta Chimica fisica, senza contare poi che tali pesi di volumi uguali sempre si accordano colle esigenze relative

alle trasformazioni chimiche. Tutto questo è più che sufficiente a mostrare che, essendosi riferiti a pesi di volumi uguali, si è perfettamente giustificati, giacchè si giunge ad un meraviglioso sistema di numeri, che soddisfa a tutte le esigenze della chimica e della fisica. In tal modo esponendo le cose, non si può più parlare di ipotesi dell'Avogadro, giacchè sarebbe un assurdo il dire che in volumi uguali, in uguali condizioni, è contenuto lo stesso numero di pesi normali, od anche che i pesi normali occupano tutti uguale volume; giacchè i pesi normali appunto vengono ad essere definiti, e ad essere determinati, dall'occupare essi uguale volume, ecc. Ma la relazione da cui il postulato dell'Avogadro ha preso origine può così esprimersi: *pesi delle diverse sostanze che occupano allo stato di estrema attenuazione volumi uguali nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione (ordinaria dei gas od osmotica) rappresentano quantità chimicamente comparabili ed in cui gli elementi entrano tutti per multipli interi del loro peso di combinazione*; od anche: *tutte le trasformazioni chimiche avvengono sempre secondo pesi di sostanze che, allo stato di estrema attenuazione e in uguali condizioni occupano volumi uguali, ed in essi pesi vi è sempre un numero intero di pesi di combinazione degli elementi.* Volendosi prescindere dalla ipotesi molecolare e atomica e bandire i nomi di molecole e atomo, crediamo che si possa chiamare coll'Ostwald *peso normale* il *peso molecolare*, se pure non si preferisce di chiamarlo *peso di reazione*, ma, quanto al *peso atomico*, crediamo che meglio sarebbe chiamarlo *peso elementare*, anzichè *peso di combinazione*, nome che ormai è già stato adoperato come sinonimo di equivalente.

« Ma, pure essendo tutto ciò vero, noi non crediamo che sia giunto ancora il momento di abbandonare la teoria molecolare e atomica. Sono assai pochi, se pur esistono, i fenomeni fisici, certo nessuno dei chimici, che sieno in contraddizione con i principî di essa; onde manca una delle ragioni più gravi perchè l'ipotesi si debba abbandonare, quella di non andare più d'accordo coi dati esperimentali. Inoltre di essa noi potremo forse fare a meno, di sicuro non acquistando in chiarezza nè in brevità, nella esposizione delle teorie fondamentali della chimica e anche in molte parti della meccanica chimica, ma certo noi dobbiamo invocarla nella chimica organica, nella quale l'estensione, diremo anzi la materializzazione dell'idea atomistica, ha condotto ad importantissime teorie feconde di risultati e di lavori che hanno aperto nuovi orizzonti alle nostre conoscenze. Non escludiamo che altre rappresentazioni grafiche, altri diagrammi che non sieno quelli atomici, non potranno essere immaginati per ispiegare le isomerie, ma certo non vediamo per ora come dalla ipotesi atomica noi possiamo prescindere in tutta la stereochimica con le sue applicazioni allo studio del potere rotatorio ottico. Onde sembra assai inutile il ripudio di una teoria da cui poi non si può prescindere in nessun modo in altre parti fondamentali della scienza. Aggiungasi poi che non ancora è venuto il tempo di rigettare completamente la teoria cinetica dei gas, fondata esclusivamente sulla ipotesi molecolare e atomica, nè quella genialissima del Van der Waals, che presuppone la costituzione molecolare della materia. Questo per ciò che riguarda l'utilità in sè di simile abbandono, senza tener conto poi del fatto, già messo in rilievo dal Cannizzaro, che in realtà l'esistenza delle leggi fondamentali della chimica alle idee atomiche ci spinge senza quasi volerlo, come già a queste fu spinto il Dalton.

« Dal punto di vista didattico poi non crediamo molto utile, per ora, simile abbandono; coll'esposizione attuale noi abbiamo il vantaggio di collegare sin da principio, in modo del tutto soddisfacente per la intelligenza, il fenomeno chimico col fenomeno fisico, giacchè all'ipotesi dell'Avogadro si giunge non in base a fatti chimici, ma in base alla conoscenza di fatti di ordine puramente fisico sulla analogia di comportamento dei gas; e, fatta questa ipotesi, tutto scende piano e logico, e necessario. Mentre, dalla ipotesi molecolare e atomica volendo prescindersi, resta sempre come assunzione gratuita, ragionevole se vuolsi come la più semplice, ma sempre puramente gratuita, quella di riferirsi ai pesi di volumi uguali di materia allo stato di estrema attenuazione. Sta bene che tutto poi giustifica questa assunzione, ma non scaturisce essa come legittima conseguenza di un principio fondamentale; e notisi poi che le conseguenze alle quali in base ad essa si giunge, sono sì le più semplici e le più eleganti, ma non è detto che si impongano necessariamente al nostro spirito; infatti anche in volumi non uguali, ma che stessero fra loro in rapporto espresso da numeri interi, noi troveremmo che le quantità in peso di un elemento sono tutte multiple intere di una stessa; e la relazione del Dulong e del Petit, dal punto di vista puramente stechiometrico, non perderebbe molto se i calorici elementari (chiamiamoli così), invece che essere uguali fossero tra loro in rapporto semplice, come pure se la grande legge periodica del Mendeleeff si verificasse per pesi elementari affetti da multipli espressi da numeri semplici non cesserebbe per questo di essere una relazione di una capitale importanza. Per tutte queste e per altre ragioni noi crediamo che non sia ancora venuto il momento di abbandanare nella esposizione delle teorie fondamentali della chimica e nell'insegnamento l'ipotesi molecolare e atomica, pur ritenendo che pesi molecolari e atomici sono quantità indipendenti da qualsiasi ipotesi e che sempre ci rappresenteranno delle realtà; e che anche la deduzione loro può farsi senza ricorrere ad ipotesi alcuna sulla costituzione della materia, ma solo basandosi sulla conoscenza dei rapporti secondo i quali avvengono le trasformazioni chimiche ».

L'esperienza di questi quattro anni, in alcuni dei quali, sia nei corsi di chimica generale che in quello di chimica fisica, ho voluto prescindere affatto dalla teoria molecolara e atomica, mi ha confermato sempre più nella convinzione che didatticamente, in specie nei corsi elementari, non c'è nessun vantaggio, ma molti inconvenienti nell'abbandono di questa teoria.

Legge degli atomi del Cannizzaro.

Il Cannizzaro, nelle osservazioni che ebbe a fare al discorso dell'Ostwald, mette in rilievo come l'Ostwald non abbia cercato di dedurre dalla dinamica chimica la legge del Gay-Lussac sui volumi dei gas che si combinano, la quale legge, secondo il Cannizzaro, giustamente è da ritenersi come la più importante tra quelle stechiometriche giacchè da essa le altre possono dedursi. Importanza riconosciuta anche dall'Ostwald, il quale si riferisce sempre ai pesi normali o molari che occupano volumi uguali allo stato gassoso, e ai pesi di combinazione dedotti in base a quella legge che il Cannizzaro chiamò degli atomi, la quale pure si dovrebbe cercare di dedurre dai principî fonda-

mentali della dinamica chimica. E, questa dedotta, tutte le altre sarebbero pure dedotte, eccetto quella delle proporzioni fisse forse, la quale però è sempre necessariamente supposta ed ammessa, perchè altrimenti tutti gli enunciati non avrebbero senso.

Sarebbe certamente un tentativo degno della più grande considerazione quello di indagare se è possibile simile deduzione e non sembrerebbe impossibile di arrivarci, giacchè la materia allo stato gassoso o a quello di estrema diluizione, è pur quella che sempre si presta meglio alle applicazioni delle leggi termodinamiche, degli equilibri e delle fasi; cosicchè, come gia abbiamo visto, per i sistemi gassosi si è giunti a definire in modo assai elegante la differenza tra miscuglio e combinazione chimica fondandosi sopra il concetto termodinamico del potenziale interno dei sistemi che si considerano. E certo acquisterebbe l'Ostwald, oltre le tantissime, una nuova benemerenza verso la nostra scienza, se egli potesse giungere a tale dimostrazione.

Il Cannizzaro afferma che la legge degli atomi racchiude tutte le altre leggi, e su questo credo interessante di soffermarmi prima di chiudere il mio lavoro.

La legge del Cannizzaro, come è noto, fu da lui enunciata in questo modo.

« Le varie quantità dello stesso elemento contenute in volumi uguali sia del corpo libero, sia dei suoi composti, sono tutte multiple intere di una medesima quantità, cioè ciascun elemento ha un valore numerico speciale per mezzo del quale e di coefficienti interi si può esprimere la composizione in peso di volumi uguali dei vari corpi dove esso è contenuto.

« La legge sopra enunciata, da me detta legge degli atomi, contiene in sè quella delle proporzioni multiple e quella dei rapporti semplici tra volumi ».

Certissimo è che essa è la legge più generale che si conosca, ora poi che si può estendere alle soluzioni diluite, e non solo essa contiene le leggi delle proporzioni multiple e quelle dei volumi del Gay-Lussac, mà contiene ancora quelle dei pesi proporzionali.

Cosicchè, se non fosse l'affetto che si ha sempre all' esposizione didattica basata sul metodo storico, non vi ha dubbio che l'insegnamento della chimica acquisterebbe rapidità e eleganza partendo da questa legge. Potrebbe enunciarsi come dato sperimentale, dopo avere parlato sulle leggi fondamentali dei gas ed in generale sulle trasformazioni, reazioni e combinazioni chimiche, e dopo di avere affermato il principio della legge delle proporzioni fisse, senza il quale non si potrebbe parlare di composizione dei corpi, sebbene l'enunciato della legge implichi il riconoscimento del fatto che lo stesso corpo si è trovato aver sempre la stessa composizione. Si aggiungerebbe che la legge si applica alle soluzioni diluite, e che per conseguenza non vi è ragione di non estenderla anche a quei corpi che non si sono potuti ridurre allo stato gassoso nè a quello di soluzione diluita. E come conseguenza ne dedurremmo subito che le combinazioni degli elementi fra di loro, se se ne hanno più di una, debbono avvenire secondo multipli interi di queste più piccole quantità (legge delle proporzioni multiple): che se gli elementi o i composti si combinano fra di loro allo stato aeriforme, la combinazione deve avvenire per volumi uguali o per rapporti semplici di volume, e che il volume del composto formatosi, se aeriforme, deve stare in rapporto semplice coi volumi dei componenti (legge dei volumi del Gay Lussac): finalmente poi che questi numeri debbono essere in rapporto fra di loro, perchè p. es., se si considerano delle combinazioni del

cloro e del bromo, pel cloro si avrà sempre uno stesso numero e pel bromo uno stesso numero e questo anche quando si considerasse o si consideri una combinazione dei due elementi fra loro; ossia il numero che esprime la quantità secondo la quale, o multipli semplici della quale, il cloro e il bromo si combinano cogli altri elementi rappresentano anche quelli secondo i quali i due elementi si uniscono fra loro: e questa non è che la legge dei numeri proporzionali.

Una volta giunti a questo punto, si potrebbe mettere in rilievo l'importanza somma che i pesi di volumi eguali di materia allo stato gassoso o di materia allo stato di soluzione diluita hanno nella chimica, e far notare inoltre che realmente le reazioni avvengono sempre (il che è poi una legittima estensione della dedotta legge del Gay-Lussac) secondo pesi di sostanze che allo stato di attenuazione occupano volumi uguali o secondo multipli semplici di questi pesi.

E qui debbo spiegarmi. Non sarebbe giustificato di voler dedurre che si debbono prendere volumi uguali di materia allo stato gassoso, dal fatto che in tal modo si ha quella legge della moltiplicità o del massimo comun divisore, giacchè, anche non assumendo volumi uguali, quella legge si avrebbe sempre. Mi spiego: supponiamo si affermasse che per tutti i composti del cloro contenenti carbonio si deve assumere un volume, per quelli contenenti ossigeno due volumi, per tutti gli altri con gli altri elementi quattro volumi del composto allo stato gassoso: ebbene, resterebbe sempre vero che 35.5 è il massimo comun divisore di tutte le quantità di cloro contenute nei pesi dei diversi volumi.

Ma invece l'assunzione della legge dei volumi uguali è perfettamente giustificata quando si considerino le cose da questo punto di vista, che essa è l'espressione più semplice del fatto della multiplicità: nessuna ragione vi è di proporre l'adozione di volumi differenti quando dall'adozione dei volumi uguali ne scaturiscono fuori così importanti relazioni, alcune delle quali se non sparirebbero, certo sarebbero meno semplici se si assumessero volumi differenti.

Non vi è alcun dubbio che l'enunciato della legge del Cannizzaro rappresenta la sintesi più comprensiva e più rapida delle leggi stechiometriche. Una volta poi enunciata questa legge e messa in rilievo la grande importanza che hanno in chimica i pesi di volumi di sostanze allo stato di grande attenuazione presi in condizioni fisiche uguali, certo che la ipotesi dell'Avogadro, come già in altro luogo ho fatto rilevare, viene quasi ad imporsi al nostro spirito. E sino a che non si riuscirà di dedurre la legge del Cannizzaro dai principî fondamentali della meccanica chimica, credo che quella ipotesi non potrà essere bandita dalla scienza. Si potrà non parlarne, ma essa sarà sempre presente al nostro spirito.

Auguro anch' io, insieme col mio grande maestro, che possa riuscire al professore Ostwald questa importantissima deduzione, per la quale certo mi sembra che siano a prevedersi difficoltà minori che non per quella delle leggi stechiometriche ridotte a semplici relazioni di peso e non considerate connesse alle proprietà della materia allo stato di estrema diluizione oppure alle proprietà termiche degli elementi, sulle quali si basa l'altra grande legge stechiometrica, quella del Dulong e del Petit.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIII. (1892-1905). Fasc 7°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII. (1892-1904). Fasc. 1°-8°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-4°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCI

SERIE QUINTA — VOLUME V — FASCICOLO V.

ERNESTO CESÀRO

FONDAMENTO INTRINSECO

DELLA

PANGEOMETRIA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

Fondamento intrinseco della pangeometria.

Memoria del Corrispondente ERNESTO CESÀRO

presentata nella seduta del 4 dicembre 1904.

Se nelle due precedenti comunicazioni [1] abbiamo soltanto voluto mostrare come il metodo intrinseco possa riuscire utile per lo studio della geometria negli spazii non-euclidei, in questa terza noi affermiamo la possibilità di riedificare su nuova base, mediante il metodo stesso, tutta la geometria non-euclidea. Si consideri la linea rappresentata dall'equazione

$$f(a\,,b\,,c\,,\dots\,;u\,,v)=0\,, \tag{1}$$

con $a\,,b\,,c\,,\dots$ funzioni del parametro t, dal quale dipendono le posizioni del reticolo delle linee coordinate, supposto mobile e indeformabile; e si cerchino le condizioni alle quali debbono soddisfare $a\,,b\,,c\,,\dots$ affinchè la linea considerata resti immobile, pur concedendo che non restino necessariamente tali i suoi punti. In altri termini l'*immobilità* della linea (1) deve per noi consistere nell'invariabilità della sua posizione, al variare di t, senza escludere che, quando t passa al valore $t+dt$, un qualsiasi punto $(u\,,v)$ della linea possa recarsi in altro posto $(u+\delta u\,,v+\delta v)$ sulla linea stessa; ma, considerando questa come rappresentata dalla (1) nel piano immobile, gli incrementi delle coordinate dovranno esser l'uno all'altro vincolati mediante la relazione

$$\frac{\partial f}{\partial u}\delta u+\frac{\partial f}{\partial v}\delta v=0\,.$$

Ne segue, se si tien conto delle formole fondamentali

$$\frac{\delta u}{dt}=\frac{du}{dt}-\varphi(u\,,v)\quad,\quad\frac{\delta v}{dt}=\frac{dv}{dt}-\psi(u\,,v)\,, \tag{2}$$

che si ha pure

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\varphi+\frac{\partial f}{\partial v}\psi.$$

[1] Rendiconti, pp. 438-445, 658-667.

Ciò premesso, la derivazione della (1) rispetto a t ci dà

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{dt}+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial u}\varphi+\frac{\partial f}{\partial v}\psi=0; \tag{3}$$

ed è chiaro che il coincidere di questa con la (1) esprime appunto l'immobilità della linea che si considera.

Applicando la precedente osservazione troviamo subito che per l'immobilità della linea

$$au+bv+c=0 \tag{4}$$

si richiede che l'equazione

$$\frac{da}{dt}u+\frac{db}{dt}v+\frac{dc}{dt}+a\varphi+b\psi=0 \tag{5}$$

non si distingua dalla (4), e per conseguenza che si abbia

$$\begin{vmatrix} a & \dfrac{da}{dt}+a\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+b\dfrac{\partial\psi}{\partial u} \\ b & \dfrac{db}{dt}+a\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+b\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=0,$$

ossia

$$a\frac{db}{dt}-b\frac{da}{dt}+a^2\frac{\partial\varphi}{\partial v}+ab\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)-b^2\frac{\partial\psi}{\partial u}=0, \tag{6}$$

per tutti i punti (u, v) soddisfacenti alla (4). Questa relazione (6) non può, dunque, esser distinta dalla (4); e però si deve avere anche

$$\begin{vmatrix} a & a^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+ab\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)-b^2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2} \\ b & a^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+ab\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right)-b^2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\end{vmatrix}=0,$$

ossia

$$a^3\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+a^2b\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right)+ab^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)+b^3\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}=0.$$

Ne segue, per l'arbitrarietà del rapporto a/b,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=0\ ,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\ ,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\ ,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}=0, \tag{7}$$

d'onde

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}=2\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}=0\ ,\ \frac{\partial^3\psi}{\partial v^3}=2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=0.$$

Dunque φ e ψ hanno necessariamente la forma

$$\alpha u^2 + \beta uv + \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 \quad , \quad \alpha' uv + \beta' v^2 + \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 ;$$

e poichè, per la seconda e terza delle (7), dev'essere $\beta' = \beta$, $\alpha = \alpha'$, si ha finalmente

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi(u, v) = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 + (\alpha u + \beta v) u, \\ \psi(u, v) = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 + (\alpha u + \beta v) v. \end{cases}$$

Dopo ciò la (5) si spezza nelle condizioni

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} + a(\alpha_1 - \gamma) + b\alpha_2 = c\alpha, \\ \dfrac{db}{dt} + a\beta_1 + b(\beta_2 - \gamma) = c\beta, \\ \dfrac{dc}{dt} + a\gamma_1 + b\gamma_2 = c\gamma, \end{cases}$$

necessarie e sufficienti per l'immobilità della linea (4); ed è facile constatare che le relazioni (5) e (6) si riducono alla forma

$$(\alpha u + \beta v + \gamma)(au + bv + c) = 0 \quad , \quad (a\beta - b\alpha)(au + bv + c) = 0,$$

sicchè sono soddisfatte in ciascun punto della predetta linea.

Ora noi vogliamo determinare gli *otto* coefficienti $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, i quali possono evidentemente variare con t, ma debbono dipendere da un minor numero di funzioni di t, e propriamente (come si vedrà) da *tre* sole funzioni indipendenti, atte a caratterizzare tutti i possibili movimenti del piano, sostegno delle linee coordinate, sul piano immobile. In particolare le (2), applicate all'origine M($u=0, v=0$), ci dicono subito che, essendo $\delta u = -\gamma_1 dt$, $\delta v = -\gamma_2 dt$, non vi è legame alcuno fra i coefficienti γ_1 e γ_2, giacchè questi definiscono lo spostamento (arbitrario) dell'origine. Ogni altro coefficiente non potrà dunque dipendere da t se non mediante γ_1, γ_2 ed una terza funzione, atta a definire un movimento del reticolo coordinato intorno all'origine fissa. È questa dipendenza che importa precisare. Innanzi tutto si osservi che, sottoponendo le coordinate u, v ad una trasformazione lineare omogenea (che non sposta l'origine), si può sempre, ed in infiniti modi [1], supporre che per $u=0, v=0$ sia $E=1, F=0, G=1$. In questa ipotesi le note formole [2]

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \alpha_{111}\varphi + \alpha_{121}\psi = \dfrac{F\chi}{\sqrt{EG - F^2}} \quad , \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial u} + \alpha_{112}\varphi + \alpha_{122}\psi = -\dfrac{E\chi}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \alpha_{121}\varphi + \alpha_{221}\psi = \dfrac{G\chi}{\sqrt{EG - F^2}} \quad , \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha_{122}\varphi + \alpha_{222}\psi = -\dfrac{F\chi}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{cases}$$

[1] Cfr. Beltrami, *Opere matematiche*, t. I, pag. 272.

[2] Rendiconti, pag. 439.

dànno subito, per $u = 0$, $v = 0$,

$$\text{(11)} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \alpha^0_{111} + \gamma_2 \alpha^0_{121} = 0 \ , & \alpha_2 + \gamma_1 \alpha^0_{112} + \gamma_2 \alpha^0_{122} = -\varkappa, \\ \beta_1 + \gamma_1 \alpha^0_{121} + \gamma_2 \alpha^0_{221} = \varkappa \ , & \beta_2 + \gamma_1 \alpha^0_{122} + \gamma_2 \alpha^0_{222} = 0, \end{cases}$$

dove $\varkappa$ ed α^0_{ijk} rappresentano i valori di χ e di α_{ijk} nell'origine M. Il primo può dipendere da t, gli altri sono *costanti*. Così, noti i coefficienti $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ in funzione lineare di $\varkappa, \gamma_1, \gamma_2$, ci resta da determinare soltanto α e β.

Prima conviene ritornare sulle uguaglianze ([1])

$$\text{(12)} \quad \frac{\partial \chi}{\partial u} = \mathrm{K}\psi \cdot \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} \ , \quad \frac{\partial \chi}{\partial v} = -\mathrm{K}\varphi \cdot \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}$$

per dedurne, applicando la condizione $\partial^2/\partial u \partial v = \partial^2/\partial v \partial u$, e tenendo presenti le (10),

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial u} \varphi + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} \psi = 0,$$

d'onde (poichè φ/ψ dipende da t) risulta $\mathrm{K} = costante$. Ora, ponendo $u = 0$, $v = 0$ nelle note espressioni ([2]) di K in funzione dei simboli α_{ijk}, si trova che le relazioni

$$\text{(13)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_{122}}{\partial u} - \dfrac{\partial \alpha_{112}}{\partial v} = (\alpha_{111} - \alpha_{122})\, \alpha_{122} + (\alpha_{222} - \alpha_{121})\, \alpha_{112} - \mathrm{K}, \\ \dfrac{\partial \alpha_{121}}{\partial u} - \dfrac{\partial \alpha_{111}}{\partial v} = \dfrac{\partial \alpha_{122}}{\partial v} - \dfrac{\partial \alpha_{222}}{\partial u} = \alpha_{112}\, \alpha_{221} - \alpha_{121}\, \alpha_{122}, \\ \dfrac{\partial \alpha_{121}}{\partial v} - \dfrac{\partial \alpha_{221}}{\partial u} = (\alpha_{111} - \alpha_{122})\, \alpha_{221} + (\alpha_{222} - \alpha_{121})\, \alpha_{121} - \mathrm{K}, \end{cases}$$

son vere nell'origine. Giova inoltre dedurre dalle (10) le espressioni

$$\varphi_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \alpha_{111} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \alpha_{112} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\varphi_{12} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \alpha_{121} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \alpha_{122} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\varphi_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \alpha_{221} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \alpha_{222} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

delle derivate seconde covarianti di φ, e le analoghe espressioni $\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{22}$, relative a ψ. Un calcolo facile dà, ricordando le (12),

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} -\varphi_{11} = 2\left(\alpha_{111} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \alpha_{121} \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial \alpha_{111}}{\partial u} \varphi + \dfrac{\partial \alpha_{111}}{\partial v} \psi, \\ -\varphi_{12} = \alpha_{111} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \alpha_{121}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \alpha_{221} \dfrac{\partial \psi}{\partial u} + \dfrac{\partial \alpha_{121}}{\partial u} \varphi + \dfrac{\partial \alpha_{121}}{\partial v} \psi, \\ -\varphi_{22} = 2\left(\alpha_{121} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \alpha_{221} \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial \alpha_{221}}{\partial u} \varphi + \dfrac{\partial \alpha_{221}}{\partial v} \psi; \end{cases}$$

([1]) Rendiconti, pag. 440.

([2]) Bianchi, *Geometria differenziale*, pag. 51.

ed analogamente

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
-\psi_{11} &= 2\left(\alpha_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\alpha_{122}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{\partial\alpha_{112}}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\alpha_{112}}{\partial v}\psi,\\
-\psi_{12} &= \alpha_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\alpha_{122}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+\alpha_{222}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\alpha_{122}}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\alpha_{122}}{\partial v}\psi,\\
-\psi_{22} &= 2\left(\alpha_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\alpha_{222}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+\frac{\partial\alpha_{222}}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\alpha_{222}}{\partial v}\psi.
\end{aligned}\right.
$$

Mercè queste relazioni si può alle (7) dar la forma

$$
\begin{gathered}
\alpha_{221}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(\alpha_{222}-2\alpha_{121})\frac{\partial\varphi}{\partial v}-2\alpha_{221}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{\partial\alpha_{221}}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\alpha_{221}}{\partial v}\psi,\\
2(\alpha_{111}-2\alpha_{122})\frac{\partial\varphi}{\partial v}-(\alpha_{222}-2\alpha_{121})\frac{\partial\psi}{\partial v}+3\alpha_{221}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{\partial(\alpha_{222}-2\alpha_{121})}{\partial u}\varphi+\frac{\partial(\alpha_{222}-2\alpha_{121})}{\partial v}\psi,\\
2(\alpha_{222}-2\alpha_{121})\frac{\partial\psi}{\partial u}-(\alpha_{111}-2\alpha_{122})\frac{\partial\varphi}{\partial u}+3\alpha_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{\partial(\alpha_{111}-2\alpha_{122})}{\partial u}\varphi+\frac{\partial(\alpha_{111}-2\alpha_{122})}{\partial v}\psi,\\
\alpha_{112}\frac{\partial\psi}{\partial v}+(\alpha_{111}-2\alpha_{122})\frac{\partial\psi}{\partial u}-2\alpha_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\alpha_{112}}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\alpha_{112}}{\partial v}\psi;
\end{gathered}
$$

quindi, per $u=0\,,v=0$, se per poco si pongono uguali a zero γ_1 e γ_2, si trova

$$
(15)\qquad \alpha^0_{111}=2\alpha^0_{122}=2\lambda\quad,\quad \alpha^0_{222}=2\alpha^0_{121}=2\mu\quad,\quad \alpha^0_{112}=\alpha^0_{221}=0;
$$

poi, sostituendo questi risultati nelle formole precedenti, ed immaginando che a γ_1 e γ_2 si attribuiscano valori differenti da zero,

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\alpha^0_{111}}{\partial u}=2\frac{\partial\alpha^0_{122}}{\partial u}\quad,\quad\frac{\partial\alpha^0_{111}}{\partial v}=2\frac{\partial\alpha^0_{122}}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial\alpha^0_{222}}{\partial u}=2\frac{\partial\alpha^0_{121}}{\partial u}\quad,\quad\frac{\partial\alpha^0_{222}}{\partial v}=2\frac{\partial\alpha^0_{121}}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial\alpha^0_{112}}{\partial u}=\frac{\partial\alpha^0_{112}}{\partial v}=\frac{\partial\alpha^0_{221}}{\partial u}=\frac{\partial\alpha^0_{221}}{\partial v}=0,
\end{gathered}
$$

dove i simboli $\partial\alpha^0/\partial u$, ecc., stanno a rappresentare brevemente i valori di $\partial\alpha/\partial u$, ecc., per $u=0\,,v=0$. Inoltre dalle (13) segue

$$
\frac{\partial\alpha^0_{121}}{\partial v}=\mu^2-\mathrm{K}\quad,\quad\frac{\partial\alpha^0_{122}}{\partial u}=\lambda^2-\mathrm{K}\quad,\quad\frac{\partial\alpha^0_{121}}{\partial u}=\frac{\partial\alpha^0_{122}}{\partial v}=\lambda\mu\,.
$$

Ora siamo in grado di calcolare α e β. Osserviamo che nell'origine si ha

$$
\varphi_{12}=\beta-\mu\alpha_1-\lambda\beta_1\quad,\quad\psi_{12}=\alpha-\mu\alpha_2-\lambda\beta_2\,,
$$

ed anche, ricordando le (14),

$$
\begin{aligned}
-\varphi_{12}&=2\lambda\beta_1+\mu(\alpha_1+\beta_2)+\mu(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2)-\mathrm{K}\gamma_2\,,\\
-\psi_{12}&=\lambda(\alpha_1+\beta_2)+2\mu\alpha_2+\lambda(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2)-\mathrm{K}\gamma_1\,;
\end{aligned}
$$

sicchè, richiamando le (11), dalle quali si trae

$$\alpha_1 = -2\lambda\gamma_1 - \mu\gamma_2 \quad , \quad \alpha_2 = -\lambda\gamma_2 - \varkappa \, ,$$
$$\beta_1 = -\mu\gamma_1 + \varkappa \quad , \quad \beta_2 = -\lambda\gamma_1 - 2\mu\gamma_2 \, ,$$

si ottiene finalmente

$$\alpha = \mu\varkappa + \lambda(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) + K\gamma_1 \quad , \quad \beta = -\lambda\varkappa + \mu(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) + K\gamma_2 .$$

Ne segue che alle (8) si può dar la forma

$$\varphi = \varkappa\varphi_0 + \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 \quad , \quad \psi = \varkappa\psi_0 + \gamma_1\psi_1 + \gamma_2\psi_2 \, , \tag{16}$$

ponendo

$$\varphi_0 = v + (\mu u - \lambda v) u \quad , \quad \psi_0 = -u + (\mu u - \lambda v) v \quad ,$$
$$\varphi_1 = (\lambda u - 1)(\lambda u + \mu v - 1) + K u^2 \quad , \quad \psi_1 = \lambda v(\lambda u + \mu v - 1) + K uv \quad ,$$
$$\varphi_2 = \mu u(\lambda u + \mu v - 1) + K uv \quad , \quad \psi_2 = (\mu v - 1)(\lambda u + \mu v - 1) + K v^2 .$$

Qui conviene fermarsi per segnalare alcuni interessanti vincoli fra queste due terne di funzioni. Nel calcolare i minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 \end{Vmatrix}$$

si vede comparire la funzione

$$\Omega(u, v) = (\lambda u + \mu v - 1)^2 + K(u^2 + v^2),$$

e si trova

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = -(\lambda u + \mu v - 1)\Omega \, , \\ \varphi_2\psi_0 - \varphi_0\psi_2 = -v\Omega \quad , \quad \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0 = u\Omega . \end{array} \right. \tag{17}$$

Ne segue

$$\begin{vmatrix} \sqrt{K}.\varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \sqrt{K}.\psi_0 & \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix}^2 = \Omega^3 . \tag{18}$$

D'altra parte un calcolo facile dà

$$\left\{ \begin{array}{l} K\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \mathcal{E}\Omega \quad , \quad K\psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 = \mathcal{G}\Omega \, , \\ K\varphi_0\psi_0 + \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 = \mathcal{F}\Omega \, , \end{array} \right. \tag{19}$$

dove per brevità si è posto

$$\mathcal{E} = (\lambda^2 + \mu^2 + K) u^2 - 2\lambda u + 1 \quad , \quad \mathcal{G} = (\lambda^2 + \mu^2 + K) v^2 - 2\mu v + 1 \, ,$$
$$\mathcal{F} = (\lambda^2 + \mu^2 + K) uv - (\lambda v + \mu u) ;$$

e siccome il primo membro di (18) vale anche $(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)\Omega^2$, si vede che $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \Omega$.

Dell'importanza fondamentale di questa funzione Ω possiamo subito renderci conto richiamando le considerazioni fatte in principio, nell'ipotesi che il primo

membro della (1) non contenga le funzioni $a, b, c, \ldots$, vale a dire che $f=0$ rappresenti una linea *fissa nel piano mobile*, ossia rigidamente legata al reticolo delle linee coordinate. Non sembra possibile che questa linea resti *fissa nel piano immobile* per *qualunque* movimento; purtuttavia si giunge ad un risultato affermativo cercando che la condizione (3) sia soddisfatta indipendentemente dai valori di $\varkappa, \gamma_1, \gamma_2$, per la qual cosa occorre e basta che si abbia

$$(20) \quad \frac{\partial f}{\partial u}\varphi_0+\frac{\partial f}{\partial v}\psi_0=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}\varphi_1+\frac{\partial f}{\partial v}\psi_1=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}\varphi_2+\frac{\partial f}{\partial v}\psi_2=0,$$

in tutti i punti soddisfacenti ad $f=0$, e per conseguenza che si annullino simultaneamente i primi membri delle (17): ciò accade soltanto per $\Omega=0$. Così vediamo che la richiesta funzione f è appunto Ω. La linea $\Omega=0$ è dunque caratterizzata dalla sua assoluta inamovibilità, o *impossibilità di cambiar posto* nel piano immobile. Essa è proprio quella che si suol chiamare l'*assoluto*; ma è da prevedere che una linea siffatta non può esser costituita che da punti immaginarii o situati all'infinito: ciò verrà confermato in seguito.

Prima di passare alla determinazione di $\chi=\varkappa\chi_0+\gamma_1\chi_1+\gamma_2\chi_2$ osserviamo che si può scrivere

$$(21) \quad \begin{cases} \varphi_1=\Omega-\dfrac{v}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} \quad , \quad \psi_1=\dfrac{v}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}, \\ \varphi_2=\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} \quad , \quad \psi_2=\Omega-\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}, \end{cases}$$

d'onde segue

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u}\varphi_1+\frac{\partial\Omega}{\partial v}\psi_1=\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial\Omega}{\partial u}\varphi_2+\frac{\partial\Omega}{\partial v}\psi_2=\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial v},$$

ed anche

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\frac{\partial\psi_1}{\partial v}=\frac{3}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\frac{\partial\psi_2}{\partial v}=\frac{3}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Similmente si ha

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u}\varphi_0+\frac{\partial\Omega}{\partial v}\psi_0=2(\mu u-\lambda v)\,\Omega \quad , \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial u}+\frac{\partial\psi_0}{\partial v}=3(\mu u-\lambda v).$$

Dunque

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{3}{2\Omega}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\Omega}{\partial v}\psi\right).$$

Dopo ciò la condizione per l'integrabilità delle (12), ossia

$$\frac{\partial}{\partial u}(\varphi\,.\sqrt{EG-F^2})+\frac{\partial}{\partial v}(\psi\,.\sqrt{EG-F^2})=0,$$

diventa

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\psi\right)+\frac{3}{2\Omega}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\Omega}{\partial v}\psi\right)=0,$$

e si scinde in

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\sqrt{EG-F^2}\,.\,\Omega^{\frac{3}{2}}\right)=0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\sqrt{EG-F^2}\,.\,\Omega^{\frac{3}{2}}\right)=0.$$

Dunque la funzione $\sqrt{EG-F^2}\,.\,\Omega^{\frac{3}{2}}$ è costante; e poichè nell'origine il suo valore è 1, si ha $EG-F^2=1/\Omega^3$. Qui si osservi che nei punti *reali* è impossibile che sia $\Omega<0$. Ciò premesso, segue dalle (12)

$$d\chi=K\Omega^{-\frac{3}{2}}(\psi du-\varphi dv)\,; \tag{22}$$

ed in particolare, per le (21),

$$d\chi_1={}^1/_2K\Omega^{-\frac{3}{2}}(vd\Omega-2\Omega dv)=-Kd(v\Omega^{-\frac{1}{2}}),$$
$$d\chi_2={}^1/_2K\Omega^{-\frac{3}{2}}(2\Omega du-ud\Omega)=\quad Kd(u\Omega^{-\frac{1}{2}});$$

quindi

$$\chi_1=-\frac{Kv}{\sqrt{\Omega}} \quad , \quad \chi_2=\frac{Ku}{\sqrt{\Omega}}, \tag{23}$$

dopo avere osservato che, dovendo χ ridursi a $\varkappa$ nell'origine, χ_0, χ_1, χ_2 debbono, per $u=0, v=0$, ridursi rispettivamente ad $1,0,0$. Resta da calcolare χ_0. Basta porre φ_0 e ψ_0 sotto la forma

$$\varphi_0=-(\lambda u+\mu v-1)\,v+\mu(u^2+v^2) \quad , \quad \psi_0=(\lambda u+\mu v-1)\,u-\lambda(u^2+v^2),$$

per trovare subito

$$d\chi_0={}^1/_2K\Omega^{-\frac{3}{2}}\left[(\lambda u+\mu v-1)\,d(u^2+v^2)-2(u^2+v^2)\,d(\lambda u+\mu v-1)\right]$$
$$={}^1/_2\Omega^{-\frac{3}{2}}\left[(\lambda u+\mu v-1)\,d\Omega-2\Omega d(\lambda u+\mu v-1)\right],$$

e finalmente

$$\chi_0=-\frac{\lambda u+\mu v-1}{\sqrt{\Omega}}. \tag{24}$$

Prima di andare oltre conviene fermarsi a calcolare le derivate, rispetto a t, delle varie funzioni χ in un punto *immobile* (u, v). In virtù delle (12) si ha sempre

$$\frac{d\chi_i}{dt}=\frac{\partial\chi_i}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\chi_i}{\partial v}\psi=K\Omega^{-\frac{3}{2}}(\varphi\psi_i-\psi\varphi_i)$$
$$=K\Omega^{-\frac{3}{2}}\left[\varkappa(\varphi_0\psi_i-\psi_0\varphi_i)+\gamma_1(\varphi_1\psi_i-\psi_1\varphi_i)+\gamma_2(\varphi_2\psi_i-\psi_2\varphi_i)\right].$$

Intanto dalle (17), tenendo presenti le (23) e (24), segue

$$\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1=\Omega^{\frac{3}{2}}\chi_0 \quad , \quad \mathrm{K}(\varphi_2\psi_0-\varphi_0\psi_2)=\Omega^{\frac{3}{2}}\chi_1 \quad , \quad \mathrm{K}(\varphi_0\psi_1-\varphi_1\psi_0)=\Omega^{\frac{3}{2}}\chi_2 .$$

Dunque

$$\frac{d\chi_0}{dt}=\gamma_2\chi_1-\gamma_1\chi_2 \quad , \quad \frac{d\chi_1}{dt}=\varkappa\chi_2-\mathrm{K}\gamma_2\chi_0 \quad , \quad \frac{d\chi_2}{dt}=\mathrm{K}\gamma_1\chi_0-\varkappa\chi_1 , \tag{25}$$

e per conseguenza

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{d\varkappa}{dt}\chi_0+\frac{d\gamma_1}{dt}\chi_1+\frac{d\gamma_2}{dt}\chi_2 . \tag{26}$$

Ed ora eccoci in grado di determinare, ad un tempo, i coefficienti E, F, G della forma fondamentale, ed i corrispondenti simboli di Christoffel. Si prenda, per esempio, la prima delle (10), che per l'arbitrarietà di $\varkappa , \gamma_1 , \gamma_2$ si spezza in

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_0}{\partial u}+\alpha_{111}\varphi_0+\alpha_{121}\psi_0=\Omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{F}\chi_0 ,\\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\alpha_{111}\varphi_1+\alpha_{121}\psi_1=\Omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{F}\chi_1 ,\\ &\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\alpha_{111}\varphi_2+\alpha_{121}\psi_2=\Omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{F}\chi_2 . \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Dalle formole (23) e (24) risulta la relazione

$$\mathrm{K}\chi_0^2+\chi_1^2+\chi_2^2=\mathrm{K} ; \tag{28}$$

e questa, derivata rispetto a v o ad u, ci dà, in virtù delle (12),

$$\mathrm{K}\chi_0\varphi_0+\chi_1\varphi_1+\chi_2\varphi_2=0 \quad , \quad \mathrm{K}\chi_0\psi_0+\chi_1\psi_1+\chi_2\psi_2=0 .$$

Ora, moltiplicando le (27) per $\mathrm{K}\chi_0 , \chi_1 , \chi_2$, e sommando, si ottiene subito

$$\mathrm{K}\Omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{F}=\mathrm{K}\chi_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial u}+\chi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\chi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} .$$

Il secondo membro, cambiato di segno, vale

$$\mathrm{K}\varphi_0\frac{\partial\chi_0}{\partial u}+\varphi_1\frac{\partial\chi_1}{\partial u}+\varphi_2\frac{\partial\chi_2}{\partial u}=\mathrm{K}\,\Omega^{-\frac{3}{2}}(\mathrm{K}\varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2)=\mathrm{K}\mathcal{F}/\sqrt{\Omega} .$$

Operando analogamente sulle altre formole (10) si calcolano E, G, e si trova

$$\mathrm{E}=\mathcal{G}/\Omega^2 \quad , \quad \mathrm{F}=-\mathcal{F}/\Omega^2 \quad , \quad \mathrm{G}=\mathcal{E}/\Omega^2 .$$

La distanza ds fra i punti (u , v) ed $(u+du , v+dv)$ è dunque data dalla formola

$$\Omega^2ds^2=\mathcal{G}du^2-2\mathcal{F}du\,dv+\mathcal{E}dv^2 . \tag{29}$$

Se le (27) si moltiplicano invece per $K\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, o pure per $K\psi_0, \psi_1, \psi_2$, si perviene ad equazioni lineari fra le α, dalle quali è poi facile dedurre

$$-\alpha_{111} = K(E\varphi_0 + F\psi_0)\frac{\partial\varphi_0}{\partial u} + (E\varphi_1 + F\psi_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + (E\varphi_2 + F\psi_2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial u},$$

$$-\alpha_{121} = K(F\varphi_0 + G\psi_0)\frac{\partial\varphi_0}{\partial u} + (F\varphi_1 + G\psi_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + (F\varphi_2 + G\psi_2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}.$$

Trattando analogamente le altre relazioni (10), ed osservando che

$$(30)\quad \begin{cases} E\varphi_0 + F\psi_0 = v/\Omega \ , & E\varphi_1 + F\psi_1 = (1-\mu v)/\Omega \ , & E\varphi_2 + F\psi_2 = \lambda v/\Omega, \\ F\varphi_0 + G\psi_0 = -u/\Omega \ , & F\varphi_1 + G\psi_1 = \mu u/\Omega \ , & F\varphi_2 + G\psi_2 = (1-\lambda u)/\Omega \end{cases}$$

si ottengono finalmente le uguaglianze

$$\alpha_{111} = 2\alpha_{122} = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial u}\ , \quad \alpha_{222} = 2\alpha_{121} = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\ , \quad \alpha_{112} = \alpha_{221} = 0,$$

riducentisi alle (15) per $u=0\,,\,v=0$. Dunque, se si tien presente una ben nota (¹) forma dell'equazione differenziale delle geodetiche, si vede che, nel sistema precedentemente stabilito, *ogni equazione lineare fra le coordinate rappresenta una retta*, e viceversa.

Ora basta porre in opera i consueti procedimenti della Geometria differenziale per giungere a scoprire le leggi fondamentali della *geometria*, ed in pari tempo quelle della *cinematica* nel piano generale. Già si è visto che tutti i possibili moti rigidi risultano dal vario modo di comporre i particolari movimenti, definiti dalle funzioni x, γ_1, γ_2. Per $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ si ha un primo movimento speciale, che non sposta l'origine. Affinchè un tal movimento lasci immobile la linea $f=0$, bisogna che sia soddisfatta la prima delle (20); e poichè questa è, per le (12), manifestamente verificata per $f=\chi_0$, si vede che f dev'essere funzione di χ_0. Dunque le linee che il detto movimento non sposta son quelle della famiglia $\chi_0 =$ *costante*. In particolare (per $\chi_0 = 0$) la retta $\lambda u + \mu v = 1$, polare dell'origine rispetto all'assoluto, gode di tale proprietà. Si deve però notare che, per $K<0$, questa retta *non è* reale, giacchè Ω vi si riduce a $K(u^2+v^2)<0$. Si scopre il significato geometrico di $\chi_0(u,v)$ calcolando la distanza r d'un punto qualunque $O(u,v)$ all'origine M. Lungo la retta OM si ha $vdu = udv$, sicchè il secondo membro della (29), ossia

$$du^2 + dv^2 - 2(\mu du - \lambda dv)(vdu - udv) + (\lambda^2 + \mu^2 + K)(vdu - udv)^2,$$

si riduce a $du^2 + dv^2$. D'altra parte la (22) ci dà

$$d\chi_0 = K\Omega^{-\frac{3}{2}}(\psi_0 du - \varphi_0 dv) = -K\Omega^{-\frac{3}{2}}(udu + vdv);$$

(¹) Bianchi, *Geometria differenziale*, pag. 149.

quindi si ha dalla (29)

$$dr = \pm \frac{\sqrt{du^2 + dv^2}}{\Omega} = \pm \frac{udu + vdv}{\Omega\sqrt{u^2 + v^2}} = \mp \frac{\sqrt{\Omega}.d\chi_0}{K\sqrt{u^2 + v^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \frac{d\chi_0}{\sqrt{1 - \chi_0^2}},$$

d'onde, convenendo d'includere il doppio segno nel $\sqrt{\Omega}$ dell'espressione di χ_0,

$$r = \frac{1}{\sqrt{K}} \arccos \chi_0. \tag{31}$$

Le linee $\chi_0 =$ *costante* sono dunque le *circonferenze* col centro in M; ed il movimento che non le sposta è semplicemente una *rotazione* intorno al centro comune.

Per $K = 1/R^2$ non vi son punti all'infinito, giacchè la distanza r è sempre finita. È questo, come si sa, il caso della geometria *riemanniana*, che qui si presenta nelle due forme segnalate da Klein secondo che a $\sqrt{\Omega}$ si attribuisce un segno determinato, o invece si concede di passare dall'uno all'altro segno. Nella prima ipotesi non vi è che un sol punto corrispondente a ciascuna coppia di valori u, v delle coordinate, ed r raggiunge il massimo valore $\frac{1}{2}\pi R$ quando O cade sulla retta $\lambda u + \mu v = 1$. Nella seconda ipotesi vi son sempre due punti corrispondenti ad una medesima coppia (u, v), ed in particolare vi è un *altro* punto $M'(0,0)$, tale che $\sqrt{\Omega}$, uguale ad 1 in M, è uguale a -1 in M', sicchè la (31) dà $MM' = \pi R$. Così avviene che il luogo dei punti *più lontani* da M, invece di essere una retta, si riduce all'unico punto M'. Per $K = 0$ si ha la geometria *euclidea*; e la formola

$$r = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{1 - (\lambda u + \mu v)}$$

mostra subito che i punti all'infinito cadono sulla retta $\lambda u + \mu v = 1$, alla quale appunto si riduce l'assoluto. Finalmente per $K = -1/R^2$ si ha

$$r = \frac{R}{2} \log \frac{R(\lambda u + \mu v - 1) - \sqrt{u^2 + v^2}}{R(\lambda u + \mu v - 1) + \sqrt{u^2 + v^2}},$$

e si vede che i punti all'infinito costituiscono la linea *reale*

$$R(\lambda u + \mu v - 1) = \pm \sqrt{u^2 + v^2} \quad , \quad \text{ossia } \Omega(u, v) = 0:$$

è questo il caso della geometria *lobatschewskiana*.

Nel movimento caratterizzato dalla funzione γ_1, ossia corrispondente all'ipotesi $x = \gamma_2 = 0$, si dimostra, come nel caso precedente, che le linee immobili son quelle della famiglia $\chi_1 =$ *costante*, fra le quali è (per $\chi_1 = 0$) l'asse delle u. Si può dunque prevedere che ciascuna di queste linee è luogo di punti *equidistanti* dalla retta $v = 0$. La distanza p a questa retta si può valutare considerando sulla linea $\chi_1 =$ *costante* un punto appartenente all'asse delle v, giacchè per un tal punto è ovvio che la distanza all'origine è appunto p. Ne segue, ricordando successivamente le formole (31), (23), (28),

$$\chi_0 = \cos(p\sqrt{K}) \quad , \quad \chi_2 = 0 \quad , \quad \chi_1 = \sqrt{K}\,\mathrm{sen}(p\sqrt{K}),$$

d'onde, trasferendosi in qualsiasi altro punto della linea $\chi_1 =$ *costante*, si deduce p in funzione di u e di v. In modo analogo si calcola la distanza q all'asse delle v, e si riconosce che le linee $\chi_2 =$ *costante* son quelle che non cambiano posto nel movimento definito da γ_2. Adunque le *distanze* p, q, r *d'un punto qualunque* (u, v) *agli assi ed all'origine* son date dalle formole

$$(32) \qquad \chi_0 = \cos(r\sqrt{K}) \quad , \quad \chi_1 = \sqrt{K}\,\mathrm{sen}(p\sqrt{K}) \quad , \quad \chi_2 = \sqrt{K}\,\mathrm{sen}(q\sqrt{K}),$$

e sono perciò vincolate, in virtù di (28), dalla relazione

$$\mathrm{sen}^2(p\sqrt{K}) + \mathrm{sen}^2(q\sqrt{K}) = \mathrm{sen}^2(r\sqrt{K}),$$

riducentesi a $p^2 + q^2 = r^2$ nel piano di Euclide. Se poi si riflette che nella regione infinitesima, circostante ad M, il reticolo delle linee coordinate (u, v) è, in virtù delle convenzioni iniziali, simile al reticolo cartesiano, è chiaro che l'inclinazione θ di OM sull'asse delle u è data dalla formola $\mathrm{tg}\,\theta = v/u$. Ne segue

$$(33) \qquad \frac{\chi_1}{-\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{\chi_2}{\cos\theta} = \sqrt{K}\,\mathrm{sen}(r\sqrt{K});$$

quindi

$$\mathrm{sen}(p\sqrt{K}) = -\mathrm{sen}(r\sqrt{K})\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \mathrm{sen}(q\sqrt{K}) = \mathrm{sen}(r\sqrt{K})\cos\theta.$$

Così le distanze p e q restano espresse nel sistema delle *coordinate polari* r, θ. Per trovare poi la formola che serve, in questo sistema, a valutare un'area qualunque, si noti che, per le (33) e le (12), si ha

$$\frac{\partial(\chi_1, \chi_2)}{\partial(r, \theta)} = K^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sen}(r\sqrt{K})\cos(r\sqrt{K}) \quad , \quad \frac{\partial(\chi_1, \chi_2)}{\partial(u, v)} = K^2 \Omega^{-\frac{3}{2}} \chi_0,$$

d'onde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} = \Omega^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{sen}(r\sqrt{K})}{\sqrt{K}};$$

e però l'espressione generale delle aree diventa

$$\iint \Omega^{-\frac{3}{2}}\, du\, dv = \iint \frac{\mathrm{sen}(r\sqrt{K})}{\sqrt{K}}\, dr\, d\theta.$$

In particolare per un circolo di raggio r si trova $\frac{4\pi}{K}\mathrm{sen}^2\frac{r\sqrt{K}}{2}$, risultato inferiore, uguale o superiore a πr^2 secondo che K è positivo, nullo o negativo.

Per sapere qual sorta di linee siano le varie $\chi =$ *costante* cominciamo dal ricordare che l'angolo ϑ di due linee qualunque, $\Phi =$ *costante*, $\Psi =$ *costante*, è dato dalla formola

$$(34) \qquad \cos\vartheta = \frac{\Delta(\Phi, \Psi)}{\sqrt{\Delta\Phi \,.\, \Delta\Psi}},$$

dove

$$(35)\qquad \Delta(\Phi,\Psi)=\left[\mathcal{E}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial u}+\mathcal{F}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)+\mathcal{G}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right]\Omega,$$

e $\Delta f=\Delta(f,f)$. Dalla (34) è poi facile dedurre l'altra formola

$$(36)\qquad \operatorname{sen}\vartheta=\frac{\Omega^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta\Phi\,.\,\Delta\Psi}}\frac{\partial(\Phi,\Psi)}{\partial(u,v)},$$

egualmente utile. Per trovare le trajettorie ortogonali $f_i=$ *costante* delle linee $\chi_i=$ *costante* bisogna porre $\Delta(f_i,\chi_i)=0$, ossia, ricordando le (12),

$$(\mathrm{E}\varphi_i+\mathrm{F}\psi_i)\frac{\partial f_i}{\partial v}-(\mathrm{F}\varphi_i+\mathrm{G}\psi_i)\frac{\partial f_i}{\partial u}=0;$$

poi, per le (30),

$$u\frac{\partial f_0}{\partial u}+v\frac{\partial f_0}{\partial v}=0\quad,\quad u\frac{\partial f_1}{\partial u}+\left(v-\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial f_1}{\partial v}=0\quad,\quad \left(u-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\partial f_2}{\partial u}+v\frac{\partial f_2}{\partial v}=0.$$

Ne segue che f_0, f_1, f_2 sono funzioni arbitrarie di

$$u/v\quad,\quad u\Big/\left(v-\frac{1}{\mu}\right)\quad,\quad \left(u-\frac{1}{\lambda}\right)\Big/v,$$

rispettivamente; e però le varie $f=$ *costante* rappresentano rette concorrenti in tre punti, ossia in M e nei punti d'incontro degli assi con la retta $\lambda u+\mu v=1$. Siccome già sappiamo che le $\chi_0=$ *costante* sono circonferenze col centro in M, la mobilità dell'origine ci permette di asserire che *ogni circonferenza incontra ad angolo retto i proprii raggi*, e che, reciprocamente, ogni linea che taglia ortogonalmente le rette uscenti da un punto è una circonferenza col centro in quel punto. Dunque le $\chi_1=$ *costante* e le $\chi_2=$ *costante* costituiscono *altre due famiglie di circonferenze concentriche*. Mediante la (34) possiamo inoltre calcolare gli angoli ϑ_0], ϑ_1, ϑ_2 delle tre circonferenze, incrociantisi in ciascun punto (u,v). Quando per Φ e Ψ si pongono, in (35), due funzioni χ_i e χ_j, il secondo membro diventa uguale, in virtù delle (12), al prodotto di

$$\mathrm{E}\varphi_i\varphi_j+\mathrm{F}(\varphi_i\psi_j+\varphi_j\psi_i)+\mathrm{G}\psi_i\psi_j$$

per K^2. Ne segue, ricordando le (30),

$$(37)\qquad \Delta\chi_0=\mathrm{K}(1-\chi_0^2)\quad,\quad \Delta\chi_1=\mathrm{K}(\mathrm{K}-\chi_1^2)\quad,\quad \Delta\chi_2=\mathrm{K}(\mathrm{K}-\chi_2^2),$$

e $\Delta(\chi_i,\chi_j)=-\mathrm{K}\chi_i\chi_j$ per $i \gtrless j$. Quindi, computando gli angoli ϑ in un senso conveniente, la (34) dà

$$\mathrm{K}\chi_0^2\,.\cot\vartheta_0=\chi_1^2\,.\cot\vartheta_1=\chi_2^2\,.\cot\vartheta_2=\chi_0\chi_1\chi_2\,;$$

ed è poi facile riconoscere che la (28) esprime la relazione evidente $\vartheta_0+\vartheta_1+\vartheta_2=2\pi$.

Le espressioni testè calcolate sono utili anche per misurare le *velocità* nei varii movimenti già considerati. Per ogni punto (u, v) del piano mobile, se al parametro t si dà il significato di *tempo*, la velocità $v = ds/dt$ è data dalla formola

$$v^2 = E\varphi^2 + 2F\varphi\psi + G\psi^2, \tag{38}$$

poichè dalle (2) si ha $\delta u = -\varphi dt$, $\delta v = -\psi dt$. Se con v_0, v_1, v_2 designiamo le velocità nei moti rispettivamente caratterizzati da $\varkappa, \gamma_1, \gamma_2$, nell'ipotesi che alla corrispondente funzione si attribuisca il valore 1, è chiaro che si ha $Kv_i = \sqrt{\Delta}\chi_i$, cioè, in virtù delle (37) e delle (32),

$$v_0 = \frac{\operatorname{sen}(r\sqrt{K})}{\sqrt{K}} \quad , \quad v_1 = \cos(p\sqrt{K}) \quad , \quad v_2 = \cos(q\sqrt{K}).$$

Basta poi in (38) sostituire le (16) per trovare la formola

$$v^2 = \frac{\varkappa^2 - \chi^2}{K} + \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \tag{39}$$

che include le precedenti. Nell'origine si ha $v_1 = v_2 = 1$. Ne risulta che nei movimenti speciali caratterizzati dalle funzioni γ_1 e γ_2, queste rappresentano le velocità dell'origine. Per conoscere il significato di $\varkappa$ si considerino, nel corrispondente moto speciale, due posizioni O ed O′ d'un medesimo punto del piano mobile, negli istanti t e $t + dt$. L'angolo OMO′ ha il valore

$$\delta \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = \frac{u\delta v - v\delta u}{u^2 + v^2} = \varkappa \frac{v\varphi_0 - u\psi_0}{u^2 + v^2} dt = \varkappa dt,$$

e però non dipende da u e v. Dunque $\varkappa$ è la *velocità angolare* del piano mobile, nella rotazione intorno ad M.

Ora passiamo a considerare un movimento generale, e domandiamoci se, in un dato istante, esistono punti *non trascinati* nel movimento stesso, tali cioè che $\varphi(u, v) = 0$, $\psi(u, v) = 0$. Le espressioni generali di φ e ψ, trovate in principio, condurrebbero a *tre* punti invece che all'*unico* C, al quale si giunge escludendo i punti dell'assoluto mediante l'ipotesi $\Omega \gtreqless 0$. Prendendo φ e ψ sotto la forma (16), e ricordando le (17), si vede subito che dev'essere, per l'esclusione fatta,

$$\frac{\lambda u + \mu v - 1}{\varkappa} = \frac{v}{\gamma_1} = \frac{-u}{\gamma_2}, \tag{40}$$

d'onde risultano le coordinate del punto C:

$$u_0 = \frac{\gamma_2}{\varkappa + \lambda\gamma_2 - \mu\gamma_1} \quad , \quad v_0 = \frac{-\gamma_1}{\varkappa + \lambda\gamma_2 - \mu\gamma_1}.$$

Gli altri due punti saranno più in là ritrovati sulla linea $\Omega = 0$. Intanto per determinare la normale alla trajettoria d'un punto qualunque O, fisso nel piano mobile,

si chiami m il coefficiente angolare incognito, si osservi che il coefficiente angolare della tangente è $\delta v/\delta u$, e si scriva la condizione di ortogonalità:

$$E\delta u + F\delta v + (F\delta u + G\delta v)\, m = 0.$$

Mediante le (30) si trova facilmente

$$\left(E\frac{\delta u}{dt} + F\frac{\delta v}{dt}\right)\Omega = -(x + \lambda\gamma_2 - \mu\gamma_1)(v - v_0),$$
$$\left(F\frac{\delta u}{dt} + G\frac{\delta v}{dt}\right)\Omega = \quad (x + \lambda\gamma_2 - \mu\gamma_1)(u - u_0).$$

Dunque $v - v_0 = m(u - u_0)$, vale a dire che *ogni normale passa per* C. Questo è dunque il centro d'una rotazione *istantanea*, la cui velocità angolare x' si può facilmente calcolare: basta osservare che la velocità $\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ di M deve risultare uguale a $\frac{x'}{\sqrt{K}}\,\mathrm{sen}(\varrho\sqrt{K})$, dove la distanza $\varrho = MC$ è data dalla (31). D'altra parte il calcolo delle funzioni χ_i nel punto C ci dà, ricordando le (40) e la (28),

$$\frac{\chi_0}{x} = \frac{\chi_1}{K\gamma_1} = \frac{\chi_2}{K\gamma_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + K(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}}. \tag{41}$$

Dunque

$$\cos(\varrho\sqrt{K}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + K(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}}, \tag{42}$$

e finalmente

$$x' = \frac{\sqrt{K(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}}{\mathrm{sen}(\varrho\sqrt{K})} = \sqrt{x^2 + K(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}. \tag{43}$$

Si noti inoltre che dalle (41) risulta $\chi = x'$, sicchè x' *è il valore di* χ *in* C, *come* x *è il valore di* χ *in* M.

Ciò premesso, approfittiamo delle considerazioni precedenti per *calcolare la distanza fra due punti qualunque* (u_0, v_0) *ed* (u, v), evitando così l'integrazione della (29) nel caso generale. È chiaro che si può sempre disporre di x, γ_1, γ_2 in guisa che il punto (u_0, v_0) risulti il centro *istantaneo* C d'un certo moto rotatorio, nel quale la velocità del punto $O(u, v)$, a noi già nota per la (39), dovrà risultare espressa da $\frac{x'}{\sqrt{K}}\,\mathrm{sen}(r\sqrt{K})$, dove r è la distanza da calcolare. Ne segue

$$\frac{x'}{\sqrt{K}}\,\mathrm{sen}(r\sqrt{K}) = \sqrt{\frac{x^2 - \chi^2}{K} + \gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \sqrt{\frac{x'^2 - \chi^2}{K}},$$

d'onde

$$\cos(r\sqrt{K}) = \frac{\chi}{x'} = \frac{x\chi_0 + \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2}{\sqrt{x^2 + K(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}}, \tag{44}$$

e finalmente, sostituendo a $\varkappa, \gamma_1, \gamma_2$ le quantità proporzionali $\lambda u_0 + \mu v_0 - 1, v_0, - u_0$,

$$(45) \qquad \cos(r\sqrt{K}) = \frac{(\lambda u + \mu v - 1)(\lambda u_0 + \mu v_0 - 1) + K(uu_0 + vv_0)}{\sqrt{\Omega(u, v) . \Omega(u_0, v_0)}} .$$

Qui si noti che questa formola si riduce, per $K = 1$, alla formola fondamentale della trigonometria sferica. Applichiamola infatti ad un triangolo MM'M'', e siano r, r', r'' le lunghezze dei lati opposti ad M, M', M''. Il secondo membro della (45) non differisce da

$$\chi'_0 \chi''_0 + \frac{1}{K}(\chi'_1 \chi''_1 + \chi'_2 \chi''_2) .$$

Ora, se alle varie χ si sostituiscono le espressioni date dalla prima formola (32) e dalle (33), vale a dire

$$\chi'_0 = \cos(r''\sqrt{K}) \quad , \quad \chi'_1 = - \operatorname{sen}(r''\sqrt{K}) \operatorname{sen}\theta'' \quad , \quad \chi'_2 = \operatorname{sen}(r''\sqrt{K}) \cos\theta'' ,$$
$$\chi''_0 = \cos(r'\sqrt{K}) \quad , \quad \chi''_1 = - \operatorname{sen}(r'\sqrt{K}) \operatorname{sen}\theta' \quad , \quad \chi''_2 = \operatorname{sen}(r'\sqrt{K}) \cos\theta' ,$$

si ottiene

$$\cos(r\sqrt{K}) = \cos(r'\sqrt{K}) \cos(r''\sqrt{K}) + \operatorname{sen}(r'\sqrt{K}) \operatorname{sen}(r''\sqrt{K}) \cos(\theta' - \theta''),$$

ossia, per $K = 1$,

$$\cos M'M'' = \cos MM' . \cos MM'' + \operatorname{sen} MM' . \operatorname{sen} MM'' . \cos \widehat{M} .$$

Ritorniamo sulla formola (44) per notarne l'intimo significato, non diverso da quello della (42). Le due formole esprimono infatti che, se r è la distanza d'un punto qualunque O (in particolare M) al centro istantaneo C, il coseno di $r\sqrt{K}$ è uguale al rapporto fra i valori che la funzione χ assume in O ed in C. Ne segue che *ogni linea* $\chi =$ costante *è una circonferenza*, col centro in C. Quando la costante è nulla, l'equazione è lineare. Dunque *l'equazione* $\chi = 0$ *rappresenta una retta, che ha tutti i suoi punti alla distanza* $\pi/2\sqrt{K}$ *dal centro istantaneo di rotazione.* Mediante la formola (45) si riconosce poi che questa retta è anche rappresentata dall'equazione (equivalente a $\chi = 0$)

$$(46) \qquad (\lambda u + \mu v - 1)(\lambda u_0 + \mu v_0 - 1) + K(uu_0 + vv_0) = 0 .$$

Essa è dunque la *polare di* C *rispetto all'assoluto.* Viene così in luce il notevole fatto che ogni moto *rotatorio* intorno a C si può considerare anche come *traslatorio* secondo la polare di C, giacchè questa retta, nel detto movimento, scorre in sè, come fa l'asse delle u nel movimento speciale definito da γ_1. Ed anzi nel piano di Lobatschewsky, quando $\varkappa$ è troppo piccolo, e propriamente per $|\varkappa R| < \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$, il secondo modo di considerare il movimento è l'*unico* che abbia significato reale. Nella predetta ipotesi, infatti, la velocità angolare (43) risulta immaginaria, e del resto

un calcolo facile mostra che il segno di $\Omega(u_0, v_0)$ è appunto quello di $x'^2 < 0$, sicchè il centro di rotazione non è reale. Tornando ancora per poco alla (44) osserviamo che se si porta O in uno dei punti d'incontro (poli degli assi rispetto all'assoluto) della retta $\lambda u + \mu v = 1$ con gli assi delle u e delle v, si trova che le distanze ϱ_1 e ϱ_2 di tali punti al centro istantaneo son date dalle formole

$$x' \cos(\varrho_1 \sqrt{K}) = \gamma_2 \sqrt{K} \quad , \quad x' \cos(\varrho_2 \sqrt{K}) = -\gamma_1 \sqrt{K} \, ,$$

sicchè

$$\cos^2(\varrho \sqrt{K}) + \cos^2(\varrho_1 \sqrt{K}) + \cos^2(\varrho_2 \sqrt{K}) = 1 \, .$$

È questa, nell'interpetrazione sferica, una relazione quasi evidente fra le distanze d'un punto qualunque ai vertici d'un triangolo trirettangolo.

Per *calcolare la distanza p del punto* (u, v) *alla retta* $au + bv + c = 0$ basta immaginare una rotazione intorno al punto C, polo della retta data rispetto all'assoluto, ed uguagliare la velocità rotatoria nel punto considerato O, ossia $\frac{x'}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(r\sqrt{K})$, alla velocità traslatoria $\gamma' \cos(p\sqrt{K})$, designando con γ' il valore che avrebbe γ_1 se la retta considerata si prendesse come asse delle u. La relazione così ottenuta

$$\frac{x'}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(r\sqrt{K}) = \gamma' \cos(p\sqrt{K})$$

dovendo sussistere per qualunque posizione di O, basta prendere il punto sulla retta (vale a dire supporre $p = 0, r\sqrt{K} = {}^1/_2 \pi$) per trovare $x'/\sqrt{K} = \gamma'$, e per conseguenza

$$\operatorname{sen}(r\sqrt{K}) = \cos(p\sqrt{K}) \, , \quad \text{d'onde} \quad p = \frac{\pi}{2\sqrt{K}} - r \, .$$

Dunque la distanza di O alla retta data è complementare della distanza di O al polo della retta stessa. Questo teorema, evidente nell'interpetrazione che se ne può fare sulla sfera di raggio $1/\sqrt{K}$, permette subito di dedurre dalla (45) l'espressione di p in funzione di a, b, c, e delle coordinate u, v di O. Il primo membro di (45) si cambia in $\operatorname{sen}(p\sqrt{K})$, e nel secondo bisogna evidentemente a Ku_0, Kv_0, $\lambda u_0 + \mu v_0 - 1$ sostituire rispettivamente $a + \lambda c, b + \mu c, -c$, come si riconosce identificando l'equazione (46) con $au + bv + c = 0$. Si giunge così alla formola

$$\operatorname{sen}(p\sqrt{K}) = \frac{(au + bv + c)\sqrt{K}}{\sqrt{\Theta(a, b, c)\, \Omega(u, v)}} \, , \tag{47}$$

dopo aver posto, per brevità,

$$\Theta(a, b, c) = (a + \lambda c)^2 + (b + \mu c)^2 + Kc^2 .$$

Qui torna utile osservare che la condizione $\Theta = 0$, per il modo come si è ottenuto il primo membro, non differisce da $\Omega(u_0, v_0) = 0$; e poichè questa esprime che il

polo della retta rispetto all'assoluto cade su questa linea, è chiaro che l'eguaglianza $\Theta = 0$ è la *condizione del contatto con l'assoluto.* Segue inoltre dalla (47) che *la condizione* $\Theta > 0$ *è necessaria e sufficiente perchè la retta* $au + bv + c = 0$ *sia reale.* Infatti la distanza p della retta da un punto *reale* (u, v) è reale o immaginaria secondo che la retta è reale o ideale; ed altrettanto si può dire, qualunque sia il segno di K, del rapporto di $\operatorname{sen}(p\sqrt{K})$ a $\sqrt{K}$, e per conseguenza di $\sqrt{\Theta}$, in virtù di (47). Il valore di $\Theta(a, b, c)$ è dunque positivo o negativo secondo che la retta $au + bv + c = 0$ è reale o ideale.

L'angolo ϑ delle rette $au + bv + c = 0$, $a'u + b'v + c' = 0$, si può calcolare mediante la formola (34). Si trova facilmente che le espressioni

$$\mathcal{E}a^2 + 2\mathcal{F}ab + \mathcal{G}b^2 \quad , \quad \mathcal{E}a'^2 + 2\mathcal{F}a'b' + \mathcal{G}b'^2$$

sono eguali ai corrispondenti valori Θ e Θ' della funzione $\Theta(a, b, c)$ in qualunque punto dell'una o dell'altra retta. Calcolando poi $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ nel punto d'incontro delle due rette, si ottiene il valore dell'espressione $\mathcal{E}aa' + \mathcal{F}(ab' + ba') + \mathcal{G}bb'$, e si giunge alla formola

$$(48) \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\Theta\Theta'}}\left[(a + \lambda c)(a' + \lambda c') + (b + \mu c)(b' + \mu c') + Kcc'\right].$$

Servendosi invece della (36) si ottiene

$$\operatorname{sen}\vartheta = \frac{(ab' - ba')\sqrt{\Omega}}{\sqrt{\Theta\Theta'}},$$

dove Ω s'intende calcolato nel punto comune alle due rette. Affinchè queste siano *parallele*, ossia perchè si abbia $\vartheta = 0$, occorre dunque e basta che Ω si annulli nel detto punto, vale a dire che le rette *s'incontrino all'infinito.* Siccome la linea $\Omega = 0$, immaginaria per $K > 0$, si riduce a due rette coincidenti per $K = 0$, ed è reale e del secondo grado per $K < 0$, si vede subito che da un punto *non* si può condurre parallela alcuna nel primo caso, se ne può condurre soltanto *una* nel secondo, e *due* nel terzo.

Domandiamoci ancora se vi son *rette* dotate d'immobilità istantanea in un dato movimento generale $(\varkappa, \gamma_1, \gamma_2)$. Prima conviene porre le (9) sotto la forma

$$c^2 \frac{d}{dt}\frac{a}{c} = \quad \varkappa c(b + \mu c) + Kc^2\gamma_1 + (a + \lambda c)\left[(a + \lambda c)\gamma_1 + (b + \mu c)\gamma_2\right],$$
$$c^2 \frac{d}{dt}\frac{b}{c} = -\varkappa c(a + \lambda c) + Kc^2\gamma_2 + (b + \mu c)\left[(a + \lambda c)\gamma_1 + (b + \mu c)\gamma_2\right].$$

Sarebbe facile riconoscere che queste non differiscono dalle condizioni per l'immobilità del polo della retta rispetto all'assoluto, e si potrebbe in tal modo ricondurre la ricerca delle *rette* a quella dei *punti.* Se la retta si considera per un istante come fissa nel piano mobile, i rapporti a/c, b/c sono da supporre costanti, e però le

condizioni precedenti, se inoltre vi si sostituiscono $\lambda u_0 + \mu v_0 - 1, v_0, -u_0$ a x, y_1, y_2, diventano

$$(49)\quad \begin{cases} c(b+\mu c)(\lambda u_0 + \mu v_0 - 1) + Kc^2 v_0 + \\ \qquad + (a+\lambda c)[(a+\lambda c)v_0 - (b+\mu c)u_0] = 0, \\ -c(a+\lambda c)(\lambda u_0 + \mu v_0 - 1) - Kc^2 u_0 + \\ \qquad + (b+\mu c)[(a+\lambda c)v_0 - (b+\mu c)u_0] = 0, \end{cases}$$

dove u_0, v_0 sono le coordinate del centro istantaneo C. Ne segue, moltiplicando la prima condizione per u_0, la seconda per v_0, e sommando,

$$(au_0 + bv_0 + c)[(a+\lambda c)v_0 - (b+\mu c)u_0] = 0.$$

Se prima si esclude che la retta passa per C, si deve avere $(a+\lambda c)v_0 = (b+\mu c)u_0$. e dalle (49) si trae

$$(50)\qquad \frac{a+\lambda c}{u_0} = \frac{b+\mu c}{v_0} = \frac{-Kc}{\lambda u_0 + \mu v_0 - 1},$$

sicchè l'equazione $au + bv + c = 0$ si trasforma nella (46). Una prima retta, che risponde alla questione, è dunque, come si poteva prevedere, la polare di C rispetto all'assoluto. Esclusa questa retta, bisogna che sia $au_0 + bv_0 + c = 0$. Inoltre, se si moltiplica la prima condizione (49) per $a+\lambda c$, e la seconda per $b+\mu c$, si ottiene, sommando, $\Theta = 0$. Altre due rette soddisfacenti sono dunque le tangenti condotte per C all'assoluto. È poi evidente che i punti di contatto sono i due punti lasciati in disparte, precedentemente, nella ricerca dei punti dotati, come C, d'immobilità istantanea.

Le formole (50) servono a determinare il polo (rispetto all'assoluto) d'una retta qualunque, e per conseguenza a risolvere il problema: *condurre da un punto la perpendicolare ad una retta.* Basta infatti congiungere il punto al polo della retta, poichè *nel polo concorrono tutte le perpendicolari.* Così riesce del tutto evidente la relazione di complemento che si ha fra le distanze d'un punto ad una retta qualunque ed al polo di questa. Senonchè il polo d'una retta *reale* non sempre è reale, e da ciò viene un importante carattere distintivo per le tre geometrie. Applicando infatti la (47) al calcolo della distanza (già nota) $p = \pi/2\sqrt{K}$ fra la retta ed il suo polo, si vede che

$$\Theta(a, b, c)\,\Omega(u_0, v_0) = K(au_0 + bv_0 + c)^2.$$

Dunque $\Omega(u_0, v_0)$ *ha il segno di* K. Ne segue che il polo d'una retta reale è reale per $K > 0$, reale ma infinitamente lontano per $K = 0$, ideale per $K < 0$; e però le perpendicolari ad una retta sono *convergenti* nel piano di Riemann, *parallele* nel piano di Euclide, *divergenti* nel piano di Lobatschewsky. Alle (50) si giunge anche direttamente cercando l'equazione generale delle perpendicolari ad una retta data. Dalla (48) si deduce la condizione

$$(a+\lambda c)(a'+\lambda c') + (b+\mu c)(b'+\mu c') + Kcc' = 0,$$

necessaria e sufficiente per la *perpendicolarità* delle due rette. Basta poi dare all'equazione $a'u+b'v+c'=0$ la forma

$$(a'+\lambda c')\,u+(b'+\mu c')\,v-c'(\lambda u+\mu v-1)=0$$

per essere condotti a scrivere le (50), le quali definiscono perciò un punto (u_0, v_0) soddisfacente all'equazione stessa, cioè situato su *tutte* le perpendicolari alla retta $au+bv+c=0$.

Ora si lasci il punto M libero di percorrere una linea qualunque, si prenda come variabile t l'arco percorso s, e si diriga l'asse delle u tangenzialmente alla linea. È chiaro che dev'essere $\delta u=ds$, $\delta v=0$, e per conseguenza $\gamma_1=-1$, $\gamma_2=0$. Le condizioni per l'immobilità del punto (u, v) prendono allora la forma

$$(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds}=-(\lambda u+\varkappa v-1)(\lambda u+\mu v-1)+\varkappa\mu(u^2+v^2)-\mathrm{K}u^2, \\[2ex] \dfrac{dv}{ds}=\quad(\varkappa u-\lambda v)(\lambda u+\mu v-1)-\varkappa\lambda(u^2+v^2)-\mathrm{K}uv. \end{cases}$$

È da notare la simmetria, rispetto a $\varkappa$ ed a μ, della prima espressione. Anche la seconda, aumentata di $\varkappa u$ o diminuita di μu, resta inalterata per lo scambio di $\varkappa$ con μ. In coordinate polari le predette condizioni assumono la forma semplicissima

$$(52)\qquad \frac{dr}{ds}=-\cos\theta\ ,\quad \frac{d\theta}{ds}=-\varkappa+\frac{\sqrt{\mathrm{K}}\,.\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{tg}(r\sqrt{\mathrm{K}})}.$$

Queste relazioni si possono facilmente stabilire sostituendo nelle (25), ossia in

$$(53)\qquad \frac{d\chi_0}{ds}=\chi_2\ ,\quad \frac{d\chi_1}{ds}=\varkappa\chi_2\ ,\quad \frac{d\chi_2}{ds}=-\mathrm{K}\chi_0-\varkappa\chi_1\ ,$$

a χ_0, χ_1, χ_2 rispettivamente $\cos(r\sqrt{\mathrm{K}})$ e le espressioni (33). Del resto le (53) sono anch'esse le condizioni d'immobilità in un altro sistema di coordinate, al quale si è condotti nel modo più naturale quando nella formola (29) si pongono per $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ le espressioni (19). Così, ricordando la (22), il secondo membro della (29), moltiplicato per Ω, diventa

$$\mathrm{K}(\psi_0du-\varphi_0dv)^2+(\psi_1du-\varphi_1dv)^2+(\psi_2du-\varphi_2dv)^2=\frac{\Omega^3}{\mathrm{K}^2}(\mathrm{K}d\chi_0^2+d\chi_1^2+d\chi_2^2);$$

e da questa espressione ci vien suggerito il ben noto sistema di coordinate x, x_1, x_2, vincolate dalla relazione $x^2\pm x_1^2\pm x_2^2=1$ (dove $\pm$ è il segno di $\mathrm{K}=\pm 1/\mathrm{R}^2$), e tali che

$$ds^2=\mathrm{R}^2(\pm\,dx^2+dx_1^2+dx_2^2):$$

basta porre $\chi_0=x$, $\chi_1=x_1/\mathrm{R}$, $\chi_2=x_2/\mathrm{R}$. Le condizioni (53) diventano

$$\frac{dx}{ds}=\frac{x_2}{\mathrm{R}}\ ,\quad \frac{dx_1}{ds}=\varkappa x_2\ ,\quad \frac{dx_2}{ds}=\mp\frac{x}{\mathrm{R}}-\varkappa x_1.$$

Rientrando nel sistema di coordinate (u, v) proponiamoci di determinare il centro istantaneo C nel movimento definito dalla trajettoria dell'origine M. Siccome C deve trovarsi sulla normale, cominciamo dal notare che per qualunque punto della normale si ha, in virtù delle (51) e ricordando le (2),

$$\frac{\delta u}{ds} = 1 - (x + \mu) v \quad , \quad \frac{\delta v}{ds} = \frac{dv}{ds} - \lambda v [1 - (x + \mu) v]. \tag{54}$$

Quel punto del piano *mobile*, che per un dato valore di s coincide col punto C, si ottiene esprimendo che $\delta u = 0$ e $\delta v = 0$ per v costante: le sue coordinate sono dunque $u = 0$, $v = 1/(x + \mu)$, dove x s'intende calcolato per quel valore di s che si vuol considerare. Lasciando invece x libero di variare con s, le predette coordinate sono appunto quelle di C (centro di curvatura) nel piano *immobile*, e le (54) diventano $\delta u = 0$, $\delta v = dv$. Il punto C si sposta dunque tangenzialmente alla normale, e l'arco s_0 della linea (C) si può calcolare mediante la (29), che dà

$$ds_0 = \frac{dv}{\Omega} = - \frac{dx}{x^2 + \mathrm{K}} = d\varrho \,,$$

dove la lunghezza $\varrho = \mathrm{MC}$ (raggio di curvatura) è, in virtù della (42), legata a x dalla relazione

$$x = \sqrt{\mathrm{K}} \,.\, \cot(\varrho \sqrt{\mathrm{K}}) \,.$$

Dunque $s_0 = \varrho$, e però alla linea (C) conviene il nome di *sviluppata* di (M). Che x sia il numero adatto a misurare la *curvatura* della linea (M) si deduce dal fatto che, in virtù della seconda condizione (52), per $\theta = 0$ si ha $\delta\theta = x ds$, sicchè, chiamando ε l'angolo di contingenza, è $x = \varepsilon / ds$. Del resto ciò risulta immediatamente anche dall'osservare che x è la velocità angolare della rotazione intorno ad M. Invece nella rotazione intorno a C la velocità angolare è x', legata a x dalla (43). L'angolo di contingenza ε_0 della sviluppata è dunque $x' ds$, e però la curvatura di questa linea è

$$x_0 = \frac{\varepsilon_0}{ds_0} = x' \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{x^2 + \mathrm{K}} \, \frac{ds}{d\varrho} \,,$$

d'onde

$$\mathrm{tg}(\varrho_0 \sqrt{\mathrm{K}}) = \mathrm{sen}(\varrho \sqrt{\mathrm{K}}) \frac{d\varrho}{ds} \,.$$

Resta così intrinsecamente determinata la sviluppata di (M). Che la circonferenza di centro C sia, fra tutte quelle che passano per M, la circonferenza alla quale spetta il nome di *osculatrice*, si può vedere derivando l'equazione $\chi = x$ della circonferenza stessa, ed osservando che, in virtù della (26), si deve avere $(\chi_0 - 1) dx = 0$ nei punti di contatto con l'inviluppo. Questa condizione è soddisfatta in qualsiasi punto quando x è costante, perchè allora (M) è appunto una circonferenza; altrimenti dev'essere $\chi_0 = 1$, ossia $r = 0$, vale a dire che i due rami dell'inviluppo coincidono *entrambi* con (M). Per trovare poi tutte le linee che ammettono (C) come svilup-

pata bisogna riprendere le (54), ed esprimere l'ortogonalità della tangente alla linea cercata con la normale ad (M): bisogna dunque esprimere che l'equazione della tangente al luogo del punto $(0, v)$ è soddisfatta dalle coordinate $u = 1/\lambda$, $v = 0$, del polo della normale, e per conseguenza che nel predetto punto si ha $\delta v + \lambda v \delta u = 0$, cioè, per le (54), $dv = 0$, e finalmente $v =$ *costante*. Le linee cercate sono dunque, come nel piano euclideo, le linee *equidistanti* da (M). Fra tutte è particolarmente notevole quella che corrisponde al valore $1/\mu$ di v: *luogo del polo* M_* della tangente $(u = 0, v = 1/\mu)$, essa è anche l'*inviluppo della polare* di M $(\lambda u + \mu v = 1)$, sicchè vi è reciprocità nella corrispondenza fra le linee (M) ed (M_*), che si possono dire *polari* l'una dell'altra. Per trovare l'arco s_* di (M_*) basta applicare la formola (39), dopo avere osservato che in M_* si ha $\chi_0 = 0$, e per conseguenza $\chi = -\chi_1 = \sqrt{K}$. Ne risulta $ds_*/ds = x/\sqrt{K}$; e poichè, per la reciprocità fra le due linee, si deve avere anche $ds/ds_* = x_*/\sqrt{K}$, si vede che $xx_* = K$: questa è, del resto, una relazione evidente, giacchè vale $\varrho + \varrho_* = \pi/2\sqrt{K}$, ossia $MC + CM_* = MM_*$. Adunque, data la linea (M), se ne determina intrinsecamente la polare mediante le equazioni

$$s_* = \frac{1}{\sqrt{K}} \int x ds \quad , \quad x_* = K/x .$$

Passiamo a fare alcune importanti osservazioni intorno al sistema stesso delle linee coordinate. Invece di servirsi delle (50) giova talvolta partire, per la determinazione della polare $au + bv + c = 0$ d'un dato punto (u, v), dalla (45), in virtù della quale, dovendo il punto distare per $\pi/2\sqrt{K}$ da ciascun punto (u, v) della retta, si ha

$$\chi_0 \chi_0' + \frac{1}{K}(\chi_1 \chi_1' + \chi_2 \chi_2') = 0, \tag{55}$$

d'onde facilmente si trae

$$\frac{a}{\lambda \chi_0 - \chi_2} = \frac{b}{\mu \chi_0 + \chi_1} = \frac{c}{-\chi_0} . \tag{56}$$

Ne segue, qualunque sia c,

$$a(\mu \chi_0 + \chi_1) - b(\lambda \chi_0 - \chi_2) = 0; \tag{57}$$

e poichè questa è un'equazione *lineare*, si vede che l'equazione $au + bv =$ *costante* rappresenta un fascio di rette, col centro nel polo della retta (57). Se per calcolare le coordinate di questo punto si applicano le (56) alla (57) si trova che u e v diventano infiniti, in modo tuttavia da soddisfare all'equazione $au + bv = 0$. In particolare *le linee coordinate* u *convergono in un punto* P, nel quale la coordinata u diventa infinita, e v indeterminata. Similmente *le linee coordinate* v *convergono in un punto* Q, nel quale v diventa infinita, ed u indeterminata. I punti P e Q sono i poli delle rette

$$\lambda \chi_0 - \chi_2 = 0 \quad , \quad \mu \chi_0 + \chi_1 = 0, \tag{58}$$

e però sulla retta PQ cadono, al variare di a/b, i poli di tutte le rette (57). Ne segue che due rette $au+bv+c'=0$ ed $au+bv+c''=0$ concorrono sempre in un punto della retta PQ, la quale perciò si comporta, per questo riguardo, come la retta all'infinito nel piano di Euclide. Noi d'ora innanzi la designeremo semplicemente col nome di *asse* del sistema. Essa è del resto una retta del tutto arbitraria, poichè la sua posizione nel piano dipende dai valori che ci piace attribuire a λ e μ. Per conoscere tale posizione si osservi che in P ed in Q i valori di χ_0 sono rispettivamente $-\lambda/\sqrt{\lambda^2+K}$ e $-\mu/\sqrt{\mu^2+K}$. Ne risulta che, se p e q sono le distanze di P e Q ad M, si ha

$$\lambda=\sqrt{K}\cot(p\sqrt{K}) \quad , \quad \mu=\sqrt{K}\cot(q\sqrt{K}). \tag{59}$$

L'asse è in pari tempo una linea u ed una linea v, sicchè non è possibile scriverne l'equazione in questo sistema di coordinate (non omogenee); ma sono facilmente calcolabili le coordinate del suo polo, centro del fascio (57). In questo punto, infatti, debbono coesistere le (58), dalle quali si trae

$$u=\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2+K} \quad , \quad v=\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2+K}; \tag{60}$$

e poichè, per questi valori delle coordinate, le varie χ risultano proporzionali ad $1, -\mu, \lambda$, la (55) diventa

$$K\chi_0-\mu\chi_1+\lambda\chi_2=0:$$

è questa, nel sistema di coordinate χ, l'equazione dell'asse. La distanza r di questa retta ad M è data dalla formola $\operatorname{sen}(r\sqrt{K})=\chi_0$, dove χ_0, calcolata nel punto (60), risulta uguale a $\sqrt{K}/\sqrt{\lambda^2+\mu^2+K}$. Dunque

$$\sqrt{\lambda^2+\mu^2}=\sqrt{K}\cot(r\sqrt{K}); \tag{61}$$

e dal paragone di questa con le (59) segue la nota relazione

$$\cot^2(p\sqrt{K})+\cot^2(q\sqrt{K})=\cot^2(r\sqrt{K})$$

fra i cateti e l'altezza (sull'ipotenusa) d'un triangolo rettangolo.

Le costanti λ e μ, lasciate fin qui arbitrarie, si possono anche fissare volta per volta, in diversi modi, secondo lo scopo che si ha in vista. Il supporle entrambe nulle equivale, per le (59) e per la (61), a supporre le distanze p, q, r tutte uguali a $\pi/2\sqrt{K}$, cioè a prendere come asse la polare di M. In questo caso le linee coordinate u, giacchè convergono nel polo P dell'asse delle v, sono perpendicolari a tale asse; e per analoga ragione son le linee v perpendicolari all'asse delle u: è questo il sistema di Beltrami. Il supporre invece $\lambda^2+\mu^2=-K$, come sembra conveniente fare nel piano di Lobatschewsky, equivale, in virtù di (61), a supporre $r=\infty$, ossia l'asse infinitamente lontano: ciò può accadere soltanto supponendo che PQ tocchi l'assoluto, come si può constatare anche osservando che per tale retta la funzione Θ si riduce a $(\lambda^2+\mu^2+K)c^2=0$. In particolare, nel piano di Lobatschewsky,

si può prendere $\lambda = 0$, $\mu = 1/R$; ed allora le linee u sono, come nel sistema di Beltrami, perpendicolari all'asse delle v, ma *le linee v son parallele*, come nel sistema cartesiano ($K = 0$). Di tale circostanza possiamo approfittare per ritrovare la formola data da Lobatschewsky per l'*angolo di parallelismo* ω. Si prenda, sull'asse delle u, un punto O, la cui distanza ad M sia r. Siccome, nella predetta ipotesi, si ha

$$\mathcal{E} = 1 \quad , \quad \mathcal{F} = -\frac{u}{R} \quad , \quad \mathcal{G} = 1 - \frac{2v}{R} ,$$

l'angolo ϑ delle linee coordinate, in un punto qualunque, è dato dalla formola $\cos\vartheta = -u/\sqrt{R^2 - 2Rv}$; e questa, applicata al punto O, che ha le coordinate

$$u = iR\mathrm{tg}\frac{ir}{R} = -R\mathrm{th}\frac{r}{R} \quad , \quad v = 0 ,$$

dà appunto il valore ω di ϑ, sicchè $\cos\omega = \mathrm{th}\frac{r}{R}$, d'onde $\cot\frac{\omega}{2} = e^{\frac{r}{R}}$. Ben s'intende che, oltre la linea v che passa per O, un'*altra* parallela all'asse delle v si ottiene congiungendo O al punto $(0, {}^1/_2 R)$.

I sistemi di coordinate u, v, corrispondenti alle infinite posizioni, che nel reticolo delle linee coordinate l'asse del sistema può occupare rispetto agli assi coordinati, si debbono poter dedurre tutti da un solo di essi mediante trasformazioni lineari. Per trovar queste basta osservare che, in virtù delle (32), i rapporti di χ_1 e χ_2 a χ_0 debbono rimanere inalterati quando si passa da una ad altra coppia di valori di λ e μ; e poichè nel sistema di Beltrami ($\lambda = \mu = 0$) i predetti rapporti si riducono a $-Kv$ e Ku, ne risulta, distinguendo con x ed y le coordinate nel detto sistema,

$$(62) \qquad Kx = \chi_2/\chi_0 \quad , \quad Ky = -\chi_1/\chi_0 ,$$

d'onde

$$(63) \qquad \frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{1}{\lambda x + \mu y + 1} .$$

Queste relazioni potrebbero essere utilizzate per dedurre dalle varie formole (condizioni d'immobilità, ecc.) stabilite nel sistema di Beltrami, le formole analoghe nel sistema generale; ma noi ce ne serviremo soltanto per trovar subito il complemento da apportare alle formole stesse quando λ e μ si lasciano variare con t, quando cioè il reticolo mobile si suppone anche *deformabile* secondo una data legge. Così, per avere le condizioni d'immobilità del punto (u, v), non basta porre du e dv uguali a φdt e ψdt; bisogna ancora aggiungere le parti provenienti dal variare di λ e μ, ossia, in virtù delle (63),

$$-\frac{x(xd\lambda + yd\mu)}{(\lambda x + \mu y + 1)^2} \quad , \quad -\frac{y(xd\lambda + yd\mu)}{(\lambda x + \mu y + 1)^2} ;$$

sicchè le predette condizioni riescono modificate come segue:

$$(64)\qquad \frac{du}{dt}=\varphi(u,v)-u\left(u\frac{d\lambda}{dt}+v\frac{d\mu}{dt}\right)\quad,\quad \frac{dv}{dt}=\psi(u,v)-v\left(u\frac{d\lambda}{dt}+v\frac{d\mu}{dt}\right).$$

Suppongasi, per esempio, che λ e μ debbano variare in modo da lasciare *immobile* l'asse. Sostituendo nelle (62) le coordinate (60) del polo si trova $x=\lambda/K$, $y=\mu/K$; quindi, applicando a queste le condizioni d'immobilità, si ottiene

$$\frac{d\lambda}{dt}=\varkappa\mu+K\gamma_1+\lambda(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2)\quad,\quad \frac{d\mu}{dt}=-\varkappa\lambda+K\gamma_2+\mu(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2).$$

Dopo ciò le (64) si riducono alla forma semplicissima

$$\frac{du}{dt}=\quad \varkappa v-\gamma_1(\lambda u+\mu v-1)-(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2)u,$$

$$\frac{dv}{dt}=-\varkappa u-\gamma_2(\lambda u+\mu v-1)-(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2)v.$$

In particolare, quando si scelgono i soliti assi tangente e normale ad una curva, le *condizioni per l'immobilità del punto* (u,v) sono

$$(65)\qquad \frac{du}{ds}=(\varkappa+\mu)v+2\lambda u-1\quad,\quad \frac{dv}{ds}=-\varkappa u+\lambda v,$$

dove

$$(66)\qquad \frac{d\lambda}{ds}=\varkappa\mu-(\lambda^2+K)\quad,\quad \frac{d\mu}{ds}=-(\varkappa+\mu)\lambda.$$

Si domandi, per esempio, di determinare intrinsecamente la *curva dalle tangenti uguali*, ossia una curva tale che il segmento di tangente, fra la curva ed una retta fissa (che si può sempre prendere come asse), abbia una lunghezza costante. La prima delle (59) mostra che λ deve rimanere costante; quindi dalle (66) si ha $\varkappa\mu=\lambda^2+K$, $d\mu/ds=-(\varkappa+\mu)\lambda$, d'onde, eliminando μ ed integrando, risulta l'equazione intrinseca cercata:

$$\varkappa=\sqrt{\frac{\lambda^2+K}{e^{2\lambda s}-1}}.$$

Similmente si chieda di determinare le linee definite dalla proprietà (che nel piano di Euclide caratterizza la *cicloide*) di avere i *raggi di curvatura tagliati per metà da una retta fissa*. Prendendo questa come asse bisogna esprimere che $q=-{}^1/_2\,\varrho$, ossia, per la seconda formola (59),

$$\mu=-\sqrt{K}\cot({}^1/_2\,\varrho\sqrt{K})\quad,\quad\text{d'onde } 2\varkappa\mu+\mu^2=K.$$

Ora sostituendo nella prima formola (66) il valore

$$\lambda=(\mu^2+K)\frac{d}{ds}\frac{1}{\mu^2+K},$$

dedotto dalla seconda, si ottiene successivamente

$$\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\mu^2+K}=-\frac{1}{2}\ ,\quad \mu^2+K=\frac{4}{a^2-s^2}\ ,\quad \frac{1}{x}=\frac{\sqrt{(a^2-s^2)[4-K(a^2-s^2)]}}{2-K(a^2-s^2)}.$$

All'ultima equazione si può dar la forma

$$\operatorname{sen}(1/2\,\varrho\sqrt{K})=1/2\sqrt{K(a^2-s^2)}.$$

È questa l'equazione intrinseca delle linee cercate. In particolare per K tendente a zero si ritrova l'equazione $\varrho=\sqrt{a^2-s^2}$ della cicloide.

Ancora si chieda di determinare le linee definite dalla proprietà (che nel piano di Euclide caratterizza la *catenaria*) di avere, in ciascun punto M, il *centro di curvatura simmetrico, rispetto ad* M, *del punto d'incontro della normale con una retta fissa.* Se questa si prende come asse, bisogna dunque che C sia il simmetrico di Q rispetto ad M, ossia che la lunghezza q, definita dalla seconda formola (59), sia uguale a ϱ, e per conseguenza che si abbia $\mu=x$. Ciò premesso, se il valore

$$\lambda=-\frac{1}{2x}\frac{dx}{ds}=\sqrt{x}\frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

dedotto dalla seconda formola (66), si sostituisce nella prima, si ottiene

$$\sqrt{x}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\sqrt{x}}=x^2-K,$$

d'onde, per $K=1/R^2$, risulta l'equazione

$$2a\operatorname{tg}\frac{\varrho}{R}=R-\sqrt{R^2-4a^2}\cos\frac{2s}{R}, \tag{67}$$

che si riduce alla nota equazione $\varrho=a+\frac{s^2}{a}$ della catenaria per R infinito. Invece per $a=1/2\,R$ l'equazione diventa $\varrho=1/4\,\pi R$. Fra le linee cercate si trova dunque una *circonferenza*, e ciò si spiega osservando che nel piano di Riemann ogni retta si può considerare come una circonferenza di raggio $1/2\,\pi R$, i cui raggi sono perciò divisi per metà da una circonferenza propriamente detta, di raggio $1/4\,\pi R$. Se poi in (67) si sostituisce iR ad R, si trovano le analoghe linee nel piano di Lobatschewsky, fra le quali è notevole quella che si ha per $a=\infty$; ma essa non risponde al problema *reale*, perchè $\lambda^2+\mu^2+K$ si riduce a zero, sicchè PQ diventa tangente all'assoluto. Del resto l'equazione della curva è $\operatorname{th}\frac{\varrho}{R}=\operatorname{ch}\frac{2s}{R}$, d'onde si trae un valore reale (∞) di ϱ soltanto per $s=0$. La linea è dunque dappertutto (tranne che nel vertice) meno curva d'un oriciclo; e dal fatto che i suoi centri di curvatura sono ideali segue nuovamente che tali sono anche i punti Q. Le formole (59, 60, 61), che in generale servono per discutere la curva, diventano illusorie nel caso attuale; ma è facile calcolare l'inclinazione θ, sulla normale, della perpendicolare all'asse,

condotta per M. Si ha infatti $\operatorname{tg}\theta = \lambda/\mu = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varkappa} = \operatorname{sh}\frac{2s}{R}$, d'onde segue che, quando s cresce indefinitamente, in un senso o nell'altro, la tangente tende a disporsi parallelamente alla normale nel vertice ($s = 0$), come avviene per la catenaria.

Per altri problemi giova applicare le (64) in forma più generale, lasciando arbitraria l'inclinazione θ, sull'asse delle u, della tangente alla linea descritta dall'origine delle coordinate. Senonchè, quando θ varia con s, si dovrà dal coefficiente $\varkappa$ sottrarre $d\theta/ds$, se si vuole che $\varkappa$ non cessi di rappresentare la curvatura della predetta linea. Inoltre $\gamma_1 = \cos\theta$, $\gamma_2 = \operatorname{sen}\theta$, e però le (64) diventano

$$(68)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} = \left(\varkappa - \dfrac{d\theta}{ds}\right)\varphi_0 + \varphi_1\cos\theta + \varphi_2\operatorname{sen}\theta - u\left(u\dfrac{d\lambda}{ds} + v\dfrac{d\mu}{ds}\right), \\ \dfrac{dv}{ds} = \left(\varkappa - \dfrac{d\theta}{ds}\right)\psi_0 + \psi_1\cos\theta + \psi_2\operatorname{sen}\theta - v\left(u\dfrac{d\lambda}{ds} + v\dfrac{d\mu}{ds}\right). \end{cases}$$

In particolare, per esprimere l'immobilità dell'asse, possiamo applicare queste formole stesse alle coordinate (60) del polo; e qui torna utile osservare che questo punto ha la proprietà, almeno nel piano di Riemann, di render *minima* la funzione Ω, ossia di annullare $\partial\Omega/\partial u$ e $\partial\Omega/\partial v$, sicchè dalle (21) segue

$$\varphi_1 = \psi_2 = \Omega = \frac{K}{\lambda^2 + \mu^2 + K}, \quad \varphi_2 = \psi_1 = 0,$$

ed inoltre $\varphi_0 = v$, $\psi_0 = -u$; poi dalle (68) si deduce

$$(69)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{ds} = (\lambda^2 + \mu^2 + K)\cos\theta + \mu\left(\varkappa - \dfrac{d\theta}{ds} + \lambda\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta\right), \\ \dfrac{d\mu}{ds} = (\lambda^2 + \mu^2 + K)\operatorname{sen}\theta - \lambda\left(\varkappa - \dfrac{d\theta}{ds} + \lambda\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta\right); \end{cases}$$

e finalmente le (68) diventano

$$\begin{cases} \dfrac{du}{ds} = \left(\varkappa - \dfrac{d\theta}{ds}\right)v - (\lambda u + \mu v - 1)\cos\theta - (\lambda\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta)\,u, \\ \dfrac{dv}{ds} = -\left(\varkappa - \dfrac{d\theta}{ds}\right)u - (\lambda u + \mu v - 1)\operatorname{sen}\theta - (\lambda\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta)\,v. \end{cases}$$

Oltre il vantaggio della simmetria, queste due coppie di formole hanno sulle (66) e (65), alle quali si riducono per $\theta = \pi$, il gran vantaggio di racchiudere θ come *funzione* arbitraria di s. Se, per esempio, si prende $\theta = \int \varkappa ds$, e se l'asse viene scelto (nel piano di Lobatschewsky) fra le tangenti all'assoluto, le (69) si riducono all'unica semplicissima

$$\frac{d\omega}{ds} = \varkappa + \frac{\operatorname{sen}\omega}{R},$$

dopo aver posto $\lambda R = \cos(\theta - \omega)$, $\mu R = \operatorname{sen}(\theta - \omega)$.

Lasciando poi che l'asse si sposti con M, è facile trovare i punti nei quali gli assi delle u e delle v toccano i loro inviluppi. Basta derivare separatamente le equazioni $v=0$, $u=0$, tenendo conto delle condizioni (68), per trovare le coordinate dei punti di contatto:

$$u = \frac{\operatorname{sen}\theta}{x - \frac{d\theta}{ds} + \lambda \operatorname{sen}\theta}\ ,\ v=0\ ;\quad u=0\ ,\ v = \frac{-\cos\theta}{x - \frac{d\theta}{ds} - \mu\cos\theta}\ .$$

In entrambi i punti si annulla $\lambda u + \mu v - 1$ se si prende $\theta = \int x ds$; e però questa ipotesi esprime che gli assi coordinati toccano i loro inviluppi sulla polare dell'origine. In particolare, se si adotta il sistema di Beltrami, le condizioni (68) diventano

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta + Kx(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)\ ,\quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta + Ky(\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta);$$

e si ritrovano così, per $K=0$, le formole notissime

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta\ ,\quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta\ ,\quad \theta = \int\frac{ds}{\varrho}\ ,$$

dell'ordinaria geometria euclidea.

Tornando all'ipotesi dell'asse immobile, con $\theta = 0$, mostriamo, per finire, come le formole (66) si possano far servire alla *ricerca dell'equazione, in coordinate estrinseche, d'una curva data mediante la sua equazione intrinseca*. Siano x ed y le coordinate (di Beltrami) d'un punto qualunque della curva rispetto a due assi immobili, ed uno di questi (l'asse delle x) si prenda come asse del sistema: la sua distanza ad M, data dalla (61), si può calcolare anche mediante la seconda formola (32): e dal confronto dei risultati segue

$$(\lambda^2 + \mu^2)\, y^2 = 1 + Kx^2. \tag{70}$$

Da questa relazione, differenziata, si tragga il dy per sostituirlo in

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + K(y\,dx - x\,dy)^2}}{1 + K(x^2 + y^2)}\ . \tag{71}$$

Si ottiene

$$\frac{dx}{ds} = \mu y\sqrt{1 + K(x^2 + y^2)}\ ,$$

d'onde, se prima si elimina y mediante la (70), è facile dedurre

$$x = \frac{\operatorname{tg}(\sigma\sqrt{K})}{\sqrt{K}}\ ,\quad y = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\,.\cos(\sigma\sqrt{K})}\ , \tag{72}$$

ponendo

$$\sigma = \int\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + K}}{\lambda^2 + \mu^2}\,\mu\, ds\,.$$

Se le funzioni λ e μ, fornite dall'integrazione delle (66), si sostituiscono nell'ultima formola, questa fa conoscere σ in funzione di s; e si ha poi nelle (72) la rappresentazione estrinseca della curva che si considera. Inversamente, data l'equazione $y = f(x)$ d'una curva, riferita ad assi immobili, è facile servirsi delle formole precedenti per *calcolare l'arco e la curvatura* in funzione di x, y e delle derivate y', y'' di y rispetto ad x. Già la (71) dà subito la derivata dell'arco:

$$s' = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + K(y - xy')^2}}{1 + K(x^2 + y^2)}.$$

Differenziando poi le (72) per dedurne y', si trova

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{y' - Kx(y - xy')}{\sqrt{1 + K(x^2 + y^2)}},$$

d'onde, differenziando nuovamente, si giunge con facile calcolo, che per brevità omettiamo, alla formola

$$\varkappa = \left(\frac{1 + K(x^2 + y^2)}{1 + y'^2 + K(y - xy')^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot y'',$$

riducentesi alla notissima $1/\varrho = y''/(1 + y'^2)^{3/2}$ per $K = 0$.

Altre considerazioni ed altri esempii parrebbero, qui, non opportuni; ma in più appropriata pubblicazione noi non tarderemo a mostrare come sul precedente sistema di formole possa adagiarsi, mercè l'ausilio del metodo intrinseco, un'esposizione piana ed efficace della pangeometria.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII. (1892-1904). Fasc. 9°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCII

Serie Quinta — Volume V — Fascicolo VI.

RUGGERO SCHIFF-GIORGINI

RICERCHE

SULLA

TUBERCOLOSI DELL'ULIVO

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

RELAZIONE

letta dal Corrispondente G. Cuboni (relatore), a nome anche del Socio R. Pirotta, sulla Memoria del dott. Ruggero Schiff-Giorgini, avente per titolo: *Ricerche sulla tubercolosi dell'ulivo*, nella seduta del 2 aprile 1905.

L'autore comincia col fare una esposizione sommaria, ma precisa e completa, delle conoscenze che finora si hanno intorno alla tubercolosi dell'olivo, alle sue cause e ai suoi effetti quali risultano dai lavori di Arcangeli, Savastano, Prillieux, Cavara, ecc.

Fa quindi una dettagliata descrizione anatomico-patologica del tubercolo e riesce a dimostrare un fatto, finora non conosciuto, che cioè oltre i tubercoli ordinarî, originati in seguito ad infezioni provenienti direttamente dall'esterno, vi sono tubercoli metastatici che si originano dalle infezioni trasportate per la via dei vasi.

Interamente nuova è la descrizione dei caratteri culturali del *Bacillus Oleae* nei diversi substrati nutritivi, la descrizione dei caratteri microscopici, il polimorfismo del *B.*, la sua sporulazione, la presenza di ciglia vibratili, tutti dati che mancavano nelle descrizioni finora pubblicate sopra questo bacillo.

L'A. espone poi la biologia del parassita, l'influenza che sopra di lui esercitano la temperatura, il disseccamento, ecc. Ma la parte più originale del lavoro consiste nello studio dei prodotti elaborati dal bacillo e dei diversi mezzi di difesa meccanica e chimica mercè i quali la pianta malata si difende contro il parassita. Dimostra come tali bacilli dànno origine a degli enzimi (amilasi, cellulasi) che convertono l'amido e la cellulosa in zucchero; dimostra che l'estratto acquoso di frammenti di pianta malata, determina nelle culture in brodo del *B. Oleae* una specie di agglutinazione, e come nel detto estratto si riscontri anche la presenza di attive sostanze battericide e batteriolitiche.

È la prima volta che nella patologia vegetale sono messi in evidenza questi fatti che presentano una grande analogia coi fatti della patologia animale scoperti in questi ultimi anni dall'Ehrlich, dal Metschnikoff, ecc.

È una nuova orientazione nello studio delle malattie delle piante che l'A. segue in questo suo lavoro condotto con metodo rigoroso e diligente.

Per quanto talune considerazioni dell'A. possano dar luogo a qualche critica, tuttavia i sottoscritti non esitano a raccomandare all'Accademia di ammettere alla stampa nei suoi Atti la Memoria del dott. Schiff.

Ricerche sulla tubercolosi dell'Ulivo (1).

Memoria del dott. RUGGERO SCHIFF-GIORGINI

(con due tavole)

Colgo con vero piacere l'occasione per ringraziare il prof. G. Guarnieri, di Patologia Generale nella R. Università di Pisa, che ha voluto gentilmente concedermi ospitalità nel suo Istituto, e che mi è stato largo di aiuti e consigli preziosi.

Nel suo Istituto ho potuto fare le ricerche batteriologiche sul *B. Oleae* e quelle che riguardano le proprietà battericide dell'Ulivo, mentre le rimanenti furono eseguite nell' Istituto Botanico della R. Università di Pisa, diretto dal prof. G. Arcangeli, al quale pure esprimo la mia riconoscenza.

Molti autori, da Plinio in poi, si sono occupati di questa diffusissima malattia dell'Ulivo. Si tratta in generale di lavori di indole descrittiva, nei quali la malattia è attribuita alle cause più strane e disparate. Una estesa bibliografia dell'argomento si trova nei lavori del prof. Arcangeli e del Savastano, dei quali ora parlerò, e perciò credo inutile il ripeterla.

Il primo lavoro scientificamente condotto su questo argomento è quello del professore G. Arcangeli (2). L'A., premesso il sunto dei principali lavori antecedenti, descrive accuratamente il male, notando che i tubercoli si riscontrano prevalentemente nei punti in cui la pianta fu offesa, specialmente sulle ferite lasciate dalle foglie cadute; osserva anche che spesso si trovano lungo i rami, nel tessuto perfettamente estraneo ai nodi vitali.

Nei tubercoli giovani non riscontrò mai la presenza di insetti o di altri parassiti animali o di funghi, che pur erano stati da altri indicati come causa del male, e perciò escluse l'ipotesi della loro azione patogenetica. Osservò però costantemente nell'interno dei tubercoli delle caverne abitate da numerose colonie di una batteriacea, che l'A. chiamò *Bacterium* (*Bacillus*) *Oleae*, da filamenti micelici, probabilmente di un *Cladosporium*, da spore di funghi: egli però non crede che il male possa sicuramente riferirsi nè al *B. O.* nè ai funghi, ma piuttosto da uno speciale stato della pianta, dovuto ad una sproporzione fra il lavoro delle radici e quello della fronda. Consiglia poi la cura a base di acido fenico, ciò che potrà chiarire, egli osserva, l'importanza patogenetica del *B.* e dei funghi.

(1) Vedi mia Nota preventiva nel Centralblatt f. Bakteriologie, ecc., II^a Abt., XII Bd., marzo 1904.

(2) *Sopra la malattia dell'ulivo detta volgarmente rogna.* Ricerche e lavori eseguiti nell'Istituto Botanico della R. Università di Pisa, 1886.

Poco dopo comparve la 1ª Memoria del Savastano, seguìta l'anno dopo dalla 2ª [1]. L'A. dà un esteso sunto dei lavori esistenti sulla rogna, esponendo tutte le diverse supposte cause del male. Studiando il tubercolo vi ha riscontrato il *B.* già visto da Arcangeli, e ne ha ottenuto la cultura pura. Ha potuto, per inoculazione in ulivi sani di coltura pura, riprodurre il male, dimostrando così la patogenicità del *B.*

Divide il male in diversi tipi, a seconda del luogo di sviluppo e della costituzione istologica dei tubercoli: fa perciò una tubercolosi corticale, una libero-legnosa, una radicale ecc. Al lavoro sono unite diverse tavole litografiche, in cui sono raffigurati diversi tipi di tubercoli. Vi sono anche dei disegni, non molto chiari, della struttura istologica dei tubercoli stessi. In una ultima Nota [2] ha dato parecchi caratteri culturali del *B. O.*

Il Prillieux, tre anni dopo, pubblicò una breve Nota [3] in cui dà una assai precisa descrizione istologica del tubercolo, senza però studiare particolarmente il *B.*

Pubblicò poi il suo lavoro il Voglino [4]. Egli ha controllato le esperienze del Savastano sulla riproduzione artificiale del male, ed ha aggiunto alcuni caratteri culturali del *B*: non si è occupato però dell'anatomia patologica del tubercolo.

Anche il Cavara [5] ha riprodotto sperimentalmente il male, usando culture pure di *B. O.*

Il Vuillemin [6] espose l'opinione che il *B. O.* avesse bisogno della cooperazione di uno speciale fungo, il *Chaetophoma oleacina*, per attaccare l'ulivo; abbiamo però visto come le culture pure del *B. O.* riproducano la malattia, e di più nei tubercoli giovanissimi non si riscontrano funghi di sorta, benchè il Vuillemin ve ne abbia riscontrati, a quanto dice nel suo lavoro.

Per ultimo il Bioletti [7] ha annunziato che la malattia si è manifestata in California, mentre non si conosce ancora nel resto dell'America.

Accennato così brevemente ai lavori esistenti sull'argomento, esporrò i risultati delle mie osservazioni su questa malattia.

Il Tubercolo. Anatomia patologica. Etiologia.

Il primo indizio del formarsi di tubercolo rognoso su di un ramo di ulivo consiste in un piccolo rigonfiamento, appena avvertibile all'occhio, che continuamente cresce, assumendo, in un tempo variabile da qualche mese ad un anno, dimensioni assai considerevoli.

Influiscono molto sullo sviluppo che prende il tubercolo, l'età e la robustezza del ramo ammalato. I tubercoli giovani, in grande attività neoformativa, non si ri-

[1] *Tubercolosi, iperplasie e tumori dell'ulivo.* Napoli, 1887.
[2] *Il bacillo della tubercolosi dell'Ulivo.* Roma, 1889.
[3] Rév. Gén. de Botanique, I, 1889, pag. 293.
[4] *La Rogna dell'ulivo. Bacillus oleae.* (Arc. Trevisan). Torino, 1892.
[5] *I funghi parassiti delle piante coltivate o utili.* Briosi e Cavara, Pavia, 1890; V. n. 101.
[6] Bull. de la Soc. Myc. de France, 1897. XIII, 1°-44.
[7] California, Sta. Bull. 120, pag. 11.

scontrano che sui rami giovani. Quelli vecchi per lo più non portano che tubercoli suberizzati, vecchi anch'essi, formatisi all'epoca in cui il ramo che li porta era giovane. Infatti un rametto giovane, coi tessuti in massima parte ancor teneri e ricchi di succhi, è certo per i *B.* un terreno di sviluppo più favorevole di quello che non possa essere un vecchio ramo, meccanicamente assai solido, e ben protetto da una solida corteccia, in parte sugberosa. Forse un giovane ramoscello, colle giovani cellule in attiva riproduzione fisiologica, si presta allo sviluppo di una iperplasia patologica, più di un vecchio ramo, costituito in gran parte di tessuti che non si trovano in uno stato di così intensa attività riproduttiva.

Alcuni tubercoli conservano lungamente la forma globosa, altri invece prestissimo si screpolano profondamente, prendono una forma irregolare, e subiscono una parziale suberizzazione delle loro cellule.

La maggior parte dei tubercoli si trova sui cuscinetti foliari, altri dove si produssero ferite accidentali dei tessuti corticali (battiture, grandine, punture d'insetti ecc.) altri infine lungo i rami, senza esser determinati, apparentemente, da nessuna causa esterna. Studiando al microscopio le diverse specie di tubercoli, mi sono convinto che ne esistono due tipi principali, assolutamente distinti per la loro origine. Dalla loro diversa origine poi dipendono le differenze di costituzione istologica dei tubercoli stessi, che perciò furono divisi in tubercoli corticali, libero-legnosi ecc., a seconda che resultavano prevalentemente costituiti di tessuti corticali, libero-legnosi ecc.

Il primo tipo di tubercolo è quello che si produce per un'infezione venuta direttamente dall'esterno, attraverso una ferita qualunque, che ha permesso l'ingresso del *B.* specifico nella pianta. Questa è la forma ben conosciuta della malattia, alla quale si riferivano tutte le manifestazioni dell'infezione.

Facendo però delle sezioni longitudinali di rametti infetti, si può vedere che superiormente ed inferiormente al tubercolo, l'infezione prende la via dei vasi, e che per lungo tratto i vasi del ramo, apparentemente sano, sono invasi dai *B.* (tav. I, fig. 3ª). Cominciai allora a fare numerosissimi tagli in serie, per vedere se queste infezioni, portate dai vasi, potessero dar luogo alla formazione di nuovi tubercoli. Osservai allora come si possano avere dei tubercoli che si originano dai vasi, i quali trasportano un'infezione sviluppatasi altrove, mentre i tessuti tegumentari sono perfettamente illesi; in altre parole insomma che si possono avere dei tubercoli metastatici, secondari ad altri tubercoli primitivi, cresciuti in differenti parti della pianta.

Essendo assai diversi lo sviluppo e la natura dei due tipi di tubercolo, primitivo e metastatico, esamineremo separatamente come essi siano formati.

Potrà ora tornare utlie il ricordare brevemente come è costituito normalmente un giovane rametto di *Olea Europaea.* Il ramo è ricoperto di uno strato di cellule epidermiche, a parete esterna molto ingrossata; seguono una zona di periderma, una serie di 3, 4 strati di cellule collenchimatiche, qualche fila di cellule ovaloidi, ed uno strato di fibre liberiane. Al di sotto si trova il floema, con vasi cribrosi, cellule liberiane e parenchima; segue il cambio sottile, e poi si ha la zona dello xilema. Consta di cellule libriformi, vasi legnosi, tracheidi ed elementi parenchimatici. I vasi in generale sono porosi, e verso il centro anche spirali; vi sono frammisti i raggi midollari. Resta il midollo, formato di cellule esagonali, tondeggianti, ripieno di granuli di

amido composti spesso di quattro elementi. Vediamo ora che alterazioni può produrre, in un ramo così costituito, la presenza di una colonia di *B. Oleae*. Esaminiamo separatamente, come ho detto, in due casi, se l'infezione cioè è primitiva o se è metastatica.

Nel primo caso il tubercolo esordisce con una iperplasia della scorza (tav. I, fig. 1ª) nel punto in cui è avvenuta l'infezione: si forma un ingrossamento, costituito di cellule parenchimatiche, tondeggianti, a grosso nucleo, a cui si trovano frammisti gruppetti di cellule e fibre sclerose, provenienti dalla dislocazione e neoformazione delle fibre liberiane, di cui ho parlato sopra; non si ha più differenziazione apprezzabile fra i varî elementi della scorza. I bacilli si trovano riuniti in grandi ammassi, però si possono riscontrare sparsi nelle cellule che limitano la parte sana da quella malata. Nel luogo dove si trovano ammassati i *B.* si forma presto una caverna; le cellule che la tappezzano sono corrose, ingiallite, e il contenuto loro viene distrutto prima della parete. Si possono allora vedere partire dalle pareti delle caverne delle sottilissime forme dendritiche, che non sono che l'avanzo di pareti di cellule oramài distrutte.

Col tempo si cominciano a formare nei tessuti neoplastici della scorza dei corti fasci, a decorso irregolare, costituiti di tracheidi, i quali, al taglio trasversale, presentano una disposizione vorticosa, concentrica, dei loro elementi, tale da ricordare l'aspetto di una cipolla tagliata. La lignificazione delle cellule diminuisce dal centro alla periferia. Uguali formazioni si osservano anche nei tessuti cicatriziali, e sono dagli autori tedeschi chiamate col nome di *Tracheideknäule* [1]. (A titolo di raffronto osserverò che simili disposizioni cellulari a cipolla si riscontrano, p. e., nei carcinomi degli animali).

A questo punto anche il cilindro centrale, benchè non sia direttamente attaccato dal *B.*, risente lo stimolo patologico che ha invaso gli altri tessuti, e si mostra in attiva neoformazione, verso la parte infetta (tav. I, fig. 2ª). Nei tubercoli primitivi assai vecchi viene però ad essere attaccato anche il legno, sebbene in modo assai diverso di quello che si verifica nei tubercoli metastatici. I *B.*, che ormai hanno invaso la maggior parte dei tessuti della scorza, arrivano al cilindro centrale: i raggi midollari, che vi si trovano frammisti, essendo meno resistenti degli elementi legnosi in genere, sono attaccati per i primi. Si vedono allora (tav. I, fig. 2ª) le cellule dei raggi midollari corrose, piene di *B.*, mentre gli elementi legnosi restano relativamente sani: a poco a poco però vengono ad essere corrosi anche questi ultimi, che intanto sono stati invasi dai *B.*, i quali ora si trovano abbondanti dovunque. Talora l'infezione, partendo dalla scorza, prende rapidamente la via di un raggio midollare ed arriva al legno di primavera; lì si arresta e comincia ad estendersi lateralmente, sul limite appunto del legno di primavera con quello d'autunno. Le cellule cominciano ad alterarsi, e ben presto, lungo il raggio midollare che ha portato l'infezione, si forma un' ampia comunicazione tra il focolare batterico interno e quello principale della scorza. I *B.* così arrivano fino ai vasi, e a poco a poco, o, come ho detto ora, assai rapidamente, e vi si riproducono abbondantemente, seguendone il corso.

[1] E. Küster, *Pathologische Pflanzenanatomie*. Fischer, Jena, 1903, pag. 177.

E. F. Smith (1), al quale dobbiamo la conoscenza di parecchie malattie batteriche delle piante, osservò che lo *Pseudomonas campestris*, da lui riconosciuto causa di una malattia del cavolo, si riscontra abbondante nei vasi. Lo stesso osservò pel *B. Solanacearum* (2) e per un altro B. parassita delle cucurbitacee, da lui chiamato per questa proprietà *B. Tracheiphilus* (3). Egli così ha osservato che la malattia si propagava all'intera pianta, per il progressivo estendersi dell'infezione. Non si trattava perciò, nei casi descritti da Smith, di vere metastasi per disseminazione, dovute alla disseminazione dell'agente patogeno, ma di semplice propagazione del male.

I bacilli circolanti nei vasi possono, come ho già detto, dar luogo a nuovi tubercoli, se una causa qualunque determina il loro fissarsi e moltiplicarsi in un posto determinato. Talvolta forse i *B.*, arrivati all'estremità del vaso che li contiene, vi ristagnano, hanno tempo di moltiplicarsi sufficientemente, e danno così origine ad una nuova infezione.

Nel tipo di infezione metastatica si cominciano a vedere nelle sezioni trasversali uno o due vasi ingialliti, obliterati dalle colonie del *B.* (tav. II, fig. 7ª). All'esterno, per ora, nulla ci avverte che sta formandosi un tubercolo; gli strati corticali sono perfettamente sani, e non si vede nessuna apertura che abbia potuto portare l'infezione nell'interno del ramo.

I vasi attaccati si distruggono e comunicano l'infezione ai tessuti vicini. Le cellule più prossime del midollo, giacchè nel maggior numero dei casi la metastasi avviene pei vasi più prossimi al midollo, sotto lo stimolo infettivo cominciano a segmentarsi per setti tangenziali al centro infetto. Si forma così un tessuto cambiforme, da cui ha origine la neoformazione (tav. I, fig. 4ª). La decomposizione del legno tende a progredire verso l'esterno: davanti al focolaio di infezione scompaiono nel legno i vasi a grosso lume, rendendo così più compatti e più resistenti i tessuti. L'infezione però progredisce, anche qui, specialmente per i raggi midollari, e arriva così fino al cambio. Questo, sotto la spinta che viene dall'interno, cede e si apre, continuando la sua attività formatrice, che però resta profondamente disturbata dalla anormale posizione del cambio stesso. Si formano allora nuovi strati di floema e di xilema, completamente disordinati, però, e appena riconoscibili. Contemporaneamente si producono presso il cambio, numerosi elementi sclerosi che, come vedremo, sono un valido mezzo di difesa nel caso di infezioni provenienti dall'esterno: in questo caso però sono completamente inutili.

La scorza è anch'essa invasa dall'attività neoformativa e si moltiplica rapidamente confondendosi coi fasci dislocati. La caverna batterica iniziale, benchè spostata dall'irregolare accrescimento dei tessuti, si trova sempre, in questi tubercoli metastatici, nella parte legnosa della neoformazione; da ciò abbiamo modo di riconoscere se un tubercolo, anche avanzato, è primitivo o metastatico: se la caverna batterica sarà nella zona costituita dai tessuti corticali più o meno alterati, sarà con probabilità primitivo; nel caso invece che sia nella zona legnosa, sarà metastatico.

(1) Centralbl. f. Bakt. III, 1897.

(2) *A Bacterial disease of the tomato.* Washington, 1896.

(3) *Die Ursache des Verwelkens versch. Cucurb.* Centralbl. f. Bakt., 1895.

Il legno neoformato è costituito principalmente di tracheidi sconvolte e disordinate; mancano i vasi a grosso calibro. (Ricorderò qui come anche nei tubercoli prodotti negli animali dal *B.* della tubercolosi manchi la neoformazione di vasi). D'altra parte non si trovano le cellule cambiformi, i vasi cribrosi, e tutto è sostituito da cellule ovaloidi, disposte senz'ordine. Si notano anche qui, come nei tubercoli primitivi, dei moduli di elementi legnosi disposti a vortice, disseminati nei tessuti neoplastici della scorza.

La metastasi si può produrre anche attraverso il floema, sebbene assai più raramente. In questi casi si osserva che talora i tessuti, in luogo di reagire, come di solito fanno, allo stimolo infettivo colla proliferazione cellulare, si difendono formando intorno alla zona infetta una solidissima parete di cellule sugherose e sclerose, che talvolta arrestano l'infezione. Lo xilema, che non si è potutō difendere così, si mostra in questi casi corroso, prevalentemente, al solito, lungo i raggi midollari.

I tubercoli, numerosissimi, dei cuscinetti fogliari ci lasciano spesso incerti sulla loro origine. Se sulla ferita prodotta dal cadere della foglia vengono, da una causa esterna qualunque, portati dei *B. O.* essi potranno dar luogo ad un tubercolo primitivo. Al contrario, se nei vasi si troveranno circolanti dei *B.*, provenienti da tubercoli vicini, essi potranno fissarsi sui tessuti lesi dalla caduta della foglia, e determinare un tumore metastatico, che sembrerà primitivo.

Lo stesso probabilmente può succedere per le ferite prodotte dalla grandine o da altre cause esterne. Perciò, oltre i due casi tipici di infezione che ho descritto, si possono riscontrare dei tubercoli che ci lasciano incerti sulla loro origine.

Nei tubercoli dei cuscinetti il midollo invia verso il tubercolo quella propaggine midollare che, fisiologicamente, dovrebbe servire al nuovo rametto: essa, nel caso di un tubercolo, si perde nella massa neoformata. Questo fatto è molto dannoso per la pianta, giacchè la propaggine midollare arriva nel tubercolo carica di amido, il quale viene in parte distrutto dalla diastasi prodotta dal *B. O.*

I tubercoli continuano molto tempo a crescere. Gli strati esterni si mortificano, suberizzandosi: internamente però la neoformazione cellulare continua, forza le zone esterne suberificate, e finisce col romperle, dando così al tubercolo vecchio l'aspetto profondamente screpolato, che gli è caratteristico. Succede insomma un fatto analogo a quello che fisiologicamente produce nelle piante legnose il ritidoma.

È difficile che il tubercolo arrivi ad uccidere il ramo sul quale si è sviluppato, ad ogni modo però lo rende rachitico e stentato, probabilmente anche per la sottrazione di amido, che viene dalla amilasi del *B. O.* convertito in zucchero, come vedremo parlando della biologia del microorganismo.

È inutile che insista sulla patogenicità del *B. O.*: essa è già stata dimostrata da altri, come ho detto parlando dei lavori che già esistono su questo argomento. Ad ogni modo dirò che ho ripetutamente provocato, per inoculazione, la tubercolosi in piante sane di ulivo, usando culture pure di *B. O.* in brodo glicerinato.

Restava però da fare uno studio batteriologico il più completo possibile, del *B. O.*, e questo ho cercato di fare coi resultati che più avanti esporrò.

Riguardo alla tecnica usata nello studio dei tubercoli dell'ulivo, dirò che non credo conveniente l'usare di inclusioni, nè in paraffina, nè in celloidina, per facilitare

le sezioni dei pezzi. Questi metodi rendono necessaria la disidratazione dei pezzi stessi, che allora acquistano una durezza tale, da renderne impossibile il taglio. Mi sono trovato invece assai bene di questo processo assai semplice. Si mette il pezzo, fresco, su un tappo ordinario di sughero e vi si fissa, orientandolo, a mezzo di un ferro caldo, con un miscuglio di cera e colofonia. Ciò fatto si seziona, tenendo la lama del rasoio e il pezzo bagnati di alcool ordinario.

Così ho potuto ottenere numerosissime sezioni, abbastanza sottili da essere fotografate. In questo genere di tagli non si può usare un microtono a slitta: ci vuole un microtono in cui tanto il coltello che il pezzo siano solidamente fissati, in modo da impedire il minimo spostamento dell'oggetto da tagliarsi, nel momento che incontra il rasoio. Per questo uso ho trovato eccellente il microtono di Fiori, costruito da Koristka.

Caratteri culturali del Bacillus Oleae.

Il *B. O.* si sviluppa bene e con gran prontezza su quasi tutti i substrati nutritivi comunemente usati per la cultura delle batteriacee. Assume, come del resto molte altre specie batteriche, forme ed aspetti assai diversi nei varî mezzi di cultura. In Agar-agar, in tubo a becco di flauto, per strisciamento, fa, dopo 12 ore, un leggero velo semi-trasparente, lobato, che presto cresce di estensione e specialmente di spessore, prendendo un colore bianco giallastro. Nell'ulteriore accrescimento si sviluppano sulla pellicola che si è formata, numerose pieghe salienti, prevalentemente in direzione trasversale all'asse maggiore della cultura per strisciamento. La pellicola ha un aspetto lucente e molle; nelle vecchissime culture (4-5 mesi) ha un aspetto umido ed un colore giallastro sporco.

Per infissione le colonie non si sviluppano che alla superficie, sotto la forma di un piccolo scudetto a lobi frastagliati, mancando negli strati interni l'ossigeno necessario al loro sviluppo. L'accrescimento delle culture, rapidissimo dei primi tempi, cessa dopo 6 o 7 giorni. Le culture in scatole di Petri hanno uno sviluppo rapidissimo; nelle colonie superficiali il *B. O.* forma delle plachette rotondeggianti, lobate, rilevate, mentre che in quelle profonde non si hanno che delle macchioline rotonde, che cessano presto di accrescersi.

In Agar glicerinato lo sviluppo è un po' minore, e la pellicola prodottasi ha un aspetto secco, direi quasi pulverulento.

Il mezzo sul quale il *B. O.* si sviluppa con la massima prontezza e rigogliosità è l'Agar zuccherato. Talvolta la pellicola comincia a rendersi visibile dopo 4 ore dalla seminagione e dopo 8 essa è già ben visibile; la pellicola ha una grande tenacità, e con un filo di Platino la si può staccare a brandelli dal terreno nutritivo. Essa invade presto tutta la superfice dell'Agar, e rimonta sulle pareti del tubo, se queste sono umide dall'acqua di condensazione. Nei terreni a base di *Chondrus Crispus* lo accrescimento delle culture è pure assai rapido: la pellicola è visibile dopo 7 o 8 ore. Nel complesso le culture somigliano quelle in Agar semplice, tranne che hanno un colore più chiaro, quasi bianco.

In patata glicerinata forma uno strato trasparente e gelatinoso, che dura lungamente a crescere, e che invecchiando prende un colore giallastro sporco, mentre si fa più spesso. Si sviluppa bene anche nell'acqua glicerinata che si raccoglie nel fondo del tubo.

Il brodo è molto favorevole allo sviluppo del *B. O.* L'intorbidamento comincia dopo 6 ore; più tardi si comincia a formare sul brodo una pellicola assai consistente, bianca, cresputa. Se la temperatura è superiore all'optimum del *B. O.*, le culture in brodo formano subito il velo superficiale, non mostrando che minime tracce di intorbidamento. L'accrescimento cessa dopo qualche giorno, e dopo 15 o 20 il brodo si rischiara, depositando sul fondo un ammasso pulverulento (costituito di spore) che, per agitazione, torna ad intorbidare il liquido. Il brodo rischiarato assume una colorazione bruna. L'aggiunta di salda d'amido o di glicerina al brodo non modifica sensibilmente questi fatti.

In gelatina lo sviluppo è un po' più lento che negli altri mezzi di cultura, data la bassa temperatura necessaria in questo genere di cultura. Per infissione non si hanno che tracce di liquefazione, a temperatura bassa, mentre se la cultura si fa a circa 20° si forma presto una liquefazione imbutiforme, abbondante della gelatina stessa.

Il latte è coagulato dopo circa 48 ore ma in seguito il coagulo si ridiscioglie, ed il liquido diviene trasparente, assumendo un colore giallo.

Tutti questi dati riguardano culture fatte, meno indicazioni contrarie, alla temperatura di 34°-35°, che è la temperatura ottima per il *B. O.*

Caratteri microscopici.

Il *B. O.* è un microorganismo discretamente polimorfo; le sue forme mutano col mutare delle condizioni di vita. Nelle caverne dei tubercoli e nei tessuti degli ulivi colpiti si presenta come un bacillo piuttosto tozzo, ad estremità arrotondate: le singole cellule batteriche sono confusamente ammassate e non si trovano mai riunite in catenelle: tutt'al più in file di due, o raramente tre, individui.

In questi *B.* parassiti non ho mai osservato forme sicuramente sporificate, neanche nei tubercoli assai avanzati, mentre come vedremo, il *B. O.* sporifica assai rapidamente allorchè è artificialmente coltivato. Avrò occasione di tornare su questo argomento parlandone dal punto di vista biologico.

Osservato allo stato fresco il *B. O.*, presenta un moto vermicolare, che produce lo spostamento della cellula. Il B. si mostra trasparente, verdastro, e talora contiene minuti granuli. Vi si vedono distintamente le spore; esse si mostrano, nell'interno della cellula batterica, come piccole vescichette refrangenti, decisamente verdi, a contorni nettamente definiti. Appariscono luminose se si sfoca il tubo del microscopio in alto, mentre sembrano macchie scure se si sfoca abbassando il tubo.

Quando un *B.* deve sporificare diventa immobile e si comincia a distinguere nel suo interno una zona molto refrangente, che si trova quasi sempre nel centro della cellula; talvolta però verso un estremo. Questa macchia luminosa va gradatamente aumentando, si differenzia dal rimanente corpo bacillare, si riveste di una membrana,

ed assume così i caratteri di una vera spora durevole (tav. II. fig. 5ª). La cellula batterica, prodotta la spora, comincia a svanire e presto non rimangono di essa che due esili macchie ai poli della spora, macchie che non tardano a scomparire completamente. Gli elementi riuniti a catenella non sporificano quasi mai: gli individui liberi godono a preferenza di questa proprietà. La stessa cosa avviene nel Vibrione settico (*Bacillus septicus* di Pasteur). I *B.* sporulati sono leggermente rigonfiati in corrispondenza della spora, e assai più grandi degli individui comuni (tav. II, fig. 5ª). La spora che, come ho detto, è quasi sempre centrale, può essere terminale, e allora il *B.* assume un aspetto che ricorda le ben note forme a bacchetta di tamburo del *B.* del tetano e di altre batteriacee. Le spore misurano $1{,}6 \times 1\ \mu$ e gli elementi sporulati $3 \times 1{,}2\ \mu$.

Le spore si formano assai presto nelle ordinarie colture, ma coi comuni metodi di colorazione semplice non è possibile di differenziarle nettamente nell'interno del corpo bacillare. Si osservano talora dentro i bacilli dei granuli intensamente colorati, che potrebbero essere presi per spore, mentre non sono che cromidi. La loro forma irregolare ci fa conoscere la loro natura. Le spore hanno costantemente una forma ovale regolarissima, a contorni nettamente definiti. Un metodo eccellente, e di sicura riuscita, per far dei preparati di doppia colorazione dei bacilli e delle spore del *B. O.* è il seguente, in uso nel laboratorio di Patologia generale della R. Università di Pisa. Si bollono per un minuto i vetrini col materiale sporigeno in una soluzione 1 °/₀ di HCl, si lavano, si colorano intensamente al Ziehl, e si scolorano in acqua ed alcool. Si ricolorano leggermente in bleu di metilene, si lavano, si asciugano e si montano in balsamo. Ho ottenuto dei bellissimi preparati, in cui le spore appariscono in rosso rubino, mentre i bacilli sono tinti in bleu.

Quando una spora è trasportata in un ambiente favorevole, essa germina, dando luogo a nuovi bacilli. D'ordinario la membrana della spora si fende perpendicolarmente all'asse maggiore della spora stessa, e dalla fenditura sbuca lateralmente la nascente cellula batterica, che resta per lo più impiantata, con un estremo, nella membrana vuota. Si incontrano spesso nei preparati ottenuti con culture di 4 o 6 ore, da vecchie culture sporulate, di queste membranelle vuote, poco colorabili. Talvolta, sebbene più raramente, la cellula nata ha in suo asse maggiore che coincide con quello della spora da cui ha avuto origine. In questo caso la membrana si strappa irregolarmente in due calotte, che restano aderenti ai poli del nuovo bacillo.

Il *B. O.* si colora bene cogli usuali colori di anilina, con l'acqua anilinata di Ehrlich e colla soluzione fenicata di Fuxina secondo Ziehl. Io ho abitualmente usato quest'ultimo colorante, di uso comodissimo, a causa della sua grande conservabilità.

Con questo liquido il *B.* si colora bene al caldo in pochi secondi ed a freddo in meno di un minuto. Il *B. O.* si colora, sebbene non sempre ugualmente bene, col metodo di Gram. La leggera capsula di cui sono circondati i bacilli, specialmente nelle culture giovani, si rende discretamente visibile colorando intensamente al Ziehl a caldo, e decolorando energicamente con alcool a 50°; le capsule appariscono in rosa, ed i corpi batterici in rosso vivo.

Nelle culture giovani si notano numerosi bacilli le cui estremità si colorano molto intensamente, mentre il centro resta completamente incoloro. Le giovanissime culture anzi, specialmente in *Chondrus crispus*, sono in prevalenza costituite di queste

forme. Queste forme, che sono state osservate in diversi altri bacilli (per es. *setticemie emorragiche*), spariscono nelle culture di oltre 4 giorni.

La viva mobilità di cui si vedono dotati, osservandoli in goccia pendente, i bacilli dell'Ulivo, faceva supporre che essi fossero provvisti di ciglia vibratili. È noto infatti che nelle specie comunemente riconosciute immobili (*B. Anthracis*) non si riesce, almeno cogli attuali metodi di colorazione, a mettere in evidenza le ciglia, che invece si trovano in numero più o meno grande nelle specie che appariscono più o meno mobili (*B. Tiphi*, *B. Subtilis*). Di più il fatto di intorbidare presto e uniformemente il brodo, faceva pure credere alla presenza delle ciglia, giacchè generalmente le specie batteriche che ne sono sprovviste formano degli ammassi in fondo al brodo, senza intorbidarlo sino in cima.

Provai perciò i più usati metodi di colorazione delle ciglia, ma ebbi risultati negativi. Usando però il metodo che ora descriverò, e che devo alla gentilezza del prof. G. Guarnieri, riuscii a mettere in evidenza intorno al *B. O.* una numerosa serie di lunghe ed ondulate ciglia, di una esilità estrema. L'ostacolo maggiore che si oppone alla riuscita di buoni preparati di ciglia è la loro straordinaria fragilità.

Preparando i vetrini colla solita tecnica, distendendovi cioè il materiale coll'ansa di platino, le ciglia si rompono tutte, distaccandosi dal *B.*, e si e no si arriverà a vedere nel fondo del preparato qualche frammento di esse. Ho perciò seguìto questo modo di preparazione, che mi ha permesso di avere buoni preparati. Si fa un passaggio del *B.* su Agar di recente preparazione, possibilmente molto umido di acqua di condensazione, e dopo 20-24 ore si porta delicatamente un frammento della cultura ottenuta in poche goccie d'acqua sterile. In capo a due o tre ore il frammento si è disciolto nell'acqua, formandovi una sospensione assai omogenea di bacilli.

Si può anche diluire nell'acqua sterile una goccia di cultura in brodo di 24 ore: coll'Agar però i preparati riescono più belli, perchè le piccole quantità di materia solida che il brodo, per pulito che sia, tiene in sospensione, si colorano poi intensamente, sporcando il fondo del preparato.

Si preparano intanto dei coprioggetti perfettamente puliti (tenuti un giorno in H_2SO_4 e poi lavati con alcool e conservati in alcool e benzina) e colle pinzette si adagiano sulla goccia di acqua contenente i bacilli. Si sollevano dolcemente i vetrini, si rivoltano, e si lascia asciugare lo strato di liquido aderitovi. Si mettono poi a galleggiare per 15 o 20 minuti, a caldo, nel seguente liquido colorante e mordente:

Soluz.	acquosa satura allume.	cc.	40
»	10 % tannino	»	40
»	alcool-satura Violetto di Genziana. . .	»	8

I vetrini si lavano in acqua, si asciugano e si montano in balsamo. Si vedranno allora i bacilli tinti in violetto cupo, ed intorno a loro otto o dieci esilissime ciglia, lunghe tre o quattro volte la cellula batterica, ondulate, tinte in violetto più chiaro. Sono muniti di ciglia specialmente gli individui liberi, o riuniti in file di poche cellule.

I bacilli agglomerati, quelli del velo superficiale del brodo p. es., ne sono sprovvisti. Le ciglia infatti, essendo essenzialmente organi locomotori, sarebbero inutili in questi individui fissi, immobili, e perciò probabilmente spariscono, quando la cellula perde la sua mobilità.

Darò ora una sommaria descrizione degli aspetti che il *B. O.* presenta nei diversi mezzi di cultura.

In brodo le cellule batteriche si trovano spesso riunite in lunghe catenelle serpeggianti, in modo da ricordare il *B. Anthracis*. Le catenelle si riuniscono spesso, intrecciandosi e formano dei cespuglietti notanti nel brodo. Il velo superficiale è costituito da innumerevoli di tali ammassi di catenelle, disposte senz'ordine.

Nelle culture in brodo non si osservano quasi mai le cellule che presentano il fenomeno della colorazione dei poli, di cui ho già parlato. Le dimensioni degli individui liberi variano dai 2 e 3 μ di lunghezza per una grossezza di 0,8 μ; quelle degli individui riuniti a catenelle tra 1,8 e 2 μ per 0,7 μ.

In Agar semplice i *B.* si trovano quasi sempre isolati, e raramente in file di qualche individuo nelle culture di oltre 4 o 5 giorni. In quelle giovani si osservano le catenelle già descritte nel brodo, sebbene più corte. Le dimensioni variano dai 1,6 $\times$ 0,6 μ a 2,2 $\times$0,8 μ: sono comuni, nelle culture giovani, le forme a colorazione polare, le quali sono un po' più grandi degli individui comuni; in media 2,5 $\times$ 0,9.

Simili caratteri ha il *B. O.* nelle culture in terreni al *Chondrus crispus*. In quelli all'Agar zuccherato raggiunge dimensioni maggiori delle precedenti: da 2 $\times$ 0,8 μ a 3,1 $\times$ 0,8; di più in queste culture non mostra mai il fatto della colorazione polare; le cellule batteriche sono riunite in catenelle, spesso assai lunghe.

Per le culture in patate si può ripetere quanto ho detto per quelle in Agar: solamente vi scarseggiano le più volte ricordate forme a colorazione polare.

In latte ed in brodo con salda d'amido si hanno forme simili a quelle che si ottengono nel brodo semplice.

Biologia del B. O.

Il *B. O.* è un aerobio stretto. Ho già detto, parlando dei caratteri culturali, che non si sviluppa nelle culture per infissione, e di più che nelle scatole di Petri non si accrescono che le culture superficiali, mancando l'ossigeno necessario negli strati profondi nel substrato nutritivo.

Il suo *optimum* di temperatura si trova fra 34° e 35°. Alla temperatura ambiente lo sviluppo delle culture è lentissimo. La pellicola sull'Agar zuccherato, che a 34° è visibile dopo circa 4 ore, non si forma prima del sesto giorno. Di più il *B.* si presenta riunito in catenelle lunghissime. L'accrescimento diventa pure assai lento a 39° e cessa sopra al 41°.

Il *B.* ordinariamente a 34°, sporifica al secondo giorno di cultura. Alla temperatura ordinaria ciò avviene molto più tardi, mentre la sporulazione avviene con grande prontezza fra 38° e 39°; si osservano spore formate dopo 14 ore. La spora difatti si può considerare un elemento di difesa contro le sfavorevoli condizioni dell'ambiente.

Quando le cellule vegetative, per la temperatura troppo elevata o per altre contrarie circostanze, stentano a vivere, producono una spora durevole, che può sfidare impunemente condizioni di vita tali, che ucciderebbero sicuramente le cellule vegetative. Anche il terreno nutritivo esercita una grande influenza sulla sporificazione del *B. O.* Non ho mai osservato forme sicuramente sporificate dei *B.* che vivono parassiticamente nell' Ulivo, mentre quando costringiamo il *B.* a vivere saprofiticamente nei terreni di cultura artificiali, essi assicurano la conservazione della specie, producendo degli elementi dotati di così meravigliosa tenacità di vita, quali sono le spore. Un fatto analogo avviene col *B. Anthracis*, che non sporifica nel sangue dell'animale vivo, mentre lo fa assai presto nel cadavere o nei terreni artificiali di cultura. Ad ogni modo però ritengo che nei vecchi tubercoli suberificati il *B. O.* sia capace di produrre spore, e che sotto questa forma possa, attraverso varî veicoli di infezione, riprodurre la malattia.

Ho cercato di stabilire la resistenza delle spore del *B. O.* al disseccamento e al calore. Adoperavo culture in brodo di 18 ore, fatte alla temperatura di 38°. Mantenevo il riscaldamento del tubo per il tempo voluto, immergendolo in un bagno maria della temperatura data, e poi seminavo su Agar una ansa di brodo, per vedere così se le spore avevano o no conservato la facoltà di dar luogo, germinando, a nuove culture. Si noti che il punto di ebollizione del brodo era a 102°; e che per ciò queste ultime prove furono fatte riscaldando il tubo a fuoco diretto. Le diverse esperienze furono fatte sempre successivamente collo stesso tubo di brodo, che perciò, dopo essere stato sottoposto alle varie temperature, veniva in fine bollito per il tempo voluto.

Ho così potuto osservare che delle spore tenute per 15 minuti a 50° poi a 60°, a 70°, a 80°, a 90°, e a 102°, erano ancora vive.

Rispetto alla resistenza al disseccamento ho osservato che del materiale sporulato, disteso su coprioggetti sterili e mantenuto allo scuro, era ancor vivo dopo 4 mesi. Questo fatto fa supporre che gli strumenti di pota, usati promiscuamente per le piante sane e le malate, possano essere, e restare per dei mesi, pericolosi veicoli di infezione.

Le spore in condizioni favorevoli, possono vivere a lungo: ho osservato che delle culture in brodo e in Agar erano perfettamente vitali dopo 9 mesi (novembre 1903, luglio 1904).

La vitalità delle forme vegetative del *B. O.* non si scosta da quello delle batteriacee in generale: esse muoiono per una breve esposizione a 60°.

Prodotti formati nelle culture.

Abbiamo visto come il *B. Oleae* coaguli il latte, e come poi lentamente il coagulo si ridisciolga. Questi fatti sono dovuti a due ben noti fermenti la presura e la caseasa, che il *B.* stesso produce. Ho notato anche come liquefaccia la gelatina, producendo fermenti proteolitici.

Per sapere se e a quali albumine il *B. O.* fosse capace di elaborare in terreni nutritivi sprovvisti di albumine, dovetti coltivarlo in un mezzo che, pur non conte-

nendo tali sostanze, si prestasse a mantener in vita il microrganismo. Per ricerche di questo genere furono da varî autori, Pasteur, Cohn e Winogradscky fra gli altri, indicate varie soluzioni numerali.

Per maggior comodità ho preferito di usare, come mezzo di cultura, l'orina perfettamente normale, esente da zucchero e da albumina, indicata da Guinochet (¹) nelle sue ricerche sul *B.* difterico. Ho sterilizzato dunque accuratamente, col metodo delle successive ebollizioni, 400 gr. di orina normale, e vi ho seminato una cultura pura di *B. O.* Dopo 24 giorni il liquido, già da tempo intorbidato, aveva uno sgradevole odore, leggermente ammoniacale, e manifestava una leggerissima reazione col liquido di Fehling. All'esame microscopico la cultura appariva pura. Filtrai allora il liquido attraverso una candela di porcellana di Kitasato, e ottenni così, da una parte il liquido limpido, esente da batterii, che conteneva i prodotti solubili da loro elaborati, e dall'altra le cellule batteriche pure. Esaminai allora, per mezzo dell'acido nitrico, l'orina filtrata, e vi riscontrai la presenza di una albumina. Col liquido di Fehling non ebbi nessuna reazione. Una forte reazione riducente invece provocano in questo liquido le cellule batteriche asciutte, restate nel filtro. Bollendo qualche istante i corpi batterici nell'acqua distillata, e poi filtrando per carta da barite, si trova sciolta nell'acqua filtrata gran quantità di sostanza riducente.

Avendo osservato che le zone del tubercolo circostanti alle caverne batteriche sono povere d'amido, e che, d'altra parte, la pianta malata, come vedremo in seguito, mostra di contenere notevoli quantità di zucchero, pensai che le sostanze dotate delle reazioni delle albumine, prodotte dal *B. O.*, vi fosse un'amilasa, che convertisse l'amido della pianta in zucchero.

Per vedere se la mia ipotesi era fondata, preparai della salda d'amido sterile, e vi aggiunsi alcune gocce dell'orina filtrata, di cui sopra ho parlato e che mostrava, come ho detto, la reazione delle albumine coll'acido nitrico. Dopo 48 ore cominciò a rendersi visibile, per mezzo del liquido di Fehling, la presenza di piccole quantità di zucchero, quantità che poi andò crescendo.

Preparai poi della salda d'amido sterile, e vi aggiunsi del brodo normale sterilizzato: seminai col *B. O.*, e misi la cultura nella stufa a 34°. Dopo 24 ore si era formato un denso velo alla superficie del liquido, che presentava una leggera reazione acida, e al quarto giorno cominciò a manifestarsi nel liquido la presenza di zucchero. Risulta dunque da questi fatti che il *B. O.* produce un'amilasi, con cui converte in zucchero l'amido della pianta; la presenza poi di uno zucchero, o quanto meno di un corpo riducente per il liquido di Fehling, abbiamo visto che si riscontra nel corpo stesso del microorganismo. Del resto quanto sia favorevole allo sviluppo del *B. O.* lo zucchero, di cui normalmente si provvede nella pianta a spese dell'amido, si vede dalla straordinaria rapidità con cui si accrescono le culture fatte in terreni zuccherati.

Il *B. O.* poi produce una sostanza, probabilmente una cellulasi, con cui corrode la cellulosa dei tessuti della pianta, dando luogo alle note caverne: la cellulosa, secondo ogni probabilità, viene anch'essa trasformata in zucchero: non ho però avuto

(¹) *Arch. de Méd. Exp.* T. 4, 1892, pag. 494.

dalle culture fatte in presenza di cellulosa, dei resultati costanti ed esaurienti. Ad ogni modo si osserverà bene, in alcuni dei preparati di cui unisco la fotografia, la corrosione dei tessuti infetti, e specialmente come i raggi midollari siano più attaccati dei tessuti lignificati. (tav. I, fig. 2ª).

Il *B. O.* ha, a comune col *B. Tiphi* e con qualche altro, la strana proprietà di vaccinare, per così dire, il terreno di cultura su cui vive. Se noi togliamo accuratamente, per mezzo di un'ansa di platino sterilizzata, la pellicola formata dal bacillo sull'Agar, e vi seminiamo nuovamente un'altra cultura di *B. O.*, essa non si svilupperà. Ciò si verifica anche con culture assai giovani: se raschiamo un'Agar zuccherato con colonie di 14 ore, e vi inoculiamo delle spore sicuramente vitali, esse non daranno luogo a nuove colonie. Questo strano fatto sembra dovuto a prodotti di escrezione, nocivi al *B.* stesso, i quali si accumulano sui terreni di cultura, impedendo un nuovo sviluppo a nuove colonie.

Non resta però chiaro perchè una cultura possa normalmente durare a crescere per parecchi giorni, mentre poche ore di vita batterica sono sufficienti a rendere il terreno sfavorevole allo sviluppo di nuove colonie dello stesso bacillo.

Nel terreno di cultura il *B. O.* forma indubbiamente dei prodotti a lui nocivi. Se ad una cultura giovane in brodo aggiungiamo qualche goccia di gelatina fluidificata da altre colonie del *B.* stesso, lo sviluppo della cultura viene ostacolato. Il velo si forma con maggior difficoltà, e di più talora una parte dei *B.* sospesi nel liquido cade al fondo, formando degli ammassi che, per certi aspetti, possono ricordare l'aspetto dei *B.* agglutinati.

Le culture in generale non hanno reazione apprezzabile colle carte al tornasole. Però usando brodo di carne senza peptone, talora ebbi reazione acida nelle culture. Anzi un tubo, che fu neutralizzato con soluzione di carbonato sodico, tornò dopo 48 ore a presentare la reazione acida. Le culture erano pure. Ho già accennato come le culture in brodo con salda d'amido, nei primi tempi, mostrino la reazione acida.

Difese organiche delle piante nelle malattie infettive.

Negli animali, come è noto, l'importantissimo argomento delle difese organiche dell'individuo contro le infezioni in genere, è ed è stato, oggetto di attivissime indagini. I classici lavori di Wirchov, di Ehrlich, di Metschnikoff, per non dire di altri, hanno portato gran luce in questo vastissimo campo, dimostrando come, per vie diverse, chimiche o meccaniche, un organismo possa lottare, spesso vittoriosamente, contro una infezione che lo assale.

Nelle piante questa importante questione di patologia è stata assai trascurata e l'unico mezzo di difesa che generalmente si attribuisca alle piante è l'integrità dei tegumenti, che però, come vedremo, si mostra spesso assolutamente insufficiente a proteggere la pianta.

A. Fischer [1] dedica, nelle sue *Vorlesungen über Bacterien* un capitolo alle infezioni delle piante. Egli ritiene che nessuna batteriacea possa esser patogena per

[1] Fischer, Jena, 1897. pag. 131. *Pflanzeninfection.*

una pianta, e dice che le uniche che si possano riscontrare nei tessuti di una pianta viva, sono i *B.* dei tubercoli delle leguminose. Dice che ad ogni modo una pianta è sicuramente protetta dai suoi tegumenti, e nega anche la possibilità che delle batteriacee possano entrare per le ferite, giacchè sotto di esse si forma uno strato sugheroso (?) che separa la zona offesa dal resto della pianta. Il Fischer dunque nega l'esistenza di malattie batteriche delle piante: cita poi come argomento della sua tesi, il fatto che, ripetute inoculazioni di *B.* patogeni per gli animali, praticate nelle piante, non hanno dato luogo a nessuna infezione.

Questo fatto di certo non costituisce una prova della non esistenza di malattie batteriche nelle piante, date le grandi differenze organiche esistenti fra piante ed animali. Vediamo del resto che molte specie batteriche non sono patogeniche che per certe determinate specie animali, ed a maggior ragione dunque una batteriacea potrà essere patogena per gli animali e non per le piante.

Nel libro di Flügge, *Die Microorganismen* (¹) troviamo dedicato un capitolo, fatto dal Kruse, alle infezioni delle piante. Il Kruse riconosce come di comprovata origine batterica una dozzina di malattie delle piante.

Riporterò in breve quanto egli dice di queste infezioni, essendo assai importanti le ipotesi che l'A. espone a proposito delle difese organiche delle piante. Le reazioni, egli dice, delle piante agli stimoli infettivi consistono in degenerazioni cellulari, proliferazioni ecc. Le malattie batteriche colpiscono relativamente poche specie; per le altre si ha l'immunità.

La principale ragione dell'immunità però consiste nell'integrita dei tegumenti; una volta che il *B.* è entrato nella pianta, la rapidità del suo sviluppo dipende dalla natura dell'organo attaccato; così vediamo che nelle parti giovani e meno resistenti i bacilli producono i maggiori danni. Un'importante causa dell'immunità va cercata, continua il Kruse, nelle proprietà chimiche dell'organismo. Molte volte è sufficiente la reazione acida dei succhi della pianta. Tale reazione però spesso manca, e di più parecchie specie batteriche la sopportano bene. Noi siamo da ciò indotti ad ammettere nelle piante l'esistenza di quelle speciali sostanze di difesa, conosciute negli animali col nome di antitossine. Esse però non sono mai state trovate, e anzi l'ipotesi della loro esistenza viene smentita da diversi fatti. Russel ha dimostrato che il succo cellulare dei vegetali è un buon alimento per le batteriacee, e che perciò non contiene sostanze a loro nocive.

Di più è stato osservato che, inoculando delle batteriacee (*B. prodigiosus*, *fluorescens*, *acidi lactici*, *coli* ecc.) nelle piante, si ha spesso una forte riproduzione di quelle, e che la loro scomparsa si fa ad ogni modo attendere delle settimane. Ciò non succederebbe, conclude il Kruse, se nelle piante esistesse un marcato potere battericida.

L'ipotesi del Kruse sull'esistenza di sostanze battericide nelle piante è, come vedremo, perfettamente giustificata, e gli argomenti coi quali egli stesso cerca di dimostrarne l'insussistenza, non hanno certo gran valore.

L'esperienza di Russel, che cioè il succo cellulare si presta allo sviluppo delle batteriacee, è stata fatta, a quanto pare, con succhi di piante sane. Un'esperienza

(¹) I° Theil, pag. 418. *Pflanzeninfection.*

così condotta non poteva dare che prove di un'esistenza o meno di un potere battericida fisiologico, simile a quello che talora si riscontra nel sangue degli animali, ma non poteva certo servire a tirare delle conclusioni sull'esistenza di sostanze « simili alle antitossine », che, come è noto, non si formano che sotto lo stimolo della infezione invadente.

Una analoga obbiezione si può muovere alla seconda esperienza, giacche nel caso descritto evidentemente non si poteva parlare di vere infezioni della pianta, tali da determinare reazione.

Vediamo ora ciò che si sa relativamente all'unico mezzo di difesa che comunemente si ammette nelle piante, l'integrità cioè dei tegumenti, e che valore abbia questa difesa.

Senza dubbio i tegumenti illesi costituiscono per le piante, come per gli animali, un validissimo elemento protettore. Per quanto sappiamo, nessun *B.* è capace di attraversare la scorza sana di una pianta, provocandovi un'infezione. Io ho ripetutamente tentato di provocare la rogna nell'ulivo, spalmando dei rami sani con culture pure di *B. O.* ma ho avuto sempre risultati negativi, mentre, come si sa, basta ferire con un ago infetto un ramoscello di ulivo per vedervi poco dopo un tubercolo, contenente in quantità i *B.* caratteristici. Le ferite che in gran numero si producono nelle piante allorchè si sbattono le ulive, sono tante porte aperte alla infezione: lo stesso probabilmente succede per le punture degli insetti. Il prof. Arcangeli ha osservato nei Monti Pisani, cosa che ho potuto notare anch'io, che dopo una grandinata si verifica un notevole aumento nella malattia: di più in questi casi i tubercoli sono tutti disposti sulla parte del ramo rivolta in alto, giacchè lì appunto la grandine ha potuto produrre le lesioni che hanno provocato l'infezione.

Una sicura difesa delle piante si trova anche nel tegumento delle radici. Ellrodt [1] ha dimostrato che innaffiando con diversi bacilli delle piante di avena, fagioli, iris, ecc., non si riscontravano mai nei tessuti della pianta i microorganismi, che invece vi si trovavano numerosi se artificialmente si produceva una ferita nelle radici.

I fatti che ho fin qui riportato riguardano la resistenza all'ingresso delle batteriacee di tessuti meccanicamente assai forti, come i tegumenti del fusto e della radice. Vi sono però nelle piante delle parti che non sono ricoperte da tegumenti protettori così efficaci. Nelle foglie, per esempio, abbiamo una grande quantità di stomi, che danno liberamente accesso alle cellule dei tessuti elaboratori, generalmente assai poco resistenti. Il fiore presenta anche esso un tegumento assai debole, e come risulta da svariate esperienze, stomi e fiori, ancorchè perfettamente normali, possono servire di via di ingresso alle infezioni batteriche. Così il *B. Amylovorus* (Burril) attacca parecchie varietà di pere, spargendone le culture pure sui fiori. E. Smith [2], descrive una malattia di un pruno giapponese, dovuto ad bacillo giallo, lo *Pseudomonas Pruni.* Questo microorganismo entra abitualmente nella pianta attraverso gli stomi; da principio si trova limitato alle camere substomatiche, ma presto si diffonde

(1) *Ueber das Eindringen von Bakt. in Pflanzen. Centralbl. f. Bakt.*, II, IX, 1902, pag. 639.
(2) *Observations a hiterto unreported Bakterial disease*, ecc. Science, N. S. XVIII, 1903, pag. 496.

nei tessuti, attaccando poi anche i fasci, e producendovi notevoli cavità. Simili resultati si sono avuti in altri casi di infezioni in altre piante. Russel [1] e Smith [2] hanno inoltre dimostrato che lo *Pseud. Campestris* può infettare il cavolo attraverso i pori acquiferi, e Waite ha osservato che una malattia del pero si propaga attraverso i nettarii. Da queste numerose esperienze possiamo concludere che una pianta, ancorchè perfettamente sana, offre delle porte aperte alle infezioni batteriche nei punti non protetti da un solido inviluppo meccanico.

Kornauth [3] ha studiato il modo di contenersi di diverse specie batteriche, non patogene per le piante, introdotte nei tessuti vegetali. Ha inoculato varie specie nel bulbo del giacinto e della cipolla e dopo otto giorni vi ha riscontrato in vita il *B. Anthracis*, *B. Prodigiosus*, *B. Coli* e il *Micrococcus Cinnabareus*, mentre erano morti il *B. Diphteriae*, il *B. Tiphi*, il *Pneumoniae*, lo *Streptococcus pyogenes*. Il *B. Anthracis* aveva sporificato e il *B. Diphteriae* aveva dato forme di involuzione.

Assai più interessante però è il caso di inoculazioni fatte con batteriacee patogene per le piante. Una pianta, entrata che sia nei suoi tessuti, per una ferita o per altro, una batteriacea patogena, non si trova certo in completa balia del microorganismo, ma dispone di diversi mezzi di difesa. Poco è stato fatto relativamente a queste difese organiche delle piante, ed ora esporrò i fatti che ho avuto occasione di osservare nelle infezioni che il *B. O.* produce nelle piante di olivo. Dividerò anzitutto queste difese organiche della pianta in due tipi principali; in difese meccaniche e in difese chimiche.

Difese meccaniche.

Si riscontrano negli ulivi attaccati dalla tubercolosi diversi tipi di difese meccaniche, uno dei quali, molto bello e caratteristico, si può vedere nella figura 1ª. Come si vede si tratta di un tubercolo primitivo, dovuto ad una ferita della scorza: il cambio perciò è intatto. La presenza delle colonie del *B.* ha determinato un discreto tubercolo; possiamo facilmente osservare che nella zona cambiale e nel floema si sono prodotti, nel tratto prospiciente al tubercolo, numerosi elementi sclerosi, fibre e cellule, disposti a palizzata, i quali hanno per effetto la difesa meccanica degli strati profondi contro il progredire della malattia. La formazione di questi elementi è limitata alla zona più prossima al tubercolo, come si vede, e talvolta si osserva che la neoformazione, arrivata a questa palizzata sclerosa, vi ha trovato un ostacolo insormontabile: le cellule del tubercolo si sono suberizzate e necrotizzate, la poliferazione cellulare patologica è cessata, e in altri termini, la pianta è guarita.

(1) Wisconsin, *Experiment. Station.*

(2) Centralbl. f. Bakt. II, Abt B. III.

(3) *Ueber das verhalten patogener Bakt.* in lebenden Pflanzengewebe. Centralbl. f. Bakt. I, XIX, 1896.

Un altro tipo di difesa, simile a questo, consiste nella sclerosi e nella suberificazione che talora si manifesta nelle cellule che limitano le caverne batteriche.

Studiando le infezioni metastatiche dell'ulivo, si ha occasione di osservare una difesa, di cui la pianta dispone nel caso di infezioni metastatiche. Nei vasi in cui sono entrati i bacilli, si nota spesso, ad una certa distanza dal luogo infetto, la presenza di un gran numero di tilli, che chiudono il lume dei vasi, ostacolando così il diffondersi dell' infezione per il vaso stesso (fig. 7ª). Il prof. Arcangeli, in un caso di infezione, probabilmente batterica, della vite, osservò la presenza di tilli nella zona malata, senza per altro attribuirvi nessuna speciale importanza, e similmente diversi altri autori hanno notato la presenza dei tilli nelle regioni malate [1].

Un mezzo di difesa meccanica del resto si può vedere nella formazione del tubercolo. La proliferazione cellulare che si verifica per la presenza del *B* ha per effetto d'allontanare il centro infetto delle zone profonde e vitali della pianta, che diversamente sarebbero più presto e più facilmente distrutte dal parassita.

Difese chimiche.

Negli animali, come è noto, esistono negli organismi infetti delle sostanze nocive per l'agente patogenetico della loro malattia. Pensando che, per analogia, tali sostanze potessero esistere anche nelle piante ammalate, ho cercato di dimostrarne la presenza negli ulivi colpiti dalla tubercolosi. Tali sostanze, a priori, si sarebbero dovute ricercare nei succhi della pianta. Però, nel mio caso, era una grave difficoltà il procurarmi dei succhi di ulivo: pensai perciò di servirmi addirittura di frammenti della pianta. Per vedere dunque se nell'ulivo ammalato esistessero sostanze nocive per il *B. O.*, preparai una cultura in brodo glicerinato di questo *B.*, fatta a 35°, e unifomermente intorbidata. D'altra parte, con un coltello sterilizzato, preparai delle fettine di un rametto ammalato, prese in prossimità di un tubercolo, e le introdussi in tubetto d'assaggio pieno della cultura in brodo di cui ho parlato. Dopo 40 ore osservai che uno strato di brodo di qualche millimetro, alla superficie, si era rischiarato, e che i bacilli si erano riuniti nella parte inferiore del tubetto. Un tubo di controllo, dello stesso brodo, non aveva mostrato nessun cambiamento; un terzo tubo, in cui avevo introdotto dei frammenti di pianta sana, si era parimente conservato inalterato. Ripetei l'esperienza molte volte e così mi accertai della costanza del fenomeno. Questo fatto dimostrava, sebbene grossolanamente, nella pianta malata l'esistenza di una sostanza sfavorevole allo sviluppo del *B. O.* giacchè non solo la cultura in cui si trovavano i frammenti ammalati cessava di crescere, ma i *B.*, perdendo la mobilità, si riunivano nel fondo del tubo. Cercai allora di determinare in quale parte della pianta questa sostanza si trovasse, e per questo preparai 4 tubi di cultura in brodo glicerinato, simili a quelli che mi avevano servito nelle precedenti esperienze. Introdussi in uno dei tubi dei frammenti di scorza, in un altro di legno e nel terzo di midollo di pianta ammalata, e serbai l'ultimo per controllo. Avverto qui che fra i frammenti

[1] *Sul rossore della vite.* Boll. della Soc. Bot. It., 1896, n. 8, pag. 240.

di scorza era compreso anche il floema, giacchè col coltello raschiavo il ramo fino al cambio; questo vale anche per tutte le esperienze di cui in seguito parlerò.

Di più non ho mai usato altro che di frammenti presi in prossimità immediata del tubercolo, escludendo il tubercolo stesso, che contiene grandi quantità di *B. O.* Volevo così evitare di adoperare dei prodotti di ricambio del *B. O.* stesso, che, come abbiam visto, sono a lui novici.

Per questo gli estratti acquosi di cui ora parlerò erano quasi battericamente puri, e non contenevano che prodotti elaborati dalla pianta.

Ritorno ora ai 4 tubi di cui ho cominciato a parlare. Il giorno di poi potei osservare che l' « agglutinazione » dei bacilli era avvenuta solo nel tubo a cui avevo aggiunta della scorza ammalata.

Essendo tecnicamente assai incomodo il metodo da me usato, volli provare se gli estratti acquosi delle due scorze, sana e malata, avessero la stessa azione dei frammenti di quelle. Preparai perciò due estratti acquosi, ottenuti tenendo per 48 ore i frammenti in acqua distillata; li filtrai per carta, e li sterilizzai tenendoli per un'ora a 55°, e ripetendo ogni 24 ore il riscaldamento, per 4 volte. Usando ora, in luogo dei frammenti della pianta, questi liquidi per provocare l'agglutinazione di una cultura in brodo di *B. O.* vidi che il rischiararsi della parte superiore del brodo, che prima richiedeva circa 40 ore, ora si compiva in circa 18 ore, e con maggiore intensità.

Fra la parte inferiore del liquido, ingombrata dalle cellule batteriche, e quella superiore, perfettamente limpida, si vedeva un piano netto di separazione.

Probabilmente la ragione della maggiore attività dell'estr. acq. rispetto ai frammenti di pianta, dipende da questo. La sostanza attiva, contenuta nei frammenti stessi, aveva bisogno di un certo tempo per diffondersi nel liquido, ed esercitare così la sua azione, mentre nel caso dell'estratto acquoso essa, trovandosi già in diffusione o in soluzione del liquido, veniva subito a contatto con tutta la massa dei *B.* sui quali poteva così in poco tempo esercitare la sua azione malefica.

Volendo seguire sotto il microscopio l'andamento dell'agglutinazione dei *B. O.*, feci due preparati in goccia pendente di cultura giovane in brodo, ed aggiunsi a uno una goccia di estr. acq., di pianta sana e dall'altro una goccia di estr. acq., di pianta malata. I bacilli erano egualmente mobili nei due preparati. Dopo 4 ore quelli del 2° preparato (malato) erano quasi tutti immobilizzati. Dopo 20 ore asciugai i due vetrini, li colorai al Ziehl, e li montai in balsamo. I *B.*, cui avevo aggiunto estr. acq. di olivo sano, avevano un aspetto assolutamente normale; assolutamente anormale invece era l'aspetto dei *B.* dell'altro preparato. Essi si trovavano riuniti in grossi ammassi di innumerevoli elementi, addossati fra di loro, e sembravano immersi in una sostanza gelatinosa, poco colorabile; rari erano i *B.* isolati. Inoltre si notavano numerose cellule degenerate, corrose e, certamente morte, che avevano perduta la proprietà di fissare il colore. Tutte queste particolarità sono chiaramente visibili nella fotografia di un preparato di *B.* agglutinati, che trovasi unita a questa Memoria fig. 8ª).

La presenza di tante cellule degenerate o morte nei preparati fatti con estr. acq. malato mi fece pensare che nell'estratto stesso esistesse una vera sostanza battericida, a quanto pare anche batteriolitica.

Per studiare questo fatto preparai un estr. acq. di frammenti di ulivo sano, e uno di frammenti, presi in prossimità dei tubercoli, di ulivo malato. L'estr. acq. sano aveva un colore chiaro, mentre quello malato presentava un colore assai più scuro, che andava col tempo prendendo una tinta sempre più carica; spesso, specialmente se l'estratto acquoso è assai concentrato, esso si intorbida per la formazione di un precipitato bianco pulverulento, che sparisce coll'ebollizione, per riformarsi poi col raffreddamento. Se però si bolle l'estratto appena fatto,-esso non si intorbida mai. L'estr. intorbidato dal precipitato non si rischiara per ripetute filtrazioni per grossa carta da barite. Esaminati col liquido di Fehling, i due liquidi ottenuti, si vede che l'estratto sano non dà che una reazione debolissima, mentre quello malato mostra di contenere notevole quantità di una sostanza riducente (zucchero). La ragione della presenza di questo zucchero nella pianta malata mi è restata per molto tempo oscura. Poi però, come ho già detto parlando dei prodotti formati dal *B. O.*, studiando delle sezioni di tubercolo coll'aiuto dell'iodio, osservai che l'amido, assai abbondante negli altri tessuti, diminuiva nelle vicinanze delle caverne batteriche; ciò mi fece pensare che l'amido stesso venisse attaccato dal *B. O.* e fosse tramutato in zucchero.

Le ricerche dirette sulle sezioni di tubercolo mi dettero resultati assai soddisfacenti, e di più vidi che il *B. O.* fabbricava dello zucchero nei terreni di cultura contenenti amido.

Probabilmente lo zucchero della pianta malata, come ho già accennato, proviene in piccola parte anche dalla cellulosa della pianta, attaccata dai fermenti prodotti dal *B.*, e tramutata in zucchero.

Ritorno ora, dopo questa digressione, ai due estratti acquosi in cui volevo ricercare l'esistenza di un potere battericida. Aggiunsi ai due estr. acquosi un' egual volume di brodo nutritivo ordinario (con peptone di Merk) e seminai in ognuno il contenuto di una piccola ansa di Pt., di cultura in brodo di 24 ore di *B. O* (Metodo delle piastre-Nissen-Buchner). Il tubo con estratto acquoso sano e brodo, che chiamerò per brevità *A.*, si mostrò quasi inalterato, l'altro invece che chiamerò *B.*, formò subito un precipitato giallo, che intorbidava il liquido, e che divenne poi rossastro. Preparai poi due tubi di Agar, fusi a bagno maria, e seminai in uno il contenuto di un'ansa di Pt. del tubo *A.* e nell'altro il contenuto della stessa ansa del tubo *B.* Agitai bene l'Agar e lo versai in una scatola di Petri sterilizzata. Potevo così, dal numero delle colonie che si sarebbero sviluppate nella scatola, sapere quanti *B.* si trovassero nel volume di brodo contenuto nell'ansa, e da quello desumere il numero di *B.* contenuti in tutto il brodo. Siccome nei due tubi avevo introdotto approssimativamente lo stesso numero di bacilli, potevo dal numero delle colonie nate nelle scatole, sapere in quali dei due tubi, se nel sano o nel malato, il *B. O.* si moltiplicava con maggiore intensità.

Collocai i tubi *B.* e *A.* nel termostato a $37\,^1/_2$, e ripetei le scatole Petri, colla tecnica già descritta, dopo 2, $4\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, 24, e 48 ore. Misi le scatole di Petri nel termostato, e a 20 ore di distanza dalle rispettive semine, eseguii il conteggio delle colonie sviluppatesi.

Ebbi i seguenti numeri: (30 marzo 1904).

						Cultura con estratto di parti sane	Cultura con estratto di parti malate
Scatola	eseguita	subito	dopo	la	semina:	8 colonie	6 colonie
»	»	2 ore	»	»	»	48 »	9 »
»	»	$4^1/_2$ »	»	»	»	205 »	47 »
»	»	$7^1/_2$ »	»	»	»	5320 »	18 »
»	»	24 »	»	»	»	innumerevoli	2060 »
»	»	48 »	»	»	»	»	innumerevoli

Da questi numeri vediamo che, mentre nel tubo di brodo in cui era stato introdotto l'estr. acq. di corteccia sana, si ha un costante e regolare aumento nel numero delle colonie del *B. O.* ivi seminato, nell'altro al contrario si ha un manifesto ritardo nel loro sviluppo, ed anzi una vera distruzione di bacilli, tantochè, dopo 7 ½ ore dalla semina, in un'ansa di Pt. di brodo del tubo *A.* sono contenuti 5320 bacilli mentre nello stesso volume di brodo del tubo *B.* non se ne trovano che 18. Dopo 24 ore vediamo che la moltiplicazione dei bacilli ha ripreso energicamente anche nel tubo *B.* Sappiamo infatti che una data quantità di sostanza battericida non ha la sua azione che sopra un determinato numero di elementi batterici. Se questi sono in numero sovrabbondante, essa, esaurendosi, ucciderà quel dato numero di batterii di cui è capace. I rimanenti, trovando il terreno sgombro dalla sostanza battericida, si moltiplicheranno normalmente. In questa esperienza perciò era stato introdotto nei due tubi *A.* e *B.* un numero di bacilli troppo grande, rispetto alla quantità di sostanza battericida contenuta in *B.*

Se fosse stato usato un minor numero di *B.*, forse si sarebbe ottenuto la sterilizzazione del tubo *B.* Per vedere se fosse possibile ottenere questo resultato, ripetei la esperienza, usando nelle seminagioni di un'ansa di Pt. assai piccola. Eseguii, colla tecnica già descritta, le scatole di Petri, e alla 20ª ora dalla semina eseguii il conteggio (4 maggio 1904) ottenendo questi numeri:

						Cultura con estratto di parti sane	Cultura con estratto di parti malate
Scatola	eseguita	subito	dopo	la	semina:	0 colonie	2 colonie
»	»	2 ore	»	»	»	24 »	15 »
»	»	4 »	»	»	»	170 »	20 »
»	»	$6^1/_2$ »	»	»	»	2600 »	9 »
»	»	8 »	»	»	»	4500 »	sterile

Questa volta, come si vede, la sostanza battericida contenuta nel tubo malato ha ucciso tutti i bacilli che vi erano seminati, mentre nel tubo con estr. acq. di pianta sana vi era un regolare e forte aumento nel loro numero. Uguale risultato si ottenne un'altra volta, usando di estratti acquosi assai concentrati: si ebbe la sterilizzazione del tubo con estratto malato alla settima ora.

Nel giugno, volendo ripetere una serie di conteggi di piastre, nel recipiente in cui preparavo l'estr. acq. di pianta malata, che sappiamo contenere dello zucchero, si manifestò una attivissima fermentazione. Ricominciai perciò la preparazione dell'estratto, sterilizzando subito l'acqua insieme ai frammenti, per mezzo di una esposizione di 2 ore alla temperatura di 56 gradi. Ripetei, nei 4 giorni seguenti, la sterilizzazione.

L'estratto acquoso malato era fortemente intorbidato. Aggiunsi, decantando, i due estratti acquosi ad uguali volumi di brodo comune. L'estratto malato al solito, provocò, più di quello sano, un precipitato giallo nel brodo; questo precipitato dopo 24 ore diventò rossastro. Seminai in ciascuno dei due tubi di cui ho parlato un'ansa di Pt. di cultura di brodo di *B. O.*, e colla tecnica già descritta, feci delle scatole di Petri, dopo 2, 5, 8, e 24 ore dalla seminagione dei due tubi. Le scatole tenute a 34 gradi, mostrarono dopo 20 ore le seguenti colonie (4 luglio 1904).

	Culture con estratto di parti sane	Culture con estratto di parti malate
Scatole eseguite 2 ore dopo la semina:	18 colonie	10 colonie
» » 5 » » » »	208 »	1 »
» » 8 » » » »	1095 »	8 »
» » 24 » » » »	innumerevoli	innumerevoli

Anche questa volta dunque, il numero del *B.*, in continuo e regolare aumento nel tubo sano, si è mostrato nel tubo malato in decrescenza nelle prime ore. In seguito poi, come altra volta si è visto, si è avuto un rapido sviluppo di *B.* anche in questo tubo. Questa ripresa dei *B.* dopo un certo tempo, nelle culture fatte in presenza di una sostanza battericida, è stata osservata, in svariati casi, da diversi autori. Il prof. Max Neisser (¹), tra gli altri, ha osservato questo fenomeno ricercando le proprietà battericide di alcuni sieri. Egli ha talora ottenuto la sterilizzazione delle culture, e talora un rapido decrescere del numero dei bacilli che, ad un certo punto, hanno ripreso a moltiplicarsi rigogliosamente. Analogamente perciò a quanto abbiamo visto succedere in queste ricerche sulle proprietà battericide dell'ulivo malato.

I tubi di brodo ed estratto acquoso, rispettivamente sano e malato, che usavo in queste esperienze, seminandovi il *B. O.* e seguendone lo sviluppo, hanno sempre mostrato delle grandi differenze culturali, a seconda se erano preparati con estratto acquoso sano o malato. Le culture in brodo e estratto acquoso sano hanno sempre avuto il normale aspetto delle culture in brodo semplice, invece quelle in brodo ed estratto acquoso malato hanno, come aspetto culturale, mostrato delle notevoli anomalie, fornendo così un valido controllo al metodo dei conteggi delle piastre. Nella prima esperienza il velo non si cominciò a formare in questo tubo che alla 48ª ora, mentre nel brodo normale si forma dopo 18 ore. Nella seconda il velo non si formò mai, e il brodo restò sempre limpido. Difatti, come si è visto, in questa esperienza

(¹) *Die Metodik des bactericiden Reagenzglasversuches.* Ehrlich. Arbeiten Zur Immunitätsforschung.

si ebbe la sterilizzazione del brodo verso l'8ª ora. Nell'ultima esperienza il velo non si cominciò a formare che alla 36ª ora.

Le esperienze sopradescritte ci inducono ad ammettere nell'ulivo attaccato dal *B. O.* la presenza di una sostanza nociva per il *B.* stesso. Questa sostanza forse è, analogamente a quanto si riscontra generalmente negli animali, una albumina. Ad ogni modo pochi istanti di ebollizione distruggono nell'estratto acquoso della pianta malata ogni potere battericida, il che farebbe pure pensare alla natura albuminoidea della sostanza battericida.

Stabilita così nella pianta l'esistenza di un potere agglutinante e di un potere battericida (se pure i due fenomeni, agglutinazione e potere battericida, non sono dovuti alla stessa causa), vediamo ripetersi, in linea generale, nelle piante gli stessi processi di difesa che già si conoscono negli animali.

Probabilmente tali sostanze di difesa si potranno riscontrare anche nelle piante attaccate da veri funghi (*Phitophtora*, *Botritis*). È noto infatti che questi fungilli si servono di diastasi, simili a quelle prodotte dalle batteriacee, per attaccare l'ospite; dato dunque lo stesso mezzo di offesa, non è improbabile che la pianta disponga degli stessi mezzi di difesa.

Si potrebbe ora pensare di approfittare della presenza di queste sostanze di difesa nei vegetali, per tentare un sistema curativo, o preventivo, che corrispondesse alla sieroterapia o alla vaccinazione degli animali. Credo però che questo sistema di cura, a parte altre gravi difficoltà, urterebbe in uno scoglio, a priori, assai grave. E credo che sia la mancanza di un attiva circolazione, simile alla circolazione del sangue, dei succhi delle piante. Negli animali, grazie alla attiva circolazione, una sostanza, introdotta nel sangue, è rapidamente diffusa in tutto l' organismo, nel quale può così far risentire i suoi effetti: un fatto analogo non può certo avvenire facilmente in una pianta.

Queste idee sono convalidate dal fatto che la produzione della sostanza battericida, a quanto pare, è limitata alle zone vicine ai tubercoli. Non posso però per ora asserire nulla di preciso sulla localizzazione del potere battericida nell' ulivo malato, mancandomi un sufficiente numero di osservazioni in proposito.

Nel 1901 sono apparsi due lavori, dai quali risulta che è riuscita una vera vaccinazione della pianta. Il primo lavoro è del Beauverie [1]. Egli ha ottenuto delle forme attenuate di *Botrytis*, con cui ha provocato delle leggere infezioni in giovani pianticelle di Begonia. Dopo queste leggiere infezioni, le piantine erano immunizzate verso le forme più virulenti dello stesso parassita.

L'altro lavoro è del Ray [2] che ha isolato un *B.*, il *B. putrefaciens*, che attacca le giovani pianticine di grano. Ha ottenuto di questo parassita delle forme attenuate, con cui ha infettato delle giovanissime pianticine di grano, avena, fagiuoli, ecc., fatte nascere in soluzioni nutritive sterilizzate. Tali piantine si mostravano poi resistenti agli attacchi delle forme virulenti del *B. putrefaciens*.

(1) *Essais d'immunisation des végéteaux contre les maladies cryptogamiques.* C. R. Acad. des Sc., Paris, giugno 1901.

(2) *Les maladies cryptogamiques des végétaux.* Rév. Gén. des Bot., 1901, pag. 145.

In questi due casi la vaccinazione della pianta è riuscita, ma bisogna notare che si trattava di giovanissime piante, ricche di umori, costituite di cellule a sottili parete, e prive di elementi sclerosi o lignificati. In questi casi speciali può essere possibile la diffusione di una sostanza attiva in tutto il piccolo organismo. — Ben diverso però è il caso di una pianta adulta, grossa, e costituita in gran parte da cellule lignificate. Vediamo infatti che le infezioni date dal *B. O.* non conferiscono nessuna speciale immunità alla pianta: ogni anno, sulla stessa pianta, vediamo crescere il numero dei tubercoli, in parte metastatici. Questo continuo ripetersi di nuove infezioni non succederebbe, se i vecchi attacchi avessero conferito una qualsiasi immunità alla pianta intera.

Nelle piante poi esiste una vera immunità naturale verso certe infezioni. Non solo il *B. O.* non attacca altro che gli ulivi, ma ne attacca di preferenza solo alcune varietà. Le più delicate sono le più colpite, mentre l'olivastro ha immunità naturale relativa verso i suoi attacchi.

Riassumendo, dalle osservazioni che ho fin qui esposto credo di poter concludere:

I. — Il *Bacillus Oleae* è un bacillo aerobio, politricato e sporigeno, questa circostanza è importante per la questione della diffusione della malattia, giacchè abbiamo visto che si tratta di spore resistentissime che possono in qualunque modo, trasportare l'infezione a distanza.

II. — I tubercoli primitivi, dovuti ad infezioni entrate direttamente per una ferita, possono dar luogo a tubercoli metastatici.

III. — Il *B. O.* produce, tra l'altro, un fermento che converte in zucchero l'amido della pianta. A questa sottrazione di amido, con ogni probabilità, è dovuto il deperimento della pianta.

IV. — La pianta malata dispone di diversi mezzi di difesa meccanica. Queste difese consistono in sclerosi, suberificazioni, formazioni di tilli ecc.

V. — Un estratto acquoso di frammenti di pianta malata determina nelle culture in brodo del *B. O.* una specie di agglutinazione. Nel detto estratto si riscontra la presenza di sostanze battericide e batteriolitiche.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tav. I. Fig. 1ª. Tubercolo primitivo: in corrispondenza del tubercolo, nella zona cambiale, si vedono le fibre sclerose neoformate. Trasversale. 31 diam.

» Fig. 2ª. Vecchio tubercolo primitivo. Comincia il disfacimento del legno, prevalentemente lungo i raggi midollari. Trasversale. 21 diam.

» Fig. 3ª Vecchio tubercolo primitivo. Sez. del ramo al punto d'inserzione del tubercolo (asportato). L'alterazione ha preso la via dei fasci e ne segue il corso. Longitudinale. 18 diam.

» Fig. 4ª. Inizio di metastasi. La caverna si è formata tra lo xilema e il midollo. Si vede che la proliferazione cellulare si inizia per setti trasversali delle cellule, orientati tangenzialmente al centro infetto. Si è formato un tessuto cambiforme. La scorza è ancora normale. Si vede che davanti al centro infetto sono diminuiti nel legno i vasi a grosso lume. Trasversale. 41 diam.

Tav. II. Fig. 5ª. *B. O.* Con spore nell'interno. Brodo 5 giorni. Metodo descritto nel testo. 2000 diam.

» Fig. 6ª. *B. O.* Cultura in brodo. 5 giorni. Sporificata. Metodo descritto nel testo. Balsamo. 1500 diam.

» Fig. 7ª. Bacilli e tilli nei vasi. 525 diam.

» Fig. 8ª. *B. O.* agglutinati. Cultura in brodo 24 ore. 20 ore dopo l'aggiunta di estr. acq. di pianta malata. Numerosi elementi degenerati. Fuxina fenicata. Balsamo 1500 diam.

Fotografie ottenute cogli obbiettivi 35 mm. e 70 mm. di Koristka. I forti ingrandimenti coll'obbiettivo 1/12" imm. om. Strumenti di proprietà dell'Istituto di patologia generale della R. Università di Pisa.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

FOTOT. DANESI - ROMA

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

FOTOT. DANESI ROMA

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 12°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 1°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — ***Roma, Torino** e **Firenze.***
ULRICO HOEPLI. — ***Milano, Pisa** e **Napoli.***

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCII

SERIE QUINTA — VOLUME V — FASCICOLO VII.

ERNESTO PASCAL

RICERCHE

SULLA

SESTICA BINARIA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

Ricerche sulla sestica binaria.

Memoria del Corrispondente ERNESTO PASCAL

presentata nella seduta del 2 aprile 1905.

In alcune recenti pubblicazioni [1] ho stabilito dei teoremi che nel loro complesso vengono a costituire la teoria invariantiva generale dei casi di molteplicità relativi ad una forma binaria, e ne ho fatta anche l'applicazione alla binaria del 5° ordine.

Si tratta di trovare la costruzione generale dei covarianti e invarianti il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè la forma presenti l'uno o l'altro dei casi di molteplicità, non restando escluso naturalmente che in singoli casi speciali le condizioni possano essere espresse in modi diversi e anche più semplici; ma questi sono allora trovati con metodi e considerazioni variabili da caso a caso, anzichè essere dedotti da teoremi generali che valgano per qualunque binaria.

Lo scopo di questa Memoria è di fare l'applicazione della suddetta teoria al caso della sestica binaria, calcolando per questa tutti quei covarianti e invarianti, che non sono stati ancora calcolati, e che servono, secondo i suddetti principii generali, a trovare i teoremi relativi all'esistenza di fattori multipli nella sestica.

Dell'argomento dei fattori multipli della sestica si occuparono già Maisano [2] e, in parte, Brioschi [3], ma naturalmente con metodi diversi da quelli che noi adopereremo, ed in molti casi il paragone fra i risultati nostri e quelli di questi Autori può essere interessante, e fecondo di conseguenze.

La sestica, a differenza di altre forme, presenta alcune singolarità che, dal nostro punto di vista, sono degne di nota; così p. es. per essa l'annullarsi del covariante Θ (che è quel covariante il cui annullarsi corrisponde all'esistenza di un fattore qua-

(1) Pascal, *Sulle condizioni invariantive perchè due binarie abbiano più fattori comuni*, Rend. Ist. Lomb. (2), t. 37, 1904, pag. 917; *Teoremi sulle forme binarie a fattori multipli* ecc., ibid., pag. 980; vedi anche: *Sul sistema di Gundelfinger* ecc., ibid., pag. 1010; *Sulle condizioni invariantive perchè una biquadratica abbia per fattore una cubica*, ibid., t. 38, 1905, pag. 201.

(2) Maisano, *La sestica binaria*, Memorie dell'Accad. dei Lincei, (3), t. 19, 1884 (v. il Cap. V della Memoria).

(3) Brioschi, *Sur les racines multiples des équations algébriques*, Comptes Rendus de l'Acad. des sc. de Paris, t. 121, 1895, 2me sém., pag. 582.

dratico doppio) può essere surrogato dall'annullarsi di *due* invarianti di gradi più elevati, cosa che non può dirsi che si verifichi in generale per una forma qualunque, come p. es. non ha luogo per la forma di 4° ordine.

§ 1. — *Preliminari.*

I covarianti che dobbiamo costruire per lo scopo propostoci sono quelli indicati con Θ, Φ, Ψ, Ξ nella Nota sui fattori multipli di una binaria, e che nel nostro caso sono rispettivamente di gradi e ordini (in ciascuna variabile) 8, 6, 4, 2; il primo ad una sola variabile, il secondo a due variabili, il terzo a tre, ed il quarto a quattro variabili cogredienti.

Del Φ però ci basterà di costruire solo i covarianti elementari di ordine 0 e 12 che indicheremo con Φ_0 e Φ_{12}; del Ψ solo i covarianti elementari di ordine 0, 8, 12, Ψ_0, Ψ_8, Ψ_{12}; e in quanto al Ξ, i suoi covarianti elementari sono immediatamente noti, perchè dovendo la Ξ essere di 2° grado, essi non possono essere che rispettivamente

$$\Xi_0 = (f, f)^6 = \mathrm{A}, \quad \Xi_4 = (f, f)^4 = i, \quad \Xi_8 = (f, f)^2 = \mathrm{H},$$

se f è la sestica.

Lo Steineriano S di cui abbiamo trattato nel § 2 della suddetta Nota, è stato per la sestica già calcolato da Maisano ([1]); esso è dello stesso grado e ordine di Θ, e noi in seguito per il calcolo di Θ ci serviremo spesso di alcune formole stabilite da Maisano nel suddetto lavoro.

Come conseguenza dei risultati da noi ottenuti nella suddetta Nota, i varî casi di molteplicità relativi alla sestica binaria si presentano determinati dalle seguenti condizioni, tutte espresse mediante Θ, Φ, Ψ, Ξ:

1. *Due fattori lineari doppi*: $\Theta = 0$.

2. *Tre fattori lineari doppi*: $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$.

3. *Un fattore lineare triplo*: $\Theta = 0$, $\Phi_0 = 0$, $\Phi_{12} \neq 0$, *ovvero solamente*: $\mathrm{S} = 0$.

4. *Un fattore lineare triplo e uno doppio*: $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_0 = 0$, $\Psi_8 \neq 0$.

5. *Un fattore lineare quadruplo*: $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_8 = 0$, $\Psi_{12} \neq 0$.

6. *Un fattore lineare quadruplo ed uno doppio*: $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_{12} = 0$, $\Xi_0 = 0$, $\Xi_8 \neq 0$ ([2]).

([1]) Maisano, *Die Steiner'sche Covariante der binären Form 6ter Ordnung*, Math. Ann., t. 31, pa. 493-506.

([2]) Le condizioni per questo caso derivano dalle considerazioni del § 3 della Nota sui fattori comuni a due binarie (Rend. Ist. Lomb. (2), t. 37, 1904, pag. 926). Per il caso suindicato le due derivate prime della f devono avere in comune una biquadratica γ con un fattore lineare triplo, per la quale è perciò l'invariante i eguale a zero; ed essendo per tal caso $m + n = 10$, si ha appunto $\Xi_0 = 0$; d'altra parte le tre condizioni $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_{12} = 0$ danno già (per il teor. IV della stessa Nota) che le due derivate di f hanno una biquadratica γ in comune, di cui i fattori lineari non possono essere tutti disuguali (perchè f dovrebbe allora avere quattro fattori doppii disuguali

7. *Un fattore lineare quintuplo*: $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_{12} = 0$, $\Xi_4 = 0$, $\Xi_8 \neq 0$.
8. *Due fattori lineari tripli*: $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_{12} = 0$, $\Xi_0 \neq 0$, $\Xi_4 \neq 0$.
9. *Un fattore lineare sestuplo*: $\Xi_8 = 0$.

Queste sono le condizioni quali risultano immediatamente dai nostri teoremi generali (meno per l'ultimo caso, il 9), ma naturalmente per ciascun caso, alcune di esse possono essere conseguenze delle altre, ovvero da esse possono dedursi delle altre condizioni di forma più semplice e facile; ciò esamineremo nei paragrafi seguenti. Per il caso 9, abbiamo fatta sin da ora la riduzione, la quale risulta da un ben noto teorema riguardante l'Hessiano di una forma, Hessiano che nel nostro caso è appunto $\Xi_8 \equiv H$.

Passiamo pertanto alla determinazione del covariante Θ, determinazione che vogliamo fare con due metodi, l'uno fondato sulle formole trovate da Gordan relative alla formazione del Θ di due quintiche, e l'altro analogo ai metodi da noi tenuti nei lavori precedenti.

In quanto alle notazioni relative al sistema completo della sestica adotteremo quelle di Clebsch (*Theorie der bin. algeb. Formen*, Leipzig, 1872, pag. 296) che sono quelle adoperate anche da Maisano nei lavori succitati.

Delle forme del sistema completo della sestica $f = a_x^6 = b_x^6 = c_x^6 = \cdots$ non ci occorrono del resto che solo quelle del seguente quadro (in cui rappresenteremo con (h, k) una forma di h^{mo} grado e k^{mo} ordine):

$H = (f, f)^2$	$(2, 8)$	$\Delta = (i, i)^2$	$(4, 4)$
$i = (f, f)^4$	$(2, 4)$	$B = (i, i)^4$	$(4, 0)$
$A = (f, f)^6$	$(2, 0)$	$m = (i, l)^2$	$(5, 2)$
$p = (f, i)^2$	$(3, 6)$	$C = (i, \Delta)^4$	$(6, 0)$
$l = (f, i)^4$	$(3, 2)$	$n = (i, m)^2$	$(7, 2)$

Invece dell'invariante C adopereremo poi l'altro invariante del medesimo grado indicato da Clebsch con A_{ll} e che è dato da

$$A_{ll} = (l, l)^2;$$

fra i due sussiste la nota relazione

$$A_{ll} = 2C + \tfrac{1}{3} AB.$$

e quindi dovrebbe essere almeno di 8° ordine); il discriminante di γ deve perciò essere zero, ed essendo poi $i = 0$ (i essendo l'invariante di 2° grado di γ), per effetto di $\Xi_0 = 0$ $\Xi_8 \neq 0$, si ha anche $j = 0$, e quindi γ ha un fattore lineare triplo.

Se invece poniamo $\Xi_4 = 0$, $\Xi_8 \neq 0$, abbiamo che l'Hessiano di γ deve essere zero, e quindi γ deve essere una quarta potenza esatta, e f avrà un fattore quintuplo; e se infine poniamo che nessuno dei tre Ξ sia zero, la biquadratica γ sarà il quadrato di una quadratica, ed f il quadrato di una cubica. Altri casi non sono possibili perchè f è solo di 6° ordine. Si hanno così i tre casi indicati di sopra coi numeri 6, 7, 8.

§ 2. — *Primo metodo per la determinazione del Θ di una sestica.*

Il Θ della sestica f è il covariante Θ relativo alle due forme di quint'ordine che rappresentano le due derivate prime di f. Ora per il Θ di due quintiche il Gordan [1] ha trovato la espressione generale che qui riporteremo, interpretata per il caso in cui le due forme sieno le due derivate prime di f.

Posto:

$$(1)\quad \begin{cases} \rho = \frac{5}{2}(f,f)^2 = \frac{5}{2}\mathrm{H}, \\ \sigma = \frac{5^2}{2^3.3}(f,f)^4 = \frac{5^2}{2^3.3}i, \\ \tau = \frac{5}{2.3}(f,f)^6 = \frac{5}{2.3}\mathrm{A} \end{cases}$$

e

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \quad (\rho,\rho)^4 + \frac{3}{7}(\rho,\sigma)^2 - \frac{1}{10}\rho\tau - \frac{18}{49}\sigma^2 \\ \mathfrak{B} = -(\rho,\sigma)^3 \\ \mathfrak{C} = -\frac{2}{7}(\rho,\rho)^6 - \frac{1}{49}(\rho,\sigma)^4 - \frac{27}{343}(\sigma,\sigma)^2 + \frac{9}{70}\sigma.\tau \\ \mathfrak{D} = \quad (\rho,\rho)^6 - \frac{3}{7}(\rho,\sigma)^4 + \frac{45}{49}(\sigma,\sigma)^2 - \frac{3}{10}\sigma\tau \\ \mathfrak{E} = \quad \frac{1}{30}(\rho,\rho)^8 - \frac{3}{70}(\sigma,\sigma)^4 - \frac{1}{100}\tau^2 \end{cases}$$

si ha

$$(3)\quad \begin{aligned} \Theta = &-(\mathfrak{A},\mathfrak{A})^4 - 2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})^3 - 2(\mathfrak{A},\mathfrak{C})^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \\ &+ \frac{3}{4}(\mathfrak{B},\mathfrak{B})^2 + (\mathfrak{B},\mathfrak{C}) + \frac{1}{6}(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{C}^2). \end{aligned}$$

Colle formole note [2]:

$$(4)\quad \begin{cases} (\mathrm{H},\mathrm{H})^4 = \quad \frac{2}{3.7}lf + \frac{5^2}{2.3.7^2}i^2 - \frac{1}{3.5}\mathrm{AH} \\ (\mathrm{H},\mathrm{H})^6 = \quad \frac{1}{2.3.7}\mathrm{A}i + \frac{2.5}{7^2}\Delta \\ (\mathrm{H},\mathrm{H})^8 = -\frac{5}{7}\mathrm{B} + \frac{2}{3.5}\mathrm{A}^2 \\ (\mathrm{H},i)^2 = \quad \frac{1}{2.3}fl - \frac{5}{2.3.7}i^2 \\ (\mathrm{H},i)^3 = -\frac{1}{2}(f,l) \\ (\mathrm{H},i)^4 = \quad \frac{2}{7}\Delta + \frac{2}{3.5}\mathrm{A}i \end{cases}$$

(1) Gordan, *Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen*, Math. Ann., t. 3, p. 385.
(2) Vedi Maisano, *Sest. binaria* (cit.), formole (69), (70), (71), (65), (66), (67).

si trovano i valori:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \frac{5}{2^5}(5fl - 4\,\mathrm{A}\,\mathrm{H}) \\ \mathfrak{B} = \frac{5^3}{2^5.3}(f, l) \\ \mathfrak{C} = \frac{5^3}{2^6.3^2.7}(2\,\mathrm{A}i - 15\Delta) \\ \mathfrak{D} = \frac{5^2}{2^6.3}(-2\,\mathrm{A}i + 15\Delta) \\ \mathfrak{E} = \frac{1}{2^7.3}(-75\,\mathrm{B} + 8\,\mathrm{A}^2) \end{cases}$$

Si tratta ora di calcolare le spinte di queste forme (5) fra loro, e per ciò ci serviremo, con opportuni artifizi, di alcune formole stabilite da Maisano nel suo citato lavoro sullo Steineriano di una sestica.

Introduciamo, come fa Maisano, le seguenti formazioni che considereremo nelle sole variabili y:

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda_y^4 = (xy)\,(al)\,a_y^3\,a_x^2\,l_x \\ \mu_y^4 = (xy)^2\,i_x^2\,i_y^2 \\ \nu_y^4 = (xy)^2\,\Delta_x^2\,\Delta_y^{2\prime} \end{cases}$$

e formiamo le quarte spinte, in rapporto alle sole y, di queste forme fra loro e colle forme $a_y^4\,a_x^2$, $\mathrm{H}_y^4\,\mathrm{H}_x^4$. Le spinte delle (6) fra loro sono calcolate in Maisano (*Steiner'sche Covar.* etc. cit., pp. 501-502) e sono:

$$(7)\quad \begin{cases} (\lambda, \lambda)^4 = \frac{1}{4}\mathrm{B}fl - \frac{1}{4}\mathrm{A}pl - \frac{3}{8}il^2 + \frac{3}{8}\mathrm{A}_u\mathrm{H} \\ (\lambda, \mu)^4 = -\frac{1}{4}pl - \frac{1}{2}i\Delta - \frac{1}{12}\mathrm{A}i^2 + \frac{1}{4}fm \\ (\lambda, \nu)^4 = -\frac{1}{8}il^2 - \frac{1}{24}\mathrm{B}fl - \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{12}\mathrm{A}i\Delta + \frac{1}{4}fn \\ (\mu, \mu)^4 = \frac{1}{6}i^2 \\ (\mu, \nu)^4 = \frac{1}{6}i\Delta \\ (\nu, \nu)^4 = \frac{1}{6}\Delta^2 \end{cases}$$

e le altre, tenendo conto di formole che si trovano quà e là nei due citati lavori di Maisano, sono:

$$(8)\quad\begin{cases}(a\,,\lambda)^4 = -(al)(ab)^3\, a_x^2 b_x^3 l_x = -\frac{1}{2}il\\ (a\,,\mu)^4 = \quad p\\ (a\,,\nu)^4 = \quad (a\,,\varDelta)^2 = \frac{1}{2}il - \frac{1}{6}\mathrm{B}f\ (^1)\\ (\mathrm{H}\,,\lambda)^4 = -(al)(a\mathrm{H})^3\, a_x^2 l_x \mathrm{H}_x^5 = \frac{3}{7}pl - \frac{1}{12}\mathrm{A}fl - \frac{1}{7}i\varDelta - \frac{1}{42}\mathrm{A}i^2 + \frac{1}{14}fm\\ (\mathrm{H},\mu)^4 = \quad (\mathrm{H}\,,i)^2 = \frac{1}{6}fl - \frac{5}{42}i^2\\ (\mathrm{H}\,,\nu)^4 = \quad (\mathrm{H}\,,\varDelta)^2 = \frac{1}{18}\mathrm{A}i^2 + \frac{3}{14}i\varDelta - \frac{1}{6}pl\end{cases}$$

Partendo ora dalla formola di Maisano [*Steiner'sche Covar.* etc., form. (28)]

$$(9)\qquad [fl]_{y^4} = a_y^4\, a_x^2\, l_x^2 + \lambda_y^4 + \frac{3}{7}\nu_y^4 + \frac{1}{14}\mathrm{A}\,\mu_y^4$$

in cui col simbolo del primo membro intendiamo la 4ª polare, di polo y, del prodotto fl, possiamo facilmente calcolare le quarte spinte di fl su sè stessa e su H, e si ha:

$$(10)\quad (fl\,,fl)^4 = il^2 + (\lambda\,,\lambda)^4 + \frac{9}{49}(\nu\,,\nu)^4 + \frac{1}{196}\mathrm{A}^2(\mu\,,\mu)^4 + 2(a\,,\lambda)^4.l +$$

$$+\frac{6}{7}(a\,,\nu)^4\, l + \frac{1}{7}\mathrm{A}l(a\,,\mu)^4 + \frac{6}{7}(\lambda\,,\nu)^4 + \frac{1}{7}\mathrm{A}(\lambda\,,\mu)^4$$

$$+\frac{3}{49}\mathrm{A}(\nu\,,\mu)^4$$

$$= \frac{3}{2.7}fn + \frac{3}{2^3}\mathrm{A}_u\mathrm{H} + \frac{1}{2^2.7}\mathrm{A}fm + \frac{1}{2.7}\mathrm{B}lf -$$

$$-\frac{3.13}{2.7^2}\varDelta^2 - \frac{13}{2^3.3.7^2}\mathrm{A}^2 i^2 - \frac{13}{2.7^2}\mathrm{A}i\varDelta - \frac{1}{7}\mathrm{A}pl - \frac{3}{2^3.7}l^2 i$$

$$(11)\quad (fl\,,\mathrm{H})^4 = \frac{1}{2.7}fm + \frac{13}{2.3.5.7}\mathrm{A}fl - \frac{5}{2^2.3.7^2}\mathrm{A}i^2 - \frac{5}{2.7^2}i\varDelta - \frac{5}{2.7}pl$$

Dobbiamo ora calcolare la *terza* spinta di fl su $(f\,,l)$, e le *seconde* su i e $\varDelta$. Per ciò fare ci serviremo del seguente artifizio.

Dalla formola (27) loc. cit. di Maisano [scambiando x con y, moltiplicando per (xy) e introducendo le (6)] può dedursi subito la seguente:

$$(12)\qquad (xy)\,[(f,l)]_{y^3} = \lambda_y^4 + \nu_y^4 + \frac{1}{6}\mathrm{A}\,\mu_y^4\,.$$

(¹) Questa formola con un errore di segno si trova in Clebsch, *Bin. Form.*, pag. 294; per la correzione v. Stephanos, Compt. Rendus, t. 96, pag. 234, e Maisano, *Sest. bin.* (cit.), pag. 12.

Ora la *quarta* spinta (nelle y) dei primi membri di (9) e (12) corrisponde esattamente, come si vede, alla *terza* spinta di fl su (f, l); onde possiamo calcolare tale spinta servendoci sempre delle stesse formole relative alle λ, μ, ν.

Abbiamo:

$$(13)\qquad (fl, (f, l))^3 = \frac{5}{2.7} fn + \frac{3}{8} A_u H + \frac{5}{4.3.7} A fm + \frac{1}{2.3.7} B fl - \\ - \frac{3^2}{2.7} \Delta^2 - \frac{1}{2^3.7} A^2 i^2 - \frac{3}{2.7} A i\Delta - \frac{1}{7} A pl - \frac{31}{2^3.7} l^2 i.$$

In quanto alle seconde spinte di fl su i e Δ, esse possono trovarsi osservando che sono eguali alle quarte spinte (nelle y) fra $[fl]_{y4}$ e $(xy)^2 i_x^2 i_y^2$ ovvero $(xy)^2 \Delta_x^2 \Delta_y^2$ cioè fra $[fl]_{y4}$ e μ o ν, onde anche il calcolo di queste lo riduciamo all'uso delle solite formole (7):

$$(14)\qquad \begin{cases} (fl, i)^2 = \frac{1}{2^2} fm - \frac{1}{2.7} A i^2 - \frac{3}{7} i\Delta + \frac{3}{2^2} pl \\ (fl, \Delta)^2 = \frac{1}{2^2} fn - \frac{5}{2^3.3} B fl - \frac{3}{7} \Delta^2 - \frac{1}{2.7} A i\Delta + \frac{3}{2^3} l^2 i. \end{cases}$$

Con simili artifizi calcoleremo le altre spinte

$$((f,l), H)^3 \quad , \quad ((f, l), (f, l))^2 \quad , \quad ((f, l), i) \quad , \quad ((f, l), \Delta),$$

osservando che si hanno le formole identiche:

$$\begin{aligned} ((f, l), H)^3 &= -\left((xy)\,[(f, l)]_{y3}, H_y^4\right)^4 H_x^4 \\ ((f, l), (f, l))^2 &= -\frac{4}{3}\left((xy)\,[(f, l)]_{y3}\ ,\ (xy)\,[(f, l)]_{y3}\right)^4 \\ ((f, l), i) &= -2\left((xy)\,[(f, l)]_{y3}\ ,\ \mu_y^4\right)^4 \\ ((f, l), \Delta) &= -2\left((xy)\,[(f, l)]_{y3}\ ,\ \nu_y^4\right)^4; \end{aligned}$$

ai secondi membri le spinte si intendono fatte assumendo per variabili le y.

Con queste formole e con (12) si vede che anche i calcoli delle indicate spinte si riducono all'uso delle formole (7) e (8), e abbiamo così:

$$(15)\qquad \begin{cases} ((f, l), H)^3 = -\frac{1}{2.7} fm + \frac{1}{2.3^2} A fl - \frac{1}{2^2.3.7} A i^2 - \frac{1}{2.7} i\Delta - \frac{11}{2.3.7} pl \\ ((f, l), (f, l))^2 = -\frac{2}{3} fn - \frac{1}{2} A_u H - \frac{1}{3^2} A fm - \frac{2}{3^2} B lf + \frac{2.5}{3^2} \Delta^2 + \\ \qquad + \frac{5}{2.3^4} A^2 i^2 + \frac{2.5}{3^3} A i\Delta + \frac{2^2}{3^2} A pl + \frac{5}{2.3} l^2 i \\ ((f, l), i) = -\frac{1}{2} fm + \frac{1}{3^2} A i^2 + \frac{2}{3} i\Delta + \frac{1}{2} pl \\ ((f, l), \Delta) = -\frac{1}{2} fn + \frac{1}{2^2.3} B fl + \frac{2}{3} \Delta^2 + \frac{1}{3^2} A i\Delta + \frac{1}{2^2} l^2 i \end{cases}$$

Colle formole (4) (10) (11) (13) (14) (15) e coll'ultima delle (8), il valore di Θ diventa:

$$(16)\quad \Theta = -\frac{5}{2^{11}.3^3}\Big\{2^2.3^3.5^3\,fn + 2^4.3^2.5^3\,A_{ll}H + 2^3.3^2.5^2\,Afm + 2^3.3.5^3\,Blf + \\ + 2^2.3^3.5^2\,ABH - 2^2.3^2.5^3.7\,\Delta^2 + 2^6.3.5.\,A^2lf - 2^2.5^3\,A^2i^2 - \\ - 2^6.3^2\,A^3H - 2.3.5^3.11\,Ai\Delta - 2^5.3.5^3\,Apl - 3^2.5^3.23\,l^2i\Big\}.$$

§ 3. — *Altro metodo per la determinazione del Θ.*

Esaminando la tabella delle forme invariantive della sestica, si riconosce che il covariante Θ, di 8° ordine e 8° grado, deve essere del tipo:

$$(17)\quad \Theta = c_1 fn + c_2 A_{ll}H + c_3 pm + c_4 Afm + c_5 Blf + c_6 Bi^2 + c_7 ABH + c_8 \Delta^2 + \\ + c_9 A^2lf + c_{10} A^2i^2 + c_{11} A^3H + c_{12} Ai\Delta + c_{13} Alp + c_{14} l^2i,$$

in cui $c_1, c_2 \ldots c_{14}$ sono coefficienti numerici da determinare. Se poniamo che f abbia un fattore quadratico doppio

$$(18)\qquad f = \alpha_x^2\, \alpha'^2_x\, \beta_x^2 \equiv \alpha^2\beta,$$

in cui α, α' sieno due simboli equivalenti di una stessa quadratica, e β sia il simbolo di una quadratica diversa, la Θ deve risultare identicamente zero; e se le equazioni che si troveranno per la determinazione delle c saranno in numero minore di 13 indipendenti (quante ne occorrerebbero per determinare in modo *unico* i rapporti delle c) cioè se saranno in numero di $13 - s$, il numero s rappresenterà il numero delle relazioni lineari esistenti fra le formazioni (8, 8). Si troverà $s = 3$ e così si sarà dimostrato che fra le formazioni (8, 8) della sestica binaria non esistono altre relazioni lineari oltre le *tre* che furono già trovate da Stephanos in un lavoro che citeremo più sotto.

Calcoliamo per la f sotto la forma (18), le espressioni dei varî invarianti e covarianti che entrano a formare il secondo membro di (17). Poniamo

$$(19)\qquad (\alpha, \alpha)^2 = h \quad , \quad (\alpha, \beta)^2 = k \quad , \quad (\beta, \beta)^2 = h'$$

e osserviamo che, per semplicità, e senza togliere generalità, si può sempre supporre $k = h' = 1$, perchè ciò vale a supporre moltiplicato per un opportuno fattore costante il secondo membro di (18). Calcoliamo poi facilmente le formole:

$$
(20)\quad
\begin{array}{ll|ll}
(\alpha^2, \alpha)^2 & = \frac{2}{3} h\alpha & (\alpha^2, \alpha^2)^4 & = ((\alpha^2, \alpha)^2, \alpha)^2 = \frac{2}{3} h^2 \\
(\alpha^2, \beta)^2 & = \alpha - \frac{1}{3} h\beta & (\alpha^2, \alpha\beta)^4 & = \frac{2}{3} h \\
(\alpha\beta, \alpha)^2 & = \frac{1}{6} \alpha + \frac{1}{2} h\beta & (\alpha^2, \beta^2)^4 & = 1 - \frac{1}{3} h \\
(\alpha\beta, \beta)^2 & = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{6} \beta & (\beta^2, \alpha\beta)^4 & = \frac{2}{3} \\
(\beta^2, \alpha)^2 & = -\frac{1}{3} \alpha + \beta & (\beta^2, \beta^2)^4 & = \frac{2}{3} \\
(\beta^2, \beta) & = \frac{2}{3} \beta & (\alpha\beta, \alpha\beta)^4 & = \frac{1}{2} h + \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$$
(21)\quad
\left\{
\begin{array}{l}
(\alpha^2, f)^4 = \frac{2}{15} h\alpha + \frac{4}{15} h^2\beta \\
(\alpha\beta, f)^4 = \frac{1}{15} (4h + 1)\, \alpha + \frac{1}{15} h\beta \\
(\beta^2, f)^4 = \frac{8}{15} \alpha + \frac{1}{15} (-3h + 1)\, \beta .
\end{array}
\right.
$$

Mediante queste formole ausiliarie troviamo:

$$
(22)\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\mathrm{H} = (f, f)^2 = \frac{1}{3^2.5} [5\alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 8h\alpha^2\beta^2] \\
i = (f, f)^4 = \frac{2}{3.5^2} [(5h + 1)\, \alpha^2 - 4h\, \alpha\beta + 4h^2\beta^2] \\
\mathrm{A} = (f, f)^6 = \frac{2}{3.5} [2h^2 + h] \\
p = (f, i)^2 = \frac{2}{3^2.5^3} [(-5h + 1)\, \alpha^3 + (15h^2 + 9h)\, \alpha^2\beta + 12h^2\, \alpha\beta^2 - 8h^3\beta^3] \\
l = (f, i)^4 = \frac{2^2}{3^2.5^3} [(13h^2 - h)\, \alpha + (4h^3 + 2h^2)\, \beta] \\
\Delta = (i, i)^2 = \frac{2^2}{3^2.5^4} [(-5h^3 - 2h^2 - h)\, \alpha^2 + (28h^3 + 4h^2)\, \alpha\beta + \\
\qquad\qquad + (-8h^4 - 4h^3)\, \beta^2] \\
\mathrm{B} = (i, i)^4 = \frac{2^3}{3^2.5^4} [7h^4 + 2h^3 + 3h^2] \\
m = (i, l)^2 = \frac{2^4}{3^3.5^5} [(19h^4 + 4h^3 + h^2)\, \alpha + (2h^5 + 12h^4 - 2h^3)\, \beta] \\
\mathrm{A}_{ll} = (l, l)^2 = \frac{2^4}{3^4.5^6} [16h^6 + 289h^5 + 22h^4 - 3h^3] \\
n = (i, m)^2 = \frac{2^6}{3^4.5^7} [22h^6 + 23h^5 + 4h^4 - h^3)\, \alpha + \\
\qquad\qquad + (h^7 + 24h^6 - 3h^5 + 2h^4)\, \beta]
\end{array}
\right.
$$

Sostituendo questi valori nel secondo membro di (17), si hanno 19 classi di di termini e propriamente quelli in

$$
(23)\qquad \left\{\begin{array}{lllll}
h^6\alpha^4 & , h^5\alpha^4 & , h^4\alpha^4 & , h^3\alpha^4 & , h^2\alpha^4 , \\
h^6\alpha^3\beta & , h^5\alpha^3\beta & , h^4\alpha^3\beta & , h^3\alpha^3\beta & , \\
h^7\alpha^2\beta^2 & , h^6\alpha^2\beta^2 & , h^5\alpha^2\beta^2 & , h^4\alpha^2\beta^2 & , \\
h^7\alpha\beta^3 & , h^6\alpha\beta^3 & , h^5\alpha\beta^3 & , & \\
h^8\beta^4 & , h^7\beta^4 & , h^6\beta^4 . & &
\end{array}\right.
$$

Eguagliando a zero i coefficienti di ciascuno di questi termini si hanno le richieste equazioni lineari fra le c, e mostreremo che queste 19 equazioni si riducono solo a *dieci* fra loro indipendenti. Per comodità del lettore indicheremo ciascuna equazione col numero d'ordine (I), (II)... (XIX), relativo al posto che il corrispondente elemento della tabella (23) occupa nella tabella medesima; così (I) sarà la equazione che si ottiene eguagliando a zero il coefficiente di $h^6\alpha^4$, (II) sarà quella che si ottiene dal coefficiente di $h^5\alpha^4$, ecc.

Ciò posto e supposto che il lettore abbia presente la tabella di queste 19 equazioni, diamo qualche guida per le loro successive riduzioni. Dalla (XVII) e (XVIII), come anche dalla (XVII) e (XIX) colla sottrazione si deduce la

$$(24)\qquad c_3 + 3c_6 = 0 .$$

Onde le tre ultime equazioni si riducono solo a questa e alla (XVII), che è:

$$(25)\qquad -c_3 + 3.7c_6 + 2.3c_8 + 2.3.5^2c_{10} - 2.3.5c_{12} - 2.5c_{13} + 2^2c_{14} = 0 .$$

Le equazioni (V) (XVI) sono le stesse della (XIX) e quindi da trascurarsi. Le (XIV) (XV) ridotte e sottratte, dànno una combinazione di (24) e (25); quindi di esse una è da trascurarsi, e l'altra può scriversi:

$$(26)\qquad -2^4c_3 - 2^2.3.7c_6 - 2^2.3.7c_8 - 2^3.3.5^2c_{10} + 2.3^3.5c_{12} - 5.7c_{13} + \\ + 2^2.11c_{14} = 0 .$$

Da queste tre equazioni cominciamo col ricavare i valori di c_3, c_6, c_8 (valori che segneremo più sotto insieme agli altri, e che non segniamo qui per non ripeterli più volte, v. formole (28)) in funzione di $c_{10}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$.

Formando la combinazione

$$-(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) + 2(\mathrm{IV})$$

e riducendo, restano eliminati c_2, c_7, c_{11} e resta un'equazione che non è che

$$5(24) + (25) = 0$$

onde la equazione (III) può trascurarsi.

Le (I) (II) (IV), eliminandovi allora i valori già trovati di c_3, c_6, c_8, diventano:

$$(27)\begin{cases} 2^5\,c_2 + 2^2.3.5.7c_7 + 2^3.3.5^3c_{11} + 2.3^2.5^2c_{10} + 3^3.5c_{13} - 2^3.3^2c_{14} = 0 \\ 2.17^2c_2 + 2.3.5.11c_7 + 2^2.3^2.5^3c_{11} + 2^2.3^2.5^2c_{10} + 3.5c_{13} + 2^3.3.13c_{14} = 0 \\ -2\,c_2 + 2.3.5c_7 + 5^3c_{11} + 3.5c_{13} - 2^3c_{14} = 0 \end{cases}$$

dalle quali troveremo i valori di c_2, c_7, c_{11}, che sono segnati più sotto (form. (28)).

Restano da considerare le otto equazioni (VI)... (XIII). La (IX) moltiplicata per 2 e sommata colla (XIII) dà $5(24)+(25)$; quindi può trascurarsi la (XIII). Dalle (VI) (VIII) (IX) (X) sostituiti i valori trovati di $c_2, c_3, c_6, c_7, c_8, c_{11}$ si deducono i valori di c_1, c_4, c_5, c_9, e si verifica che tali valori soddisfanno identicamente le rimanenti tre equazioni, cioè le (VII), (XI), (XII). Si vede così che tutte le 19 equazioni si riducono solo alle 10 seguenti:

$$(28)\begin{cases} c_1 = c_{10} - \frac{3}{2}c_{12} + \frac{7}{2^2.3}c_{13} - \frac{1}{3}c_{14} \\ c_2 = \frac{1}{2}c_{10} - \frac{1}{2^2.3}c_{13} - \frac{2}{3}c_{14} \\ c_3 = 15c_{10} - \frac{3}{2}c_{12} - \frac{7}{4}c_{13} + c_{14} \\ c_4 = -\frac{2.7}{5}c_{10} - \frac{1}{2.3.5}c_{13} \\ c_5 = -3c_{10} + \frac{1}{2}c_{12} + \frac{1}{4}c_{13} - \frac{1}{3}c_{14} \\ c_6 = -5c_{10} + \frac{1}{2}c_{12} + \frac{7}{12}c_{13} - \frac{1}{3}c_{14} \\ c_7 = \frac{7^2}{2.3.5}c_{10} - \frac{139}{2^2.3^2.5}c_{13} + \frac{2}{3^2}c_{14} \\ c_8 = -5c_{10} + 3c_{12} - \frac{2}{3}c_{13} + \frac{2}{3}c_{14} \\ c_9 = \frac{2^4}{5^2}c_{10} - \frac{2^3}{3.5^2}c_{13} \\ c_{11} = -\frac{2^4.3}{5^3}c_{10} + \frac{2^3}{5^3}c_{13} \end{cases}$$

e restano perciò *arbitrari* i valori dei quattro coefficienti $c_{10}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$. Come abbiamo detto in principio, ciò mostra che *fra le formazioni* (8, 8) *relative alla sestica devono esistere tre, e non più di tre, relazioni lineari indipendenti,* e queste devono essere quelle trovate, insieme ad altre, da Stephanos [1]; è da notare peraltro che una delle relazioni di Stephanos è fra formazioni di 8° ordine e 6° grado, ma

[1] Stephanos, *Sur les relations qui existent entre les covariantes et les invariantes de caractère paire d'une forme binaire du sixième ordre.* Compt. Rend. de l'Acad. des sc. de Paris, t. 96, 1883, 1er sém., pp. 232, 1564.

questa si riduce subito a relazione fra formazioni (8, 8) moltiplicandola per l'invariante di 2° grado A.

Se coi risultati da noi ottenuti vogliamo ritrovare le *sizigie* di Stephanos, immaginiamo una f non avente due fattori lineari doppî, p. es. semplicemente:

$$f = x_1^6 + x_2^6, \tag{29}$$

con cui si hanno i seguenti valori:

$$\left\{\begin{array}{llll} H = 2x_1^4 x_2^4 & , \; i = 2x_1^2 x_2^2 & , \; A = 2 & \\ l = 0 & , \; m = 0 & , \; n = 0 & \\ p = \frac{1}{3}(x_1^6 + x_2^6) & , \; B = \frac{2}{3} & , \; \Delta = -\frac{2}{3}x_1^2 x_2^2 & , \; A_u = 0 \end{array}\right. \tag{30}$$

e sostituendo questi valori, insieme ai (28), nel secondo membro di (17), si ha:

$$\Theta = -\frac{2^2.7}{5^3}(6c_{10} - c_{13})\, x_1^4 x_2^4,$$

e questo non deve essere zero perchè la (29) non ha fattori doppî, onde per avere la espressione di Θ bisognerà nelle (28) scegliere tali $c_{10}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ che *non sia*:

$$6c_{10} - c_{13} = 0. \tag{31}$$

Scegliendo per $c_{10}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ i valori dei coefficienti di $A^2 i^2$, $Ai\Delta$, Alp, $l^2 i$ nella formola (16) del paragrafo precedente, si trova infatti che essi non soddisfanno alla (31), e gli altri coefficienti soddisfanno esattamente alle (28). Troviamo così la conferma della esattezza dei calcoli fatti.

Se poi scegliamo dei c_{10}, c_{13} soddisfacenti alla (31), e calcoliamo, per mezzo delle (28), gli altri coefficienti, scegliendo ancora arbitrariamente c_{10}, c_{14}, per i calcoli fatti, il secondo membro di (17) deve essere anche zero, e poichè l'espressione così trovata non può essere il Θ, ne viene che l'annullarsi di quel secondo membro di (17) non può derivare dal fatto che f è posto sotto la speciale forma (18), ma deve essere un annullarsi identico, cioè devono venire così a trovarsi le uniche relazioni esistenti fra le formazioni (8, 8).

Ponendo per $c_{10}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ i sistemi di valori:

$$\begin{array}{llll} c_{10} = -\frac{1}{3} & , \; c_{12} = -1 & , \; c_{13} = -2 & , \; c_{14} = 0 \\ c_{10} = 0 & , \; c_{12} = \frac{2}{3} & , \; c_{13} = 0 & , \; c_{14} = 0 \\ c_{10} = 0 & , \; c_{12} = -\frac{1}{2} & , \; c_{13} = 0 & , \; c_{14} = -\frac{3}{4} \end{array}$$

che soddisfanno alla (31), si hanno le tre relazioni (soppressovi nella prima di esse

il fattore comune A)

$$(32)\qquad \begin{cases} fm + BH - \frac{1}{3}Ai^2 - i\Delta - 2lp = 0 \\ fn + \frac{1}{2}A_{u}H - \frac{1}{6}ABH - 2\Delta^2 - \frac{1}{2}Ai\Delta - \frac{3}{4}l^2 i = 0 \\ -fn - pm + \frac{1}{3}Blf + \frac{1}{3}Bi^2 + 2\Delta^2 + \frac{2}{3}Ai\Delta = 0 \end{cases}$$

che sono precisamente le tre relazioni trovate da Stephanos; resta pertanto, colle considerazioni da noi fatte, anche dimostrato che, *oltre quelle che derivano da queste tre, non esistono altre relazioni, da queste indipendenti, fra formazioni* (8, 8).

§ 4. — *Determinazione dell'invariante Φ_0.*

Quando la f ha *tre* fattori lineari doppii, le sue due derivate prime devono avere comuni tre fattori lineari, e quindi tutto il covariante Φ a due serie di variabili deve essere zero, e perciò anche Φ_0. D'altra parte questo deve essere zero anche se la f ha semplicemente un fattore lineare triplo. Servendoci di queste due condizioni troveremo l'espressione di Φ_0, che deve essere del tipo

$$(33)\qquad \Phi_0 = c_1 A^3 + c_2 AB + c_3 A_u.$$

Posto f sotto la forma

$$f = (\alpha_x^2)^2 (\beta_x)^2,$$

cioè eguale al quadrato della cubica $\alpha_x^2 \beta_x$, gli invarianti A, B, A_u hanno i valori:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3.5} h k^2 \\ B &= \frac{2^3}{3.5^4} h^2 k^4 \qquad \begin{pmatrix} h = (\alpha, \alpha)^2 \\ k = (\alpha\beta)^2 \end{pmatrix} \\ A_u &= -\frac{2^4}{3^3.5^6} h^3 k^6, \end{aligned}$$

onde, sostituendo in (33), si ha:

$$5^3 c_1 + 2.3.5 c_2 - 2 c_3 = 0.$$

Posto invece f sotto la forma

$$f = (\alpha_x)^3 . \beta_x^3$$

in cui α_x è una forma lineare contenuta triplamente in f, si trova:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{20} K^2 \\ B &= \frac{1}{2.3.5^4} K^4 \qquad (K = (\alpha\beta)^3) \\ A_{\prime} &= -\frac{1}{2^3.5^6} K^6, \end{aligned}$$

e quindi

$$3.5^3 c_1 + 2^3.5 c_2 + 2^3.3 c_3 = 0,$$

e da queste due equazioni si ricavano i valori di c_1, c_2, c_3 e perciò:

$$\Phi_0 = -2^4 A^3 + 3.5^2 AB + 5^3.A_{II}. \tag{34}$$

Se si vuole introdurre l'invariante C (v. § 1) si ha (trascurando un fattore numerico):

$$\Phi_0 \equiv -2^3.3A^3 + 5^2.7\,AB + 3.5^3 C. \tag{34'}$$

§ 5. — *Determinazione del covariante Φ_{12}.*

Per tale determinazione serviamoci dei risultati da me già ottenuti in una Memoria del 1888, in cui calcolai l'espressione generale dei tre covarianti elementari del Φ relativo a due quintiche binarie ([1]).

Il risultato ottenuto in quella Memoria è che, adoperando le stesse notazioni adoperate nel § 2, il covariante Φ_{12} ha per valore:

$$\Phi_{12} = -(\mathfrak{A}, \varrho)^2 + \frac{1}{2}(\mathfrak{B}, \varrho) - \frac{1}{6}(\mathfrak{C} - \mathfrak{D})\varrho - \frac{2}{7}\mathfrak{A}\sigma. \tag{35}$$

Per calcolare questa espressione occorre conoscere i valori di $(H, H)^2$, $(fl, H)^2$, $((f, l), H)$.

Il primo è calcolato in Maisano (*Sest. binaria*, loc. cit., formola (68) ed è:

$$(H, H)^2 = -\frac{1}{3}pf + \frac{1}{18}Af^2 - \frac{1}{14}iH. \tag{36}$$

Gli altri due li calcoleremo usando i medesimi metodi adoperati nel § 2, cioè scrivendo:

$$(fl, H)^2 = \left([fl]_{y^4}, (xy)^2 H_y^2 H_x^6\right)^4 = (f, H)^2.l + (\lambda, H)^2 + \frac{3}{7}(\nu, H)^2 + \frac{1}{14}A(\mu, H)^2$$

in cui al solito le spinte si intendono calcolate considerando le forme come funzioni solo delle y.

Ora

$$(f, H)^2 = \frac{3}{14}if \quad \text{(Maisano, op. cit., formola (60)).}$$

e da

$$\lambda_x^2 \lambda_y^2 = \frac{1}{2}(xy)(al)\, a_y\, a_x^4\, l_x$$

([1]) Pascal, *Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche o di due quintiche,* Annali di Matem. (2), t. XVI, 1888, pp. 85-99.

si ha:

$$(\lambda, \mathrm{H})^2 = -\frac{1}{2}(al)(a\mathrm{H})\, a_x^4\, l_x\, \mathrm{H}_x^7 =$$

$$= -\frac{1}{4} a_x^4\, \mathrm{H}_x^6 \{(al)^2 \mathrm{H}_x^2 + (a\mathrm{H})^2 l_x^2 - (l\mathrm{H})^2 a_x^2\},$$

mentre

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3}\mathrm{A}i$$

$$(l, \mathrm{H})^2 = ((l, f)^2, f)^2 - \frac{2}{7} li \qquad \text{(per la form. (51) di Maisano, op. cit.)}$$

$$= 2(\Delta, f)^2 + \frac{1}{3}\mathrm{A}(i, f)^2 - \frac{2}{7} li$$

$$= -\frac{1}{3}\mathrm{B}f + \frac{1}{3}\mathrm{A}p + \frac{5}{7} li$$

onde infine:

$$(\lambda, \mathrm{H})^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{H}\Delta - \frac{1}{12}\mathrm{AH}i + \frac{1}{8} lif - \frac{1}{12}\mathrm{B}f^2 + \frac{1}{12}\mathrm{A}pf.$$

Essendo inoltre

$$\nu_y^2\, \nu_x^2 = \frac{1}{6}(xy)^2 \Delta_x^4 \quad , \quad \mu_y^2\, \mu_x^2 = \frac{1}{6}(xy)^2\, i_x^4,$$

si ha:

$$(\nu, \mathrm{H})^2 = \frac{1}{6}\mathrm{H}\Delta \quad , \quad (\mu, \mathrm{H})^2 = \frac{1}{6}\mathrm{H}i,$$

onde infine:

$$(37) \qquad (fl, \mathrm{H})^2 = -\frac{3}{7}\mathrm{H}\Delta - \frac{1}{14}\mathrm{AH}i + \frac{1}{12}\mathrm{A}pf - \frac{1}{12}\mathrm{B}f^2 + \frac{19}{56} lif.$$

In quanto a $((f, l), \mathrm{H})$, ricordando una nota formola di Clebsch, possiamo scrivere:

$$(38) \qquad ((f, l), \mathrm{H}) = \frac{1}{3}\mathrm{H}(f, l)^2 - \frac{1}{2} f(l, \mathrm{H})^2 + \frac{1}{2} l(f, \mathrm{H})^2$$

$$= \frac{2}{3}\mathrm{H}\Delta + \frac{1}{9}\mathrm{AH}i - \frac{1}{6}\mathrm{A}pf + \frac{1}{6}\mathrm{B}f^2 - \frac{1}{4} lif$$

e con queste formole, si ha infine:

$$(39) \quad \Phi_{12} = \frac{5^2}{2^7.3^2}\{3^3.5\,\mathrm{H}\Delta + 2^2.3\,\mathrm{A}i\mathrm{H} - 2^2.11\,\mathrm{A}pf + 2^2\mathrm{A}^2f^2 + 2^2.5\,\mathrm{B}f^2 - 2^2.3.5\, lif\}.$$

Si può trovare una conferma di questo risultato nel seguente modo:

Facciamo che la f venga a possedere tre fattori lineari doppi, cioè sia della forma:

$$f = (\alpha_x^2)(\beta_x)^2$$

il che corrisponde in sostanza a supporre che nelle formole del § 3, l'invariante h' di β sia zero, anzichè 1.

Ponendo allora $(\alpha, \alpha)^2 = h$, $(\alpha, \beta)^2 = k$, si trovano i seguenti valori [1]:

$$(40)\qquad \begin{cases} H = \dfrac{2^2}{3^2.5}(-k\alpha^3\beta + 2h\alpha^2\beta^2) \\ i = \dfrac{2}{3.5^2}(k^2\alpha^2 - 4hk\alpha\beta + 4h^2\beta^2) \\ A = \dfrac{2}{3.5}hk^2 \\ p = \dfrac{2}{3^2.5^3}(k^3\alpha^3 + 9hk^2\alpha^2\beta + 12h^2k\alpha\beta^2 - 8h^3\beta^3) \\ l = \dfrac{2^2}{3^2.5^3}(-hk^3\alpha + 2h^2k^2\beta) \\ \Delta = \dfrac{2^2}{3^2.5^4}(-hk^4\alpha^2 + 4h^2k^3\alpha\beta - 4h^3k^2\beta^2) \\ B = \dfrac{2^3}{3.5^4}h^2k^4 . \end{cases}$$

Ponendo allora

$$(41)\qquad \Phi_{12} = c_1 H\Delta + c_2 AHi + c_3 p^2 + c_4 Afp + c_5 A^2f^2 + c_6 Bf^2 + c_7 fli + c_8 i^3$$

ed eguagliando a zero i coefficienti di $\alpha^6, \alpha^5\beta, \ldots\ldots \beta^6$ si hanno sette equazioni le quali si riducono immediatamente a cinque, e sono soddisfatte dai valori c che corrispondono ai coefficienti dei varî termini nel secondo membro della formola (39).

È bene ricordare che fra le formazioni, di grado 6 e ordine 12, costituenti il secondo membro della (41) esiste la relazione trovata da Stephanos (loc. cit.)

$$(42)\qquad Bf^2 - 2fli - 6p^2 + 6\Delta H + i^3 = 0$$

[1] Questi possono dedursi immediatamente dalle formole del § 3 osservando che, se in quelle *non* avessimo posto $k = h' = 1$, dovendo ciascun termine di grado s nei coefficienti di f risultare di grado $2s$ nei coefficienti di α, e di grado s in quelli di β, ogni termine del tipo $h^{\omega}\alpha^{\omega'}\beta^{\omega''}$ deve essere sostituito da $h^{\omega}h'^{\tau}k^{\tau'}\alpha^{\omega'}\beta^{\omega''}$ in cui è:

$$\tau = \frac{1}{2}(2\omega + \omega' - \omega'' - s) \quad , \quad \tau' = 2s - 2\omega - \omega'.$$

§ 6. — *Determinazione dei covarianti elementari di Φ.*

I covarianti elementari di un Φ generale relativo a due quintiche qualunque sono stati calcolati da Berzolari ([1]); noi pertanto ci serviremo di questi risultati per trovare le espressioni dei covarianti elementari della sestica mediante le forme invariantive fondamentali della sestica medesima.

I covarianti elementari della Φ di due quintiche sono cinque e degli ordini $12, 8, 6, 4, 0$ e sono da Berzolari indicati rispettivamente con M, N, B, t, P e di questi il B e il t sono, per il caso della sestica, quelli indicati da noi con $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{D}$ nel § 2. Tali covarianti noi li indicheremo rispettivamente con $\Phi_{12}, \Phi_8, \Phi_6, \Phi_4, \Phi_0$.

I risultati di Berzolari sono:

$$\Phi_{12} = (\varrho, \varrho)^2 - \frac{3}{7}\varrho\sigma$$

$$\Phi_8 = \frac{1}{7}\left\{-\frac{2.3}{11}(\varrho, \varrho)^4 - \frac{3.13}{7.11}(\varrho, \sigma)^2 + \frac{1}{2.5}\tau\varrho + \frac{2.3}{7^2}\sigma^2\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_6 = \mathfrak{B} \\ \Phi_4 = \mathfrak{D}\end{array}\right\} \text{v. § 2}$$

$$\Phi_0 = -\frac{1}{3.5.7}(\varrho, \varrho)^8 + \frac{19}{2^2.5.7^2}(\sigma, \sigma)^4 + \frac{1}{2^3.3.5^2}\tau^2$$

e colle formole (1), (4), (5), (36), questi valori diventano:

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Phi_{12} = \dfrac{5^2}{2^4.3^2}\left\}2Af^2 - 2^2.3pf - 3^2 iH\right\{ \\[2ex]
\Phi_8 = \dfrac{5.23}{2^5.3.7.11}\left\}4AH - 5lf\right\{ \\[2ex]
\Phi_6 = \dfrac{5^3}{2^5.3}(f, l) \\[2ex]
\Phi_4 = \dfrac{5^2}{2^6.3}\left\}-2Ai + 15\Delta\right\{ \\[2ex]
\Phi_0 = \dfrac{41}{2^8.3^3.7}\left\}3.5^2B - 2^3A^2\right\{
\end{array}\right.$$

Si può trovare una utile conferma di questi risultati col seguente metodo indiretto.

Il Φ_0, come sappiamo, deve essere zero quando f ha un fattore lineare triplo e uno doppio, quindi posto (come alla fine del § 4)

$$(44)\qquad f = (\alpha_x)^3 \beta_x^2$$

([1]) Berzolari, *Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni*, Annali di Matem. (2), t. XIX, 1891-92, pp. 269-288.

e supposto che β abbia un fattore doppio, i valori di A, B restano i medesimi che quelli ivi trovati e si verifica subito che essi infatti annullano Φ_0.

La Φ_{12} deve annullarsi se f possiede due fattori tripli, ovvero se essa possiede un fattore quadruplo a uno doppio; supposto allora in (44) che β sia un cubo perfetto, si ha:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2^2.5}k^6 \qquad\qquad [k=(\alpha\beta)] \\ i &= \frac{1}{5^2}k^4\alpha^2\beta^2 \\ H &= -\frac{1}{2.5}k^2\alpha^4\beta^4 \\ p &= -\frac{2}{3.5^3}k^6\alpha^3\beta^3 \end{aligned}$$

coi quali valori, posto

$$\Phi_{12} = c_1 iH + c_2 Af^2 + c_3 fp$$

si ha fra le c la relazione:

$$2.3c_1 + 3.5^2c_2 + 2^3c_3 = 0.$$

Poniamo invece che in (44), β sia della forma $\beta = \alpha\gamma^2$ cioè, abbia per fattore α, e un altro fattore doppio γ; sarà allora $(\beta\alpha)^3 = 0$ e si avrà:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ i &= -\frac{3}{2.5^2}(\alpha\gamma)^4.\alpha^4 \\ H &= -\frac{2^2}{3^2.5}(\alpha\gamma)^2.\alpha^6.\gamma^2 \\ p &= -\frac{1}{2.5^3}(\alpha\gamma)^6.\alpha^6 \end{aligned}$$

e quindi l'altra equazione:

$$2^2c_1 - 3c_3 = 0$$

e da queste si ricavano per i rapporti di c_1, c_2, c_3 valori tali che per Φ_{12} si ha la medesima espressione, a meno di un fattore numerico, che la prima delle (43).

È interessante osservare che la Φ_8 è, a meno di un fattore numerico, niente altro che la $\mathfrak{A}$ del § 2, e la Φ_0 è la $\mathfrak{G}$ del medesimo paragrafo.

Si può fare anche una verifica per Φ_8. Questo deve annullarsi se f ha un fattore quadruplo; se quindi nelle formole del § 3 supponiamo che α sia un quadrato perfetto, cioè che il suo invariante h sia zero, troviamo $A = 0$, $l = 0$, coi quali valori la Φ_8 da noi trovata infatti è zero.

§ 7. — *Le condizioni per i casi di molteplicità della sestica.*

Passiamo ora ad esaminare come ci si presentano, dal nostro punto di vista, le condizioni relative all'uno o all'altro dei casi di molteplicità di f, e a dedurre dal paragone coi risultati già ottenuti da Maisano [1], alcune conseguenze relativamente ai covarianti da noi calcolati.

Per il primo dei casi contemplati nel § 1, cioè pel caso di un fattore quadratico doppio, c'è, per la sestica, questo fatto notevole, che l'annullarsi di Θ può essere sostituito da quello di due invarianti, di cui uno è naturalmente il discriminante di f (di grado 10) e l'altro è un invariante (da Maisano indicato con F) di grado 12. Ciò risulta dalle considerazioni di Maisano e da quelle di Brioschi citate in principio.

All'annullarsi di tre invarianti devono anche corrispondere le condizioni dell'annullarsi dei due covarianti Θ e Φ_{12} (quando però non si annulli alcuno dei Ψ), perchè queste corrispondono all'esistenza in f di tre fattori doppi, e il Maisano dimostrò che le condizioni necessarie e sufficienti per ciò sono date da:

$$(45) \qquad \begin{cases} 5^2 B - 2.3 A^2 = 0 \\ 5^3 C + 2.3 A^3 = 0 \\ 5^5 D + 2^3 A^5 = 0 . \end{cases} \qquad \text{(essendo } D = (m, m)^2\text{)}$$

L'annullarsi di Θ e Φ_{12} porta per conseguenza, come sappiamo dalla nostra teoria, anche quello di Φ_0, e infatti si verifica subito che dalle due prime delle (45) risulta $\Phi_0 = 0$.

Se invece all'annullarsi di Θ aggreghiamo *non* l'annullarsi di Φ_{12}, ma semplicemente quello di Φ_0 (il che viene a dire che supponiamo che la f possegga solo un fattore triplo), dal paragone coi risultati di Maisano, si vede che ciò corrisponde anche all'annullarsi di *tre invarianti*, ma diversi dai (45), e cioè:

$$(46) \qquad \begin{cases} 3 . 5^2 B - 2^3 A^2 = 0 \\ 3^2 . 5^3 C - 2^4 A^3 = 0 \\ 3^2 . 5^5 D - 2^7 A^5 = 0 \end{cases}$$

coi quali appunto la Φ_0 anche si annulla. Il primo di questi invarianti è precisamente il Ψ_0 da noi calcolato di sopra, e che corrisponde all'$\mathfrak{G}$ del § 2.

Non si trovi contraddizione fra questo risultato e quello contenuto nelle condizioni da noi date per l'esistenza in f di un fattore triplo e uno doppio, le quali (v. § 1) sono $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_0 = 0$, $\Psi_8 \neq 0$. Si potrebbe pensare che, poichè le prime due di queste corrispondono alle (45), e poichè Ψ_0 è la prima delle (46), così da queste si dedurrebbe $A = 0$; ora ciò non è, per la ragione che, come abbiamo

[1] Tali risultati sono compendiati nella pag. 44 della citata Memoria di questo Autore.

già esplicitamente detto di sopra, le $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$ corrispondono alle (45) solo quando *nessuna* delle Ψ è zero; altrimenti il caso di molteplicità che si viene ad avere non è quello di *tre* fattori doppi *distinti*, ma un altro, e quindi non sta più il paragone con quel risultato di Maisano.

Anche analiticamente si comprende facilmente come ciò possa accadere, pensando ad equazioni i cui primi membri si scindano in fattori, e donde quindi possa dedursi l'annullarsi necessario di uno dei fattori solo quando si ammetta che non si annullino gli altri.

Esaminiamo ora i covarianti elementari di Ψ. Ammesso che sieno zero Θ e Φ_{12}, le due derivate di f avranno tre fattori lineari comuni uguali o diversi. Indicando con γ il prodotto di tali tre fattori lineari, i diversi covarianti elementari di Ψ, a cagione dei gradi e degli ordini, con un'analisi eguale a quella fatta nel § 2 della prima delle mie succitate Note, diventeranno:

$$(47) \qquad \begin{cases} \Psi_{12} \equiv \gamma^4 . \Omega \quad , \quad \Psi_8 \equiv \gamma^2 P \Omega \quad , \quad \Psi_6 \equiv \gamma Q . \Omega , \\ \Psi_4 \equiv P^2 . \Omega \quad , \quad \Psi_0 \equiv R . \Omega \end{cases}$$

in cui con P, Q, R si rappresentano le note tre forme invariantive della cubica γ, e con Ω si intende la risultante delle due forme ottenute quando nelle due derivate prime di f si sopprime il fattore comune γ.

Queste formole mostrano che nelle condizioni per l'esistenza in f di un fattore quadruplo, alla $\Psi_8 = 0$ (v. § 1) può sostituirsi una qualunque delle $\Psi_6 = 0$, o $\Psi_4 = 0$, perchè con $\Psi_4 = 0$ si ha sempre $P = 0$ e quindi γ è un cubo perfetto, e con $\Psi_6 = 0$ si ha $Q = 0$ e quindi, come si sa dalla teoria della forma cubica, si deduce anche qui la stessa conseguenza. Risulta inoltre che, posto $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$ (il che fa che abbiano luogo le (47)) dall'annullarsi di una qualunque delle tre Ψ_8, Ψ_6, Ψ_4 risulta quello delle altre due e di Ψ_0. Ma, ricordando i trovati valori per queste Ψ (v. § 6), e cioè che

$$\Psi_8 = \mathfrak{A} \quad , \quad \Psi_6 = \mathfrak{B} \quad , \quad \Psi_4 = \mathfrak{D} \quad , \quad \Psi_0 = \mathfrak{E} ,$$

che $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ differiscono solo per un fattore numerico (v. § 2), e ricordando i valori di Θ e Φ_{12} per mezzo di $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ (v. §§ 2 e 5) si vede che l'annullarsi di Ψ_8, Ψ_6 e Ψ_4 porta con sè quello di Θ e Φ_{12}, e poichè, come abbiamo detto, quando questi due ultimi e uno di quei Ψ sono zero, sono zero anche gli altri due, ne viene che le condizioni per il fattore quadruplo possono esprimersi più semplicemente con l'annullarsi di Ψ_8, Ψ_6, Ψ_4, cioè con

$$(48) \qquad \begin{cases} 5 f l - 4 A H = 0 \\ (f, l) = 0 \\ 2 A i - 15 \Delta = 0 \end{cases}$$

Ora queste tre possono ulteriormente ridursi, come segue:

In primo punto da esse risulta anche $\Psi_0 = 0$, come può prevedersi per le considerazioni fatte di sopra, perchè quando sono zero Θ, Φ_{12} e Ψ_8, è, per effetto delle (47), zero anche Ψ_0 (essendo allora R, che è il discriminante di γ, eguale anche a zero).

Ed in effetti formando la 8ª spinta della prima delle (48) su H e ricordando la terza delle (4) e che

$$(fl, H)^8 = ((f, H)^6, l)^2 = \frac{5}{7}(l, l)^2 = \frac{5}{7} A_{ll} = \frac{5}{7}\left(2C + \frac{1}{3}AB\right),$$

si ha

$$\frac{17}{3}AB + 10C - \frac{56}{75}A^3 = 0.$$

Spingendo poi la terza delle (48) quattro volte su i si ha:

$$2AB - 15C = 0$$

e da queste due si ha, eliminando C,

$$8A^3 - 75AB = A\Phi_0 = 0$$

quindi o $A = 0$ ovvero è zero la Φ_0.

Poichè noi vogliamo mostrare che necessariamente si giunge al primo dei due casi, supporremo per ora il secondo, e formeremo la seconda spinta della terza delle (48) su i; ricordando che

$$(i, \Delta)^2 = \frac{1}{6}Bi$$

si ha

$$4A\Delta - 5Bi = 0$$

e da questa, eliminando B con $\Phi_0 = 0$, si ha:

$$A(10Ai - 3\Delta) = 0$$

e questa è incompatibile coll'ultima delle (48) almenchè non si supponga $A = 0$. Ciò supposto, dalle medesime (48) si ha poi $l = 0$, $\Delta = 0$.

Ma si può far vedere facilmente che la seconda di queste è superflua, perchè è conseguenza delle altre due $A = 0$, $l = 0$, e ciò ricordando la relazione (che si trova già in Clebsch, *Th. der bin. alg. Form.*, pag. 285):

$$(f, l)^2 = 2\Delta + \frac{1}{3}Ai. \tag{49}$$

D'altra parte può anche facilmente mostrarsi che basta solo $\Delta = 0$, perchè da questa si deducono $A = 0$, $l = 0$, purchè però si supponga $i \neq 0$. Infatti essendo

$$(i, \Delta)^2 = \frac{1}{6}Bi,$$

da $\Delta = 0$, $i \neq 0$, si deduce $B = 0$, e indi da

$$(f, \Delta)^2 = \frac{1}{2}il - \frac{1}{6}Bf$$

si deduce $l = 0$, e infine dalla (49) si deduce $A = 0$.

Restano così trovate, per il caso del fattore quadruplo, le condizioni sotto la medesima forma ad esse data da Maisano.

Possiamo anche facilmente fare una riduzione alle condizioni, quali a noi ci si presentano, per un fattore quadruplo e uno doppio. Esse sono $\Theta = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Psi_{12} = 0$, $\Xi_0 = 0$; ora in luogo delle due prime possono naturalmente, come sopra, porsi le (48), le quali, essendo ora $\Xi_0 = A = 0$, danno $l = 0$, $\Delta = 0$, di cui la seconda può, come sopra, trascurarsi. Da $\Psi_{12} = 0$ si ha poi:

$$3iH + 4fp = 0 \tag{50}$$

e questa è precisamente una delle due condizioni (l'altra è $A = 0$) trovate da Maisano, secondo i risultati del quale Autore la $l = 0$ deve essere poi conseguenza di quest'ultima e di $A = 0$.

Per un fattore quintuplo le condizioni che ci si presentano, prima di qualunque riduzione, sono (v. § 1):

$$\Theta = 0 \quad , \quad \Phi_{12} = 0 \quad , \quad \Psi_{12} = 0 \quad , \quad \Xi_4 = 0 \quad , \quad \Xi_8 \gtrless 0 .$$

Le due prime, al solito, possono essere surrogate dalle (48), l'ultima delle quali con $\Xi_4 = i = 0$ (donde $\Delta = 0$) è soddisfatta. Da $i = 0$ si ha intanto anche $l = 0$, e dalla prima delle (48) (essendo $\Xi_0 = H \gtrless 0$), risulta $A = 0$. La Ψ_{12} è soddisfatta e restano così solo le due condizioni $A = 0$, $i = 0$, come trovò Maisano.

Per due fattori tripli, le condizioni devono essere

$$\Theta = 0 \quad , \quad \Phi_{12} = 0 \quad , \quad \Psi_{12} = 0 \quad , \quad \Xi_0 \gtrless 0 \quad , \quad \Xi_4 \gtrless 0 .$$

Le due prime si possono sostituire con le (48), mentre la terza è

$$9iH - 2Af^2 + 12fp = 0 \tag{51}$$

e questa coincide con quella di Maisano (se naturalmente si tien conto del valore di j introdotto da questo Autore, cioè $j = -p + \frac{1}{6}Af$), e inoltre, giusta i risultati da lui ottenuti, le (48) devono diventare superflue coll'introduzione della (51).

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 1°, 2° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 1°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACC)EMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATTICHE E NATURALI

ANNO CC

SERIE QUINTA — VOLUME V FASCICOLO VIII.

AZEGLIO BEMRAD

L'ASSORBIMENTO SELETTIVO DELATMOSFERA TERRESTRE

SULLA LUCE DELI ASTRI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADIMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

RELAZIONE

letta nella seduta del 20 novembre 1904, dal Corrispondente E. MILLOSEVICH, relatore, a nome anche del Corrispondente A. RICCÒ sul lavoro del dott. AZEGLIO BEMPORAD, che ha per titolo: *L'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre sulla luce degli astri.*

I Commissari. avendo avuto l'onorevole incarico di riferire sulla ammissibilità del predetto lavoro del dott. A. Bemporad, espongono quanto segue:

Astronomi e fisici insigni armati dei più delicati apparecchi di misura, come i fotometri a cuneo o a polarizzazione e gli spettrobolometri, da oltre un ventennio sono intenti a cercare di sollevare il velo, che l'atmosfera terrestre interpone fra noi e gli astri.

Nella grave e controversa questione dello assorbimento atmosferico abbondano ormai, per opera specialmente di Langley, Abney, Schaeberle, Müller e Kempf, i lavori sperimentali, ma difettano invece singolarmente lavori d'indole teorica, senza dubbio in ragione della difficoltà, che s'incontra, a sottoporre al calcolo tanti disparati elementi, come sono le mutabili condizioni dell'atmosfera da un lato e la complessa costituzione della luce dall'altro. La teoria adoperata per la riduzione dei detti lavori sperimentali è infatti ancora la teoria della estinzione di Laplace (1805) e il principio fondamentale dell'assorbimento, quasi generalmente ammesso nelle ricerche fotometriche e bolometriche dirette a questo studio, è tuttora quello di Bouguer e Pouillet (1769-1838).

Ora, non mancano gravi obbiezioni contro la teoria e il principio in discorso. Data precisamente da un ventennio la controversia fra Crova, Langley ed altri da una parte, e Seeliger, Müller, Michalke, ecc., dall'altra: *se l'assorbimento selettivo operato dall'atmosfera sulle varie radiazioni dello spettro abbia tal portata da far salire al 40 per cento come vogliono i primi, ovvero solo al 20 per cento come sostengono i secondi, l'ammontare complessivo dell'assorbimento atmosferico sulla luce degli astri per raggi penetranti verticalmente nell'atmosfera.*

Tale questione coi procedimenti fin qui seguiti poteva dirsi insolubile, inquantochè mancava fino ad oggi un mezzo pratico per ottenere l'importare assoluto dell'assorbimento di masse d'aria molto diverse. Tutto quello, che si era potuto ottenere in questo senso, si riduceva alla misura simultanea delle intensità luminose e calorifiche degli astri *zenitali* da due stazioni a rilevante dislivello; ma una tale determinazione

isolata non era sufficiente a decidere, se il potere assorbente relativamente grande degli strati inferiori della atmosfera dipendesse dall'assorbimento selettivo, ovvero semplicemente da minor grado di trasparenza generica. Ora il dott. Bemporad ha ideato un procedimento che permette di moltiplicare entro larghissimi limiti (da 1 a 40 volte circa) le determinazioni *assolute* dell'assorbimento atmosferico; e precisamente egli ottiene questo, ricorrendo, per determinare l'assorbimento, oltrechè alle coppie di osservazioni simultanee di stelle zenitali, anche a coppie di osservazioni di astri con rilevante distanza zenitale, fino all'immediata prossimità dell'orizzonte. Per questo l'A. ha dovuto calcolare le masse d'aria attraversate da raggi comunque inclinati fra due altezze qualsivogliano da 0^m a 5000^m; calcoli, che eseguisce, fondandosi sui principî più rigorosi della teoria della refrazione astronomica e sui dati più certi della moderna meteorologia.

L'A. applica infine il suo metodo e i suoi calcoli alle osservazioni eseguite da Müller e Kempf nel 1894 in Catania (Osservatorio astrofisico) e all'Etna (Osservatorio Etneo) e mostra come ne risulti chiaramente provata tutta l'entità dell'assorbimento selettivo dell'atmosfera, onde può dirsi ormai risoluta in senso favorevole alle vedute di Langley la lunga controversia accennata sopra. Come appendice al suo lavoro l'A. presenta estese tavole numeriche per l'applicazione immediata del metodo da lui ideato in esperienze future, prevedendo il caso di stazioni con altitudine qualunque da 0^m a 5000^m; onde così vien risparmiato a futuri osservatori il calcolo di formole assai complicate.

I risultati a cui è pervenuto il dott. Bemporad derivano da studî preliminari lunghi e laboriosi, richiedenti larghe cognizioni fisiche e la padronanza di difficili processi analitici, coi quali solamente ha potuto superare felicemente le gravi difficoltà inerenti all'importante problema che ha risolto. Le numerose tabelle numeriche che fan seguito alla Memoria costituiscono un grave e diligente lavoro, veramente meritorio.

Pertanto i Commissarî sono dell'opinione che il lavoro esaminato meriti veramente di essere pubblicato integralmente nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei.

L'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre sulla luce degli astri.

Memoria del dott. A. BEMPORAD.

INTRODUZIONE.

Quel periodo così glorioso per le scienze fisiche, che si rannoda ai nomi di Keplero, di Galileo, di Newton, e che potrebbe definirsi come il periodo della ricerca delle grandi leggi naturali, dava origine indubbiamente alla tendenza invalsa per così lungo tempo, di ravvisare una legge matematica in ogni fenomeno naturale, che fosse appena suscettibile di misura. Delle tante leggi, che vennero enunciate in omaggio a questa tendenza, pur così utile, molte col perfezionarsi delle ricerche scomparvero dal corpo della scienza, o non serbarono che un valore storico — così in Astronomia la legge di Titius —, altre, come le Kepleriane, restarono solo come espressioni molto approssimate dei fenomeni naturali, e pochissime — pur esse tuttavia discusse — permangono ancora inalterate, come balenarono al genio di quei, che primi le enunciarono. Alla categoria intermedia può ascriversi la legge, che fa procedere l'assorbimento della luce o del calore nell'atmosfera terrestre secondo una funzione esponenziale dello spessore attraversato (legge di Bouguer-Pouillet). Ognuno è infatti oggi ben convinto, che detta legge non può valere al più che per radiazioni semplici (¹), ma si continua tuttavia ad applicarla per la luce o energia calorifica complessiva degli astri, nella fiducia, che l'errore, al quale si va incontro, non possa esser che piccolo. È giustificata questa fiducia?

È questa una questione aperta circa venti anni or sono dal fisico americano S. P. Langley (²), vivamente dibattuta fino ad oggi ed ancora insoluta La questione è di fondamentale importanza per molti rami di scienza; conviene aggiungere però, che è in pari tempo fra le più difficili, che si presentino nella astronomia fisica, perchè pochi problemi dipendono da un così gran numero di fattori male assoggettabili al calcolo (³).

(¹) Come le leggi Kepleriane sussisterebbero rigorosamente per il caso di due soli punti materiali soggetti all'attrazione Newtoniana.

(²) Langley, *On the amount of the atmospheric absorption*. The American Journal of Science, Third Series, vol. XXVIII, 1884, pag. 163.

(³) Cfr. Müller u. Kempf, *Untersuchungen über die Absorption des Sternenlichts in der Erdatmosphäre angestellt auf dem Aetna und in Catania*. Publicationen des Astrophysikalischen Observ. zu Potsdam, Bd. XI, n. 5 (1898), pag. 278.

1. Il potere assorbente dell'atmosfera dipende infatti in prima linea da quell'insieme di dati sperimentali e di leggi empiriche, che possediamo intorno alla costituzione fisica dell'atmosfera, vale a dire intorno alle condizioni di temperatura, pressione e umidità alle varie altezze. Di tali elementi noi conosciamo direttamente il valore appena per la superficie terrestre. Per gli strati atmosferici fino a 9000^m si può ancora ricorrere ai dati, che forniscono le ascensioni aeronautiche, tuttavia col grave inconveniente, che quei dati si riferiscono in generale a tempi e luoghi del tutto diversi da quelli, dove se ne fa l'applicazione. Al disopra di dieci o dodici km. di altezza non conosciamo più quasi nulla di sicuro circa la costituzione dell'atmosfera, e bisogna ricorrere a induzioni più o meno fondate. Ma oltrechè dalla temperatura t, dalla pressione p e dalla umidità ψ l'assorbimento atmosferico dipende da altre circostanze, che sfuggono per ora completamente ai nostri mezzi d'indagine: e il pulviscolo degli strati inferiori, e le sabbie tenuissime trasportate dalle correnti superiori sono tutte cause di perturbazione della trasparenza atmosferica, le quali agiscono in modo eminentemente irregolare, senza che si abbia alcun mezzo ausiliario, come si ha invece pei tre elementi p, t, ψ relativi alla dinamica dell'atmosfera, per misurarne l'influenza. Per avere una rappresentazione palmare del grado di difficoltà del problema della estinzione della luce nell'atmosfera terrestre, basta confrontarlo col problema, per tanti rispetti così intimamente collegato al nostro, della refrazione astronomica. Tutti gli elementi, che intervengono nello studio della refrazione, intervengono anche nel problema della estinzione, ma oltre a questi anche altri, che, mentre influiscono poco o nulla sulla refrazione, fanno variare la estinzione fino a renderla eventualmente infinita, caso, che per la refrazione non si presenta mai. Per la refrazione è terminato ogni studio, quando si è determinata la forma della traiettoria dei raggi luminosi nell'atmosfera. Per la estinzione comincia appena allora il problema, perchè raggi violetti e raggi rossi, i quali traversano l'atmosfera lungo traiettorie pressochè identiche, vengono assorbiti in modo e grado del tutto diverso (assorbimento selettivo).

2. Tutte queste circostanze, che intervengono a complicare la soluzione del problema, non vennero naturalmente considerate dai primi, che si occuparono della questione dell'assorbimento atmosferico, e solo a poco a poco il perfezionarsi delle osservazioni e i progressi dell'analisi misero in luce i varî lati del problema. Così Bouguer (¹) (1729) e Lambert (²) (1760) non tennero conto, nè della vera forma della traiettoria luminosa, che essi ammisero rettilinea, nè del decrescimento della temperatura dell'aria coll'altezza, nè della probabile differenza di trasparenza fra gli strati inferiori e superiori dell'atmosfera e molto meno, ben s'intende, dell'assorbimento selettivo. Laplace (³) (1805) apportò un lieve perfezionamento alla formola di Bouguer, tenendo conto, fino a un certo segno, nel calcolo degli spessori atmosferici attraversati dai

(¹) Bouguer P., *Essai d'optique sur la gradation de la lumière*. Paris, 1729. — Idem, *Traité d'optique sur la gradation de la lumière*, ouvrage posthume, publié par M. l'Abbé de La Caille. Paris, 1760.

(²) Lambert J. H., *Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*. Augustae Vindelicorum, 1760 (Edito in tedesco da F. Anding, Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Nr. 31-33. Leipzig, 1892).

(³) Laplace, *Mécanique céleste*, tome IX, chap. III.

raggi luminosi, della curvatura della loro traiettoria dipendente dalla refrazione astronomica. Molto tempo dopo (nel 1882) Maurer (¹) cercò di completare la trattazione di Laplace, nel senso di tener conto della vera forma della traiettoria con tutto il rigore delle ordinarie teorie della refrazione, ma, come ebbi a mostrare in altro luogo (²), un grave abbaglio da lui preso nella semplificazione di certi integrali fece sì, che la sua formola è da riguardare, come molto più scorretta di quelle di Bouguer e di Laplace. Hausdorff (³) nel 1895 svolse minuziose ricerche analitiche all'intento di stabilire una formola d'estinzione, che si accordasse tanto coi dati di fatto, che possediamo circa la costituzione fisica dell'atmosfera, quanto colle accurate osservazioni di estinzione eseguite da G. Müller a Potsdam, ma egli fallì il suo scopo, e non accade qui di spiegarne più minutamente il perchè (⁴). Non è a mia cognizione, che altri lavori siano comparsi su questo argomento — del calcolo degli spessori atmosferici corrispondenti alle varie distanze zenitali — fino ai miei, dei quali mi permetto di far qui un breve cenno.

In un primo studio sulla teoria d'estinzione di Bouguer (⁵) rettificai la nota formola di estinzione data dal grande fisico francese di un non lieve errore sfuggito singolarmente ad una estesa serie di illustratori (Forbes, Crova, Radau, Maurer, Angot, Violle, Chistoni, Müller ed altri). Gli sviluppi da me dati in questo primo lavoro erano esatti, per quanto comportava l'ipotesi da Bouguer assunta circa la costituzione dell'atmosfera, ma risentivano tuttavia, come gli sviluppi di Bouguer, dell'inconveniente di riuscire di convergenza lentissima per forti distanze zenitali; anche questo inconveniente però veniva da me tolto in un lavoro successivo (⁶), nel quale detti uno sviluppo della estinzione, fondato ancora sulle ipotesi fatte da Bouguer circa la costituzione dell'atmosfera, ma praticamente applicabile per qualunque distanza zenitale.

Presi in esame quindi (⁷) le altre teorie della estinzione, principalmente quelle di Laplace e di Maurer, e mostrai come i perfezionamenti apportati da queste teorie, nel senso di tener conto dell'effetto della refrazione per il calcolo degli spessori atmoferici, siano, nel primo caso, illusorî, nel secondo caso, come già si è detto, falsi del tutto; questo dimostrai, dando la forma dell'integrale della estinzione, quale risulta da un'analisi rigorosa del problema, fondata sulle stesse ipotesi, che si fanno nelle

(¹) Maurer, *Die Extinction des Fixsternlichtes in der Erdatmosphäre in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraction*. Dissertatio inauguralis, Zürich, 1882. V. anche G. Müller, *Photometrie der Gestirne*, pag. 128 (1896).

(²) A. Bemporad, *Sulla teoria della estinzione atmosferica*. Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital., XXXII (1903), pag. 49.

(³) Hausdorff, *Ueber die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre*. Sitzungsber. der Sächs. Gesell. der Wissensch. 1895, pag. 401.

(⁴) V. in proposito la recensione di P. Kempf in *Vierteljahrschr. der Astronom. Gesell.* Jahrg. 31.

(⁵) A. Bemporad, *Sulla teoria d'estinzione di Bouguer*. Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital., XXX (1901).

(⁶) A. Bemporad, *Sopra un nuovo sviluppo dell'integrale della estinzione atmosferica*. Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital., XXXI (1902).

(⁷) A. Bemporad, *Sulla teoria della estinzione atmosferica*. Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital., XXXII (1903).

migliori teorie della refrazione. Di questa forma rigorosa ho dato infine uno sviluppo convergentissimo e valido per qualunque distanza zenitale in un lavoro del tutto recente (¹), nel quale ho discusso anche la influenza sulla estinzione delle variazioni di temperatura e pressione e infine della posizione geografica del luogo d'osservazione. Questa parte del problema, che riguarda il calcolo degli spessori atmosferici attraversati dai raggi incidenti con data distanza zenitale, può dunque considerarsi come ampiamente trattata e praticamente risoluta con esattezza paragonabile a quella, che si raggiunge nelle teorie così perfezionate della refrazione astronomica.

3. Ma, come si è detto sopra, una volta determinato lo spessore d'aria, che attraversano i raggi degli astri per giungere fino a noi, il problema della estinzione non è che per metà risoluto, perchè ignoriamo con quale legge varî la trasparenza specifica dell'atmosfera coll'altezza e non siamo in grado di valutare l'importo dell'assorbimento selettivo sulle diverse radiazioni percorrenti la stessa traiettoria. Si presenta dunque il problema di studiare separatamente la influenza di queste due cause perturbatrici. Che ad una almeno di queste due cause debbano corrispondere importi sensibili nel fenomeno della estinzione, è fuori di dubbio. Ripetute osservazioni, sulle quali torneremo in seguito, hanno mostrato infatti, che gli strati inferiori dell'atmosfera (fino a due o tremila metri) posseggono un coefficiente di assorbimento molto più rilevante di quello a cui conducono — per l'atmosfera complessiva — le ordinarie determinazioni attinometriche e fotometriche mediante la legge di Bouguer-Pouillet, e questo maggiore assorbimento non può spiegarsi, che coll'una o coll'altra delle due cause accennate. Una prova particolarmente convincente, che la detta legge non può da sola spiegare il fenomeno della estinzione, neppure in casi, per dir così, ideali di purezza dell'atmosfera, è stata da me fornita colla mia « nuova riduzione delle osservazioni astrofotometriche fatte dal prof. G. Müller al Säntis » (²). Avendo io ottenuto infatti in questa riduzione per le singole stelle in ciascuna delle sere d'osservazione la *luminosità apparente allo Zenit* e il *coefficiente di trasmissione dell'atmosfera* col fondamento della teoria di Bouguer-Pouillet, avrebbe dovuto risultare fra questi due valori, in relazione al loro significato fisico, questo semplice legame, che nelle sere, nelle quali il coefficiente di trasmissione dell'atmosfera risultava maggiore, fosse anche maggiore la luminosità apparente allo Zenit. Lungi dall'avvenir questo, in ben $^3/_4$ dei casi risultò precisamente l'opposto. Le osservazioni astrofotometriche dunque, nella perfezione a cui sono state spinte dall'opera indefessa di Müller, conducono a manifestazioni, che non si sanno spiegare colle ipotesi fin qui ammesse; è dunque bene il momento di indagare, quale sia la causa probabile di tali manifestazioni. A tale scopo è diretto il presente lavoro ed uno dei risultati principali è quello di mettere in luce la influenza fin qui molto discussa, ma *giammai quantitativamente dimostrata* dell'assorbimento selettivo e di indicare un nuovo procedimento singolarmente efficace per lo studio di questo lato del problema (dell'altro si è già detto sopra).

4. Non sarà inutile, perchè risulti più chiaro, quale sia lo stato attuale della questione, e di qual natura e importanza sia il progresso, che ci proponiamo di otte-

(¹) A. Bemporad, *Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre*. Mitteilungen der Grossh. Sternwarte zu Heidelberg (astrometr. Abteilung) IV, 1904.

(²) Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital., XXXI, 1902.

nere col lavoro attuale, un rapido riassunto storico delle fasi principali, per le quali è passata l'idea dell'assorbimento selettivo dal suo nascere fino ad oggi.

Nello stabilire la legge di assorbimento, che porta il suo nome, Bouguer, non teneva conto che della *quantità* dei raggi, che rimangono assorbiti da un determinato strato d'aria. Egli faceva all'incirca la considerazione seguente, riprodotta del 1838 da Pouillet [1].

Suppongasi, che la intensità luminosa I di un dato fascio di raggi F venga ridotta, nell'attraversare un dato strato assorbente MM, ad I′. Se si considera allora accanto

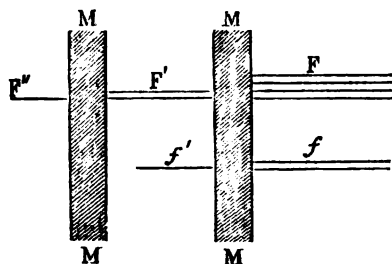



Fig. 1.

al primo fascio di raggi F un secondo fascio f di intensità *i precisamente uguale* ad I′, il *medesimo strato* assorbirà i due fasci F, f nella medesima ragione, vale a dire, la intensità luminosa i' del fascio emergente f', che corrisponde ad f, sarà la stessa parte di i come I′ di I. In simboli

$$\frac{i'}{i} = \frac{I'}{I}.$$

Se ora si fa passare F′ attraverso un secondo strato *identico* al primo, vista l'*identità* del fascio F′ e del fascio f, e vista altresì la identità dei mezzi assorbenti, il fascio F′ verrà ridotto da questo secondo strato assorbente nella stessa ragione, come f dal primo strato. In simboli

$$\frac{I''}{I'} = \frac{i'}{i} = \frac{I'}{I},$$

da cui subito

$$\frac{I''}{I} = \left(\frac{I'}{I}\right)^2.$$

Continuando questa considerazione per una serie di strati sempre identici al primo, ne segue subito la legge esponenziale dell'assorbimento di Bouguer-Pouillet. Se conveniamo di chiamare *coefficiente di trasmissione* di uno strato il rapporto della

(1) C. R. 1838, t. VII, pag. 24.

intensità luminosa trasmessa (I') alla intensità luminosa incidente (I), la legge di Bouguer-Pouillet può enunciarsi, come segue:

Il coefficiente di trasmissione di uno strato diminuisce in ragione geometrica coll'aumentare in ragione aritmetica dello spessore dello strato assorbente. In simboli, posto eguale a p il coefficiente di trasmissione di uno strato unitario, e detta s la misura dello spessore dello strato considerato

$$I' = I\, p^s. \tag{1}$$

È ora facile vedere, quale sia il lato debole del ragionamento di Bouguer. Il ragionamento è legittimo, solo in quanto possa ammettersi la identità del fascio emergente F' con una certa frazione f della luce incidente. Ora è chiaro, che, se si fa passare ad es. un raggio di luce bianca attraverso un vetro rosso, il raggio emergente non è affatto paragonabile fotometricamente con una frazione qualunque della luce incidente, perchè le due luci in questione sono qualitativamente oltrechè quantitativamente diverse. In altri termini il ragionamento di Bouguer non può valere rigorosamente che per raggi semplici di una determinata lunghezza d'onda, e cade in difetto, se applicato ad una qualunque luce composta, a meno che il mezzo assorbente, che si considera, non possieda esattamente lo stesso potere assorbente per tutte le radiazioni dello spettro, caso che forse non si presenta in natura, e che in ogni modo non è quello dell'atmosfera. Ora Bouguer stesso applicò la sua legge a determinare l'assorbimento esercitato dall'atmosfera terrestre sulla luce degli astri. A tal uopo egli misurò la intensità luminosa dei raggi lunari a due diverse altezze dell'astro sull'orizzonte (19° 16' e 66° 11'); calcolò colla formola d'estinzione, che porta il suo nome, il rapporto degli spessori d'aria attraversati dai raggi nei due casi, e ne ricavò facilmente il coefficiente di trasmissione dell'atmosfera nella direzione verticale.

Poichè il procedimento di Bouguer è in sostanza quello seguito nella massima parte delle ricerche attinometriche e astrofotometriche fino ad oggi, e circa la validità di questo procedimento si è accesa nell'ultimo ventennio la questione mentovata in principio, non sarà fuor di luogo l'accennare un poco più davvicino, come si determini dalle osservazioni attinometriche o fotometriche d'un astro in due distanze zenitali molto diverse il coefficiente di trasmissione p dell'atmosfera in direzione verticale.

Secondo il significato di questa costante, se i_0 è la luminosità apparente d'un astro allo Zenit e I la luminosità effettiva al limite dell'atmosfera, sarà

$$i_0 = Ip.$$

Se poi s_z denota lo spessore d'aria attraversato da raggi incidenti colla distanza zenitale z (lo spessore in direzione verticale calcolato come 1) e i_z indica la corrispondente intensità luminosa (apparente), sarà ancora

$$i_z = Ip^{s_z}.$$

Eliminando quindi I fra le due equazioni.

$$i_z = i_0\, p^{s_z - 1}. \tag{2}$$

Da due equazioni di questa forma corrispondenti a distanze zenitali molto diverse possono ricavarsi — essendo note le intensità luminose i_z dalla osservazione e gli spessori atmosferici s_z dalla teoria della estinzione — le due incognite i_0 e p.

5. Nel 1841 Forbes [1] in una lucida esposizione critica dei lavori di Bouguer, Lambert, Laplace e Pouillet sull'assorbimento atmosferico, attaccava la validità della legge esponenziale di Bouguer-Pouillet colla seguente semplicissima considerazione. Se si fa passare luce di varî colori attraverso vetri rossi di differente spessore si vedrà, che i vetri sottili lasciano passare più o meno tutte le radiazioni dello spettro, mentre i vetri più spessi lasciano passare soltanto i raggi rossi; il coefficiente di trasmissione di tali vetri risulterà quindi necessariamente diverso, secondo che lo si determina da vetri sottili o da vetri molto spessi, e non altrimenti accadrà per l'atmosfera. Forbes precisò anzi di più, che il coefficiente di trasmissione deve risultare maggiore, se determinato da spessori maggiori; infatti la luce, che ha attraversato un strato S di spessore rilevante è già spogliata delle radiazioni che rimangono più facilmente assorbite, quindi il coefficiente di trasmissione, che si troverà confrontando l'assorbimento di un tale strato S con quello di uno strato 2 S, essendo relativo a radiazioni, che rimangono meno facilmente assorbite, sarà necessariamente maggiore di quello, che risulterebbe dal confronto degli assorbimenti di uno strato s e di uno strato $2s$, supposto s notevolmente minore di S.

6. Nel 1877 Radau [2] osservava esplicitamente, che la formola di Bouguer-Pouillet vale rigorosamente solo per luce monocromatica, ed aggiungeva, che la intensità della radiazione trasmessa da un astro attraverso l'atmosfera dovrebbe esprimersi colla somma di una serie di termini, ognuno corrispondente ad un fascio particolare di raggi secondo la formola

$$I' = I_1 p_1^z + I_2 p_2^z + \cdots \tag{3}$$

7. Nel 1884 Langley (l. c.) venne ad affermazioni più precise. Assumendo per la intensità luminosa I' trasmessa dall'atmosfera la stessa espressione (3) che, aveva proposto Radau, Langley dava in forma rigorosamente matematica la dimostrazione di quanto aveva già asserito Forbes, che cioè il coefficiente di trasmissione determinato al modo di Bouguer-Pouillet riesce necessariamente troppo grande [3], ed esprimeva per conto suo l'opinione, che l'effettivo assorbimento dell'atmosfera ammonti almeno al 40 % della radiazione incidente, anzichè al 18 o 20 %, come si ottiene col metodo consueto. Langley fondava questo suo convincimento anzitutto sul fatto ben noto dopo le esperienze di Melloni e di altri, che il coefficiente di assorbimento cresce gradatamente, procedendo dalle parti meno rifrangibili verso le parti più rifrangibili dello spettro; in secondo luogo poi sul fatto, che specialmente nella parte più luminosa dello spettro (in vicinanza della linea D) sono numerosissime le linee telluriche, linee oscure corrispondenti a radiazioni, che rimangono quasi totalmente assorbite nel

[1] Forbes J. D., *On the transparency of the atmosphere and the law of extinction of the solar rays in passing through it.* Phil. Trans. 132, pag. 225 (1842).

[2] Radau, *Actinométrie*, Paris, 1877, pag. 23.

[3] La dimostrazione di Langley è stata riprodotta in varî luoghi, fra gli altri nella *Photometrie der Gestirne* di G. Müller, pag. 139 (1897).

loro percorso attraverso l'atmosfera terrestre, e che appaiono straordinariamente rinforzate, quando i raggi osservati siano alquanto obliqui, epperò alquanto rilevanti le masse d'aria attraversate. L'uno e l'altro fenomeno fan pensare necessariamente, che la luce, la quale ha traversato un largo spessore d'aria venga assorbita molto diversamente dalla luce, che ha traversato uno spessore relativamente piccolo (precisamente come aveva intuito Forbes), e allora cadono in difetto le ordinarie determinazioni dell'assorbimento atmosferico secondo la teoria di Bouguer-Pouillet, per le quali si presuppone appunto uno stesso coefficiente di assorbimento (o di trasmissione) per stelle zenitali, come per stelle molto vicine all'orizzonte.

8. Sul rigore teorico della dimostrazione di Langley nessuno pose dubbio. Le divergenze nacquero sulla portata pratica di questa obbiezione, e la quasi generalità dei fisici e degli astronomi, che si occupavano di ricerche attinometriche o astrofotometriche, ritenne, che il calcolo di Langley fosse di troppo esagerato. Michalke (1), Abney (2), Seeliger (3), Müller (4), portarono svariate considerazioni, quale d'indole teorica, quale d'indole sperimentale, in prova che l'assorbimento dell'atmosfera (in direzione verticale) non potesse superare di molto il 20 %.

Si osservava anzitutto, che i raggi più luminosi dello spettro sono compresi in una zona relativamente ristretta, verso il giallo, cosicchè il coefficiente di trasmissione della radiazione complessiva coinciderà molto sensibilmente col coefficiente di trasmissione di queste radiazioni più intense. L'errore, che si viene a commettere, assumendo un unico coefficiente di trasmissione anzichè tanti, quante sono le radiazioni semplici, non può essere dunque molto grande.

Si osservava ancora, che se l'assorbimento selettivo ha in realtà tutta la portata supposta da Langley, dovrebbero risultare, conforme all'osservazione di Forbes, valori diversi per il coefficiente di trasmissione, determinandolo da strati atmosferici di differente spessore. Così ricavando il coefficiente di trasmissione nel modo sopra indicato dalle osservazioni attinometriche o fotometriche d'un astro fatte a varie distanze zenitali, $z_1 > z_2 > z_3, \ldots$ dovrebbe notarsi un andamento ben pronunziato nei valori del coefficiente di trasmissione ricavati dalle singole coppie (z_1, z_2), $(z_1, z_3) \ldots$

Ora le più accurate osservazioni, come quelle di Seydel a Monaco e di Müller a Postdam non presentano alcuna traccia di un siffatto andamento. Questa obbiezione era stata bensì preveduta da Langley; egli aveva dimostrato infatti nella pubblicazione citata, come, ammettendo una certa particolare composizione per il raggio luminoso, possa accader benissimo, che le osservazioni di estinzione (metodo di Bouguer-

(1) Michalke C., *Untersuchungen über die Extinction des Sonnenlichtes in der Atmosphäre.* Astr. Nachr. 113, n. 2691 (1886).

(2) Abney W., *On the atmospheric transmission of visual and photographycally active light.* Monthly Not. 47, pag. 260 (1887). — *Transmission of sunlight through the earth's atmosphere.* Phil. Trans. 178, pag. 251 (1887) e Phil. Trans. 184, pag. 1 (1893).

(3) Seeliger H., *Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre.* Sitzungsber. der Münchner Akad., II, Cl. 21, pag. 247 (1891).

(4) Müller G., *Photometrische und spectroskopische Beobachtungen, angestellt auf dem Gipfel des Säntis.* Public. des Astrophys. Observ. zu Postdam, 8, n. 27, pag. 1 (1891). V. inoltre *Photometrie der Gestirne,* pag. 139 e Müller-Kempf, op. cit.

Pouillet) corrispondenti a varie distanze zenitali diano tutte valori dell'assorbimento attorno a 0.2, mentre pure il vero valore dell'assorbimento è 0.4. Ma di rimando venne osservato [1], che anzitutto il caso supposto da Langley è puramente ipotetico, e nessuno ci dice, che avvenga qualche cosa di simile in natura; in secondo luogo, che anche nel caso supposto da Langley, che costituisce certo un caso estremo, l'andamento nei valori di p ricavati da diverse distanze zenitali non è tuttavia così piccolo, che non dovesse venir rivelato da accurate misure astrofotometriche.

Un' ultima circostanza infine, che sembra contraria alla opinione espressa da Langley, è la seguente. Noi possiamo variare lo spessore d'aria attraversato dai raggi d'un astro, non solo, osservando quest'ultimo a diverse distanze zenitali, ma anche e più efficacemente, osservandolo da luoghi situati a differenti altezze sul livello del mare. Se ora l'influenza dell'assorbimento selettivo — nei suoi due differenti aspetti: variabilità continua del coefficiente di trasmissione secondo la lunghezza d'onda e variabilità saltuaria corrispondente alle linee telluriche — è così sensibile, come suppone Langley, inalzandosi nell'atmosfera, vale a dire determinando il coefficiente di trasmissione da strati via via sempre più piccoli, dovrebbero risultare — sempre conforme all'osservazione di Forbes — valori via via minori per il coefficiente di trasmissione. Questo risulta del resto chiaramente anche da un breve esame della formola (2). Inalzandosi, aumenteranno infatti tanto la i_0 che la i_z, perchè minore è lo spessore d'aria attraversato sia dai raggi zenitali, che dai raggi incidenti colla distanza zenitale z; ma, se è fondato in tutta la sua estensione l'asserto di Langley, dovrebbe notarsi un molto maggiore accrescimento in i_0 che in i_z, se z indica una distanza zenitale assai grande, perchè in i_0 vengono a comparire qualità di raggi, che presso i_z, cioè per un percorso molto radente all'orizzonte, rimangono totalmente estinte o molto più fortemente assorbite. D'altra parte si può dimostrare [2], che la funzione $F(z) = s_z$ si mantiene sensibilmente invariata, col variare dell'altezza del luogo d'osservazione sul livello del mare. Appar chiaro allora dalla (2), che, dato l'aumento non proporzionale delle i_0, i_z nel senso indicato sopra, e data la invariabilità della $F(z) = s_z$ coll'altezza, dovrà necessariamente diminuire, via via che ci si inalza, il coefficiente di trasmissione p. Ora le migliori determinazioni attinometriche e astrofotometriche eseguite su alte montagne non danno alcun indizio di tale contegno, se mai del contegno opposto. Questa fu ritenuta dunque come una terza prova, che l'obbiezione di Langley non potesse avere pratica importanza.

Senza accennare varî altri argomenti, che vennero portati contro l'obbiezione di Langley, ci limiteremo ad osservare, che tutti avevano un difetto fondamentale, e cioè erano tutti più o meno argomenti, se così è lecito esprimersi, *negativi*. Dal non verificarsi una data relazione *accessoria* si voleva inferire, che l'obbiezione di Langley non potesse avere importanza pratica, nè si rifletteva, che le circostanze accessorie, appunto perchè tali, possono bene venir in conflitto le une colle altre e non dare le

[1] V. Müller G., *Photometrische und spectroskopische Beobachtungen angestellt auf dem Gipfel des Säntis*. Public. des Astrophys. Observ. zu Potsdam, 8 (n. 27), pag. 8 (1891) e inoltre Müller-Kempf, op. cit., pag. 214 (1898).

[2] V. in proposito il mio lavoro già citato: *Zur Theorie der Extinktion des Lichtes* . . . cap. V.

manifestazioni volute. Appunto nel caso particolare in questione è ben chiaro, che le due circostanze, 1° dell'assorbimento selettivo, 2° del maggior potere assorbente degli strati inferiori dell'atmosfera, tendono a produrre effetti contrari, perchè la prima, come si è mostrato, tende a far diminuire il coefficiente di trasmissione coll'altezza, mentre la seconda conduce necessariamente alla manifestazione opposta. Non si può riconoscere dunque che un valore molto limitato a tutti gli argomenti portati contro Langley, ma d'altra parte è giusto riconoscere, che Langley stesso non portava dal canto suo alcuna prova sperimentale, che l'assorbimento dell'atmosfera fosse, com'egli asseriva, del 40 %, e per quanto valore possa avere la convinzione personale di un tale osservatore, questa sola convinzione è per lo meno contrappesata da quella contraria di osservatori non meno abili, come Abney, Müller ed altri. Nel fatto poi, malgrado le numerose ricerche e teoriche e pratiche istituite dal 1880 fino ad oggi su questo argomento, solo oggi, col presente lavoro, viene stabilita la detta prova sperimentale in senso completamente favorevole alle vedute di Langley.

9. Si comprende bene, che, finchè la questione si manteneva in questi termini, non avrebbe fatto un passo verso la soluzione. Un elemento nuovo venne frattanto portato dallo stesso Langley nel campo delle esperienze. Egli pensò, che, se a noi è impossibile portarci fuori dell'atmosfera, in cui viviamo, per determinarne direttamente l'assorbimento, ci è però possibile determinare direttamente l'assorbimento di una porzione considerevole della massa atmosferica — perfino della metà — inalzandosi sufficientemente sul livello del mare. Se si dispongono infatti due attinometri, uno sulla cima di un'alta montagna e l'altro alle falde, la differenza dei dati relativi, ridotti in un'unica scala, esprimerà senz'altro l'assorbimento (nella direzione verticale) dello strato d'aria compreso fra le due stazioni. Langley eseguì tali misure al Mount Whitney in California [1], e l'assorbimento di uno strato inferiore di circa duemila metri risultò effettivamente, se non proprio nella misura che egli aveva asserito, sempre però notevolmente maggiore ($\frac{3}{2}$ circa) di quello ottenuto col metodo di Bouguer-Pouillet.

Questa sola esperienza non dimostrava però ancora nulla, perchè il risultato ottenuto da Langley poteva farsi dipendere tanto dal fenomeno dell'assorbimento selettivo, quanto dalla circostanza molto plausibile di un maggior potere assorbente per gli strati inferiori dell'atmosfera, senza che ne risultasse una prova categorica contro la validità *in generale* della teoria di Bouguer-Pouillet.

10. Nel 1889 Müller eseguiva accurate osservazioni astrofotometriche per lo studio della estinzione sulla cima del Säntis in Svizzera [2]. Risultò un accordo soddisfacentissimo fra le osservazioni e la teoria di estinzione di Laplace (fondata sulla legge esponenziale di Bouguer). Di più il coefficiente di trasmissione per tutta l'atmosfera risultò quasi perfettamente identico a quello già ottenuto da Müller stesso per Potsdam, contrariamente a quanto sarebbe da aspettare secondo le idee di Langley.

Questa deduzione contraria a Langley perde però molto del suo valore, se si considera, che le serie di osservazioni, fra le quali si istituisce il confronto sono state

(1) Langley, *Researches on solar heat and its absorption by the earth's atmosphere. A report of the Mount Whitney expedition.* Professional papers of the signal service. U. S. nr. 15.

(2) Müller, *Photometrische und spectroskopische Beobachtungen, angestellt auf dem Gipfel des Säntis.* Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. VIII, 1891.

ottenute in tempi e luoghi del tutto diversi. Per questo nel 1894 Müller e Kempf si proposero di fare una esperienza analoga in condizioni tali, che non potesse più lasciar luogo a dubbî, almeno per quanto era lecito sperare. Essi si proposero di determinare mediante misure astrofotometriche simultanee: 1° la curva di estinzione separatamente per Catania e per l'Etna (col metodo di Bouguer-Pouillet); 2° l'assorbimento dello strato Catania-Etna nella direzione verticale (col metodo di Langley). Se la teoria di Bouguer-Pouillet era valida, la differenza degli assorbimenti trovati separatamente, mediante detta teoria, per le due stazioni doveva risultare eguale all'assorbimento determinato direttamente per lo strato compreso fra le due stazioni.

I risultati [1] non corrisposero alle speranze, anzi, caso singolare, riuscirono contradittorî in tutti i sensi, vale a dire, nè si adattarono alle vedute di Müller e Kempf nè confermarono le idee di Langley. Risultò infatti da una parte un assorbimento rilevantissimo (più dell'80 %, se esteso a tutta l'atmosfera) per lo strato Catania-Etna, e questo sembrava confermare l'opinione di Langley. Ma risultò in pari tempo un coefficiente d'assorbimento straordinariamente più forte per Catania, che per l'Etna, mentre secondo la teoria dell'assorbimento selettivo sarebbe da attendere il contrario. Non occorre aggiungere poi, che l'assorbimento ottenuto direttamente non corrispondeva affatto alla differenza degli assorbimenti trovati mediante la teoria per Catania e per l'Etna.

11. Questo è lo stato attuale della questione, perchè dopo le esperienze di Müller e Kempf non sono apparsi altri lavori di rilievo su questo argomento. L'impressione, che deve trarre ognuno dall'esposto, è che qui siamo in presenza di un fenomeno molto complesso, al quale concorrono insieme tutti gli elementi proposti dai varî scienziati, *e l'assorbimento generale dell'atmosfera secondo una legge, che può essere benissimo in prima approssimazione quella di Bouguer-Pouillet, e il maggior potere assorbente degli strati inferiori, e l'assorbimento selettivo. Queste ultime due cause perturbatrici sono particolarmente difficili a indagare, perchè i loro effetti, coi procedimenti di ricerca usati finora, tendono ad elidersi, e nei singoli casi ora l'uno, ora l'altro elemento prevale.*

Ora ecco in che consiste il contributo, che io porto alla interessante questione, *e che definitivamente la risolve in senso favorevole alle idee di Forbes e di Langley.*

Se ben si considera, la difficoltà principale del problema è tutta quella di procurarsi la determinazione diretta — cioè indipendente da qualsiasi teoria — dell'assorbimento esercitato da strati atmosferici di differente spessore, perchè, se si potessero ottenere per molti strati siffatti i valori *effettivi* dell'assorbimento, e quindi del coefficiente di trasmissione, si potrebbe riconoscere, se si verifica o no quell'andamento caratteristico prodotto dall' assorbimento selettivo, conforme alla considerazione di Forbes e Langley (aumento del coefficiente di trasmissione coll'aumentare dello spessore dello strato). Ora una determinazione diretta dall'assorbimento esercitato da un

[1] Müller und Kempf, *Untersuchungen über die Absorption des Sternenlichts in der Erdatmosphäre, angestellt auf dem Aetna und in Catania.* Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. XI, 1898.

determinato spessore atmosferico si può avere (col modo tenuto da Langley e da Müller-Kempf) mediante osservazioni simultanee di stelle zenitali da due stazioni a differente altezza, ricavandosi lo spessore (in unità di *atmosfera*) molto semplicemente dalle pressioni barometriche nei due luoghi. Si potrebbe *teoricamente* estendere questo procedimento nel senso di moltiplicare il numero delle stazioni, ma ognuno intende subito, quali straordinarie difficoltà si opporrebbero alla messa in pratica di un simile progetto, che richiederebbe l'azione simultanea di almeno tre osservatori e tre strumenti per un non breve periodo di tempo. Orbene, quella estensione, che è praticamente impossibile ottenere nel senso dell'altezza, io ho trovato modo di ottenerla nel senso trasversale, ho trovato cioè il modo di calcolare l'importo effettivo dell'assorbimento subito da un raggio *comunque inclinato* fra due determinate altezze. In altri termini, quella determinazione diretta dell'assorbimento, che Langley e Müller-Kempf ricavavano soltanto dal confronto di osservazioni simultanee di stelle zenitali, sono riuscito ad ottenerla anche da coppie di osservazioni istituite ad un'altra distanza zenitale qualunque, purchè approssimativamente la stessa nelle due stazioni. Il modo per ottener questo è teoricamente semplicissimo; basta calcolare lo spessore d'aria attraversato da un raggio comunque inclinato fra le due altezze considerate, problema, che, dietro i noti principî della refrazione astronomica e della fisica dell'atmosfera, può risolversi per qualsiasi inclinazione dei raggi con rigore non minore di quello che per la direzione verticale.

Ora per singolare ventura, osservazioni nel senso indicato sono state eseguite appunto da Müller e Kempf per Catania e per l'Etna, giacchè questi due osservatori fecero colla condizione della simultaneità, oltrechè osservazioni di stelle zenitali, anche osservazioni di stelle estrazenitali, per determinare la curva d'estinzione separatamente per le due stazioni (secondo il metodo di Bouguer-Pouillet). Ho potuto applicare subito dunque a questo materiale d'osservazione le mie formole e tavole numeriche, e i risultati dimostrano all'evidenza la giustezza delle idee di Forbes e di Langley.

Il materiale in questione non è sufficiente per potervi fondare sopra deduzioni circa l'ammontare complessivo dell'assorbimento dell'atmosfera; non v'ha dubbio però, che, ripetendo tali osservazioni in più vasta scala, potranno ottenersi risultati molto istruttivi, circa il modo in cui procede questo assorbimento. Rimane così aperto un nuovo campo di interessanti ricerche, e vengono insieme forniti i necessarî mezzi di calcolo per tutti i casi possibili in pratica, poichè le tavole numeriche da me costruite per il calcolo degli spessori atmosferici prevedono il caso di inclinazioni dei raggi fino a un grado sopra l'orizzonte e di stazioni comunque situate fra il mare e 5000^{m}.

12. In quello che segue, darò dapprima la dimostrazione rigorosa, che le nuove determinazioni da me suggerite sono da considerare con le debite cautele come non meno dirette di quelle che si ottengono dalle osservazioni di sole stelle zenitali. Accenno poi lo sviluppo analitico, al quale potrebbe ridursi la determinazione dello spessore d'aria attraversato da raggi incidenti con una data distanza zenitale fra due altezze H_0 e H_1, sviluppo che farebbe dipendere la detta determinazione dalle tavole

numeriche da me già date per il calcolo della estinzione atmosferica generale (1). Indico in seguito il procedimento, che venne da me effettivamente seguito per la costruzione delle estese tavole comunicate in appendice, le quali hanno per iscopo di fornire il valore degli spessori in discorso per qualunque distanza zenitale fino a $z = 89°$ e per qualunque dislivello fra 0^m e 5000^m, limiti certo sufficienti per adesso per tutte le esperienze del genere, ma non certo superflui, quando si pensi per es. agli Osservatorî del Monte Bianco e del Monte Rosa. Nei due ultimi capitoli infine applico i miei procedimenti alle osservazioni già citate di Müller e Kempf — le sole finora raccolte del genere — mostrando come ne discendano i risultati accennati sopra.

Al sig. prof. A. Riccò, che mi fu largo dei necessarî mezzi per compiere lo studio delle osservazioni eseguite da Müller e Kempf negli Osservatorî da lui diretti, mi è grato esprimere qui pubblicamente la mia più viva riconoscenza.

I.

Determinazioni dirette dell'assorbimento atmosferico da osservazioni simultanee ad altezze molto diverse sul livello del mare.

1. Misure simultanee delle intensità luminose (o calorifiche) delle radiazioni degli astri da una stazione molto elevata e da una relativamente bassa per la determinazione diretta dell'assorbimento esercitato da un dato strato d'aria vennero ideate ed eseguite già molto prima di Müller-Kempf e di Langley (2). A questi ultimi spetta però incontestato il merito di aver dato una grande precisione ed estensione a misure di tal genere.

Il principio di tali determinazioni è semplicissimo. Quando sia noto il rapporto di scala degli strumenti adoperati e, pel caso di osservazioni fotometriche, l'equazione personale dei due osservatori, elementi, che si suppongono già determinati in precedenza e che rimangono costanti per un lungo periodo di tempo, si ha il modo di ricavare dalle misure fatte in due stazioni diverse il rapporto delle intensità luminose osservate.

Supponiamo dapprima per semplicità che si tratti di osservazioni di stelle zenitali. Per la vicinanza, in che supponiamo trovarsi le due stazioni A e B, è lecito ammettere, che la composizione degli strati atmosferici sia la stessa per le due verticali al disopra della superficie (sferica) di livello corrispondente alla stazione superiore B. Identico sarà quindi l'assorbimento esercitato nei due casi dalla porzione superiore NN dell'atmosfera, perchè identiche e sovrapponibili sono le due porzioni di traiettoria BZ_1 e B_1Z (v. fig. 2). Quindi il rapporto, secondo cui risulta ridotta la luminosità apparente (i_0) dell'astro in A rispetto alla luminosità apparente (i_1) in B, dipende uni-

(1) *Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre.* Mitteilungen der Grossh. Sternwarte zu Heidelberg (astrometrische Abteilung). N. 4, 1904.

(2) Così da Forbes al Faulhorn, da Bravais e Martins al Monte Bianco, ecc.... Prendo questa citazione dalla Memoria già mentovata di Müller e Kempf, pag. 7.

camente dall'assorbimento dovuto allo strato MM compreso fra le superficie di livello corrispondenti alle due stazioni. Questo assorbimento si ottiene dunque effettivamente all'infuori di qualunque teoria, e la sola quantità, che occorre calcolare in aggiunta per ottenere l'assorbimento *specifico* dello strato considerato, è la massa d'aria contenuta in una colonna verticale AB_1 di sezione 1.

Questa massa è facilmente calcolabile mediante i dati, che fornisce la fisica dell'atmosfera, sia con sviluppi analitici, sia con quadrature numeriche (v. Cap. seguente), sia infine, con sufficiente approssimazione, mediante una semplice combinazione delle pressioni barometriche osservate in A e in B, ammettendo le masse d'aria sovrastanti ai due luoghi senz'altro come proporzionali alle relative pressioni. Su questo

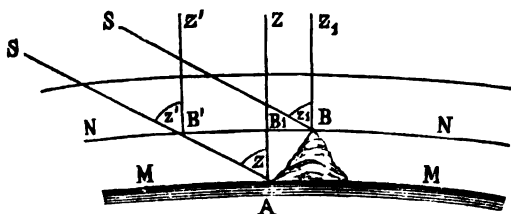



Fig. 2.

principio semplicissimo sono dunque fondate le determinazioni dell'assorbimento degli strati inferiori dell'atmosfera, come le eseguirono Langley al Mount Whitney e Müller-Kempf all'Etna.

2. Si consideri ora (v. fig. 2) un raggio dell'astro S incidente in A con una distanza zenitale z piuttosto grande, e sia B' il punto, dove la traiettoria AB'S (curva della refrazione) incontra la superficie di livello corrispondente a B. La distanza zenitale (z') del raggio considerato in B' sarà diversa da z per gli effetti concomitanti della refrazione astronomica e della sfericità delle superficie di livello, e non presenta alcuna difficoltà sostanziale la determinazione dell'angolo z' in funzione dell'angolo z e dell'altezza H di B sopra A; questo angolo z' si ottiene anzi senza alcuna integrazione da note relazioni fondamentali della refrazione astronomica. Supponiamo, che lo stesso astro S venga osservato in B precisamente alla distanza zenitale $z_1 = z'$. È chiaro, che, per le stesse ragioni dette sopra pel caso di raggi verticali, le traiettorie BS, B'S saranno perfettamente sovrapponibili e non solo di forma, ma anche nel senso, che coincideranno sulle due curve le funzioni dell'arco σ (qualunque sia la forma di queste funzioni), che rappresentano il potere assorbente dei successivi strati attraversati dai raggi in questione. Tutto questo è valido, beninteso, solo finchè si ammette, che le superficie limitanti strati di eguale assorbimento specifico possano riguardarsi come sferiche e concentriche, ipotesi questa ben familiare in tutte le teorie della refrazione astronomica. La identità dei due tratti di curva BS, B'S è altresì subordinata alla condizione, che le due stazioni non siano troppo lontane, nè in condizioni speciali, che importino probabili differenze nella costituzione dell'atmosfera pei due luoghi al di sopra della superficie di livello BB'. Così, ad esempio, non sarebbe certo molto

adatta per tali ricerche la scelta dell'Osservatorio Etneo come stazione superiore, se il cratere centrale fosse in una certa attività [1], e per una ragione analoga Müller e Kempf esclusero per le loro esperienze — malgrado presentasse incontestabili vantaggi di comodità — il Faulhorn (Svizzera), perchè la stazione inferiore sarebbe stata sotto la influenza del Brienzer See.

Esclusi casi consimili, si potrà ritenere, che sia lo stesso per le due stazioni A e B l'assorbimento dovuto alla porzione di traiettoria, che rimane al di sopra della superficie di livello BB'. Se si suppone dunque, che un medesimo astro venga osservato in A e B con tale condizione, circa i tempi d'osservazione, che risulti $z_1 = z'$, il rapporto, secondo cui risulterà ridotta l'intensità luminosa (i_0) in A rispetto a quella (i_1) osservata in B, dipenderà unicamente dall'assorbimento medio della massa d'aria attraversata lungo l'arco AB'. Tutto è ridotto dunque al calcolo di questa massa, che sarà una certa funzione $F(z, H)$ di z e di H. Ma ora gli stessi dati meteorologici, che permettono il calcolo della massa d'aria contenuta in una colonna verticale AB_1 di sezione 1, permettono, col sussidio dei noti principî della refrazione astronomica, il calcolo analogo per l'arco AB', e si potrà avere così la misura diretta del coefficiente di trasmissione medio per masse d'aria molto diverse, secondochè si varia la distanza zenitale z.

Del resto non è nemmeno indispensabile, che la condizione $z_1 = z'$ sia soddisfatta con tutto il rigore. Se si ha infatti $z_1 = z' + \zeta$ (ζ piccolo), sarà certo legittimo apportare alla luminosità osservata in B (i_1) una piccola correzione, per ridurla a quello, che sarebbe, salvo gli errori d'osservazione e perturbazioni atmosferiche accidentali, se l'osservazione fosse stata fatta alla distanza zenitale z'. Per determinare il valore di tale correzione, basta evidentemente un ragguaglio delle osservazioni fatte in B — ragguaglio, che può esser fatto, sia graficamente, sia col sussidio d'una teoria o formola empirica qualunque — dal quale risulti il coefficiente differenziale della luminosità i_1 rispetto a z per le varie distanze zenitali. In questo modo ho dovuto effettivamente procedere per la riduzione delle osservazioni di Müller e Kempf, le quali soddisfano molto prossimamente soltanto alla condizione della contemporaneità, mentre per l'eguaglianza degli angoli z_1 e z' si richiede una relazione meno semplice fra i tempi di osservazione.

3. Apparirà chiaro, dopo quanto precede, la superiorità di questo procedimento su quello ordinariamente seguito per la riduzione di osservazioni fotometriche fatte in uno stesso luogo (A) a diverse distanze zenitali (metodo di Bouguer-Pouillet). Anche con questo metodo infatti, a dir vero, a due diverse distanze zenitali z, z' corrispondono diverse masse d'aria attraversate, epperò sembrerebbe naturale ritenere, che il rapporto delle due luminosità osservate esprima l'assorbimento dovuto alla differenza delle due masse in discorso. Ma in questo caso (v. fig. 3), le due traiettorie AS, AS' sono essenzialmente diverse, ed è diversa del tutto sulle due curve la funzione dell'arco σ, che esprime il potere assorbente dei successivi strati incontrati. Nell'ignoranza

[1] Dalla riduzione delle misure di Müller e Kempf risulterà (pag. 289) che nell'epoca, in cui osservarono questi astronomi, il cratere dell'Etna non alterò menomamente la trasparenza dell'atmosfera per l'Osservatorio Etneo.

in cui siamo circa la forma di tale funzione, riesce dunque impossibile l'istituire un confronto qualsiasi fra gli assorbimenti corrispondenti a diverse masse attraversate, *senza introdurre qualche elemento ipotetico.* Col procedimento da me proposto invece si può bene asserire, che qualunque sia la forma della funzione in discorso, l'assorbimento lungo l'arco BS (fig. 2) sarà sempre con grandissima approssimazione eguale a quello lungo l'arco B'S (previa la condizione $z_1 = z'$) e si avrà quindi la determinazione diretta dell'assorbimento corrispondente ad un tratto parziale della curva descritta dai raggi luminosi. Ottenuto questo, è possibile (almeno teoricamente), riducendo infinitesimo questo tratto (vale a dire ravvicinando le due stazioni) e facendo poi variare il tratto lungo la curva (vale a dire variando il livello medio delle due

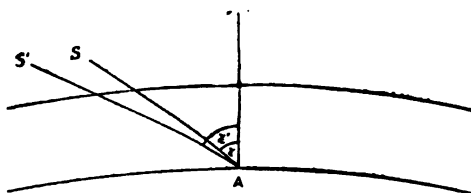



Fig. 3.

stazioni) investigare la forma della detta funzione, in ogni singola parte della curva, per lo meno fino alle altezze accessibili all'uomo.

Nella estensione da me ideata e resa possibile dalle tavole, che in appresso comunico, è dunque implicitamente contenuta la soluzione completa — entro i detti limiti — del problema dell'assorbimento atmosferico sulla luce degli astri.

II.

Calcolo analitico e numerico degli spessori atmosferici attraversati da raggi comunque inclinati fra due altezze quali si vogliano dal livello del mare a 5000^m. Tavole ausiliarie.

1. La massa $M(z, H)$ dell'aria attraversata da un raggio incidente colla distanza zenitale z fra le superficie di livello $h = 0$ ed $h = H$, viene espressa dall'integrale

$$M(z, H) = \int_0^H \delta \, d\sigma,$$

dove s'intende che $d\sigma$ rappresenti l'elemento d'arco della curva della rifrazione e δ la densità dell'aria in un punto generico di detta curva.

La massa d'aria attraversata nello stesso strato da un raggio verticale sarà espressa analogamente da

$$M(0, H) = \int_0^H \delta \, dh.$$

Infine la massa da noi assunta come unità, vale a dire la massa contenuta in una colonna verticale di sezione 1 a partire dal livello del mare fino al limite H^* dell'atmosfera sarà

$$\mu^* = \int_0^{H^*} \delta \, dh . \tag{4}$$

Poichè questa massa (4) varia naturalmente colla latitudine e colla temperatura e pressione, così converremo di prendere come unità il valore, che si ottiene per la latitudine di 45°, a 0° e 760^{mm}.

Assunta questa unità, la massa d'aria, che viene attraversata dal raggio generico considerato in principio, sarà espressa da

$$F(z, H) = \frac{1}{\mu^*} \int_0^H \delta \, d\sigma .$$

Per ottenere maggior semplicità di sviluppi, conviene far comparire in luogo della densità assoluta δ il rapporto $\frac{\delta}{\delta_0}$, essendo δ_0 la densità corrispondente al limite inferiore della integrazione, cioè al mare. Beninteso, δ_0 non è da riguardare come un valore normale della densità, bensì come quello, che corrisponde alle condizioni effettive di temperatura e pressione nel luogo d'osservazione, che per ora supporremo al mare. Introducendo allora in luogo di $\frac{\delta}{\delta_0}$ la notazione x, che potremo chiamare densità relativa dell'aria, e facendo comparire infine, per ottenere una espressione più omogenea, anche la densità normale dell'aria a 45° e al mare (per $t = 0°$ e $B = 760^{mm}$), che indicheremo con δ^*, potremo scrivere

$$F(z, H) = \frac{\delta_0}{\delta^*} \frac{\delta^*}{\mu^*} \int_0^H x \, d\sigma . \tag{5}$$

La costante assoluta

$$\lambda^* = \frac{\mu^*}{\delta^*} \tag{6}$$

ha manifestamente le dimensioni di una lunghezza, e precisamente esprime l'altezza, che avrebbe un'atmosfera omogenea di massa uguale all'atmosfera (normale) effettiva, e che possedesse per tutto la densità normale al mare δ^*; potremo chiamarla quindi brevemente spessore di un'atmosfera ridotta omogenea. Quanto al quoziente $\frac{\delta_0}{\delta^*}$, alla latitudine di 45°, detti t_0 e B_0 i valori della temperatura e pressione, pei quali la densità dell'aria assume il valore δ_0, si avrebbe

$$\frac{\delta_0}{\delta^*} = \frac{1}{1 + m t_0} \frac{B}{760^{mm}} . \tag{7}$$

Per latitudini diverse bisognerà a stretto rigore adoperare il valore di B ridotto a 45°. Introducendo le (6) e (7) nella (5), si ottiene

$$F(z, H) = \frac{1}{\lambda^*} \frac{1}{1 + m t_0} \frac{B}{760^{mm}} \int_0^H x \, d\sigma . \tag{8}$$

La funzione $F(z, H)$ dipende da t_0 e B oltrechè esplicitamente, in quanto queste variabili figurano fuori del segno d'integrazione, anche implicitamente, in quanto le variabili stesse sono contenute in x e $d\sigma$. Risulterà però nel seguito, che la pressione comparisce solo in $d\sigma$ per un termine del 2° ordine, cosicchè l'influenza della pressione è sensibile in effetto, solo in quanto essa compare esplicitamente, e l'integrale $\int_0^H x \, d\sigma$ può intendersi dipendere unicamente dalla temperatura.

Ponendo allora

$$F_0(z, H) = \frac{1}{\lambda^*} \left[\int_0^H x \, d\sigma \right]_{\substack{t=0^0 \\ B=760^{mm}}} \tag{9}$$

cioè indicando con $F_0(z, H)$ i valori della $F(z, H)$ corrispondenti a condizioni normali di temperatura e pressione, e indicando di più con

$$\Delta_t F(z, H) = \Big[F(z, H) \Big]_{\substack{t=t^0 \\ B=760^{mm}}} - F_0(z, H) \tag{9'}$$

l'incremento, che subisce la funzione $F_0(z, H)$ per un dato cambiamento della temperatura (da 0° a t°), mentre la pressione si suppone rimaner normale, potremo scrivere

$$F(z, H) = [F_0(z, H) + \Delta_t F(z, H)] \frac{B}{760^{mm}} . \tag{10}$$

Il calcolo degli spessori atmosferici $F(z, H)$ corrispondenti alle condizioni più generali di temperatura e pressione richiede dunque:

1° Il calcolo degli spessori atmosferici $F_0(z, H)$ per condizioni normali di temperatura e pressione.

2° Il calcolo della rettificazione di temperatura $\Delta_t F(z, H)$.

3° La rettificazione relativa alla pressione secondo il fattore $\frac{B}{760^{mm}}$.

2. Cominciando dal primo calcolo, dovremo anzitutto secondo la (9) studiare, come varî coll'altezza la densità relativa x dell'aria. Questo studio, in virtù delle note equazioni della statica atmosferica (equazione di Mariotte — Gay-Lussac ed equazione d'equilibrio dell'atmosfera) equivale a quello analogo per la variazione della temperatura. Come nella teoria generale della estinzione da me proposta e più volte citata (*Zur Theorie der Extinktion...*) ammetterò anche qui, in conformità ai ri-

sultati più recenti delle ascensioni aereonautiche, un decrescimento uniforme della temperatura dell'aria coll'altezza di $\beta = 6°,2$ per Km. [1] nella forma

$$t - t_0 = -\beta a s \tag{A}$$

con

$$s = \frac{h}{a+h} = \frac{r-a}{r}, \tag{11}$$

dove a indica il raggio di curvatura della superficie di livello corrispondente alla stazione inferiore, r il raggio analogo per la superficie di livello corrispondente ad un punto generico situato all'altezza h ed s una variabile ausiliaria, il cui uso è frequentissimo nelle teorie della refrazione astronomica.

Fra i valori t, B, δ della temperatura, pressione e densità all'altezza generica h e gli analoghi t_0, B_0, δ_0 per la stazione inferiore sussiste anzitutto l'equazione esprimente la legge di Mariotte — Gay-Lussac

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \frac{1+mt}{1+mt_0}.$$

Un'altra relazione, differenziale questa, si ottiene, cercando come varia la pressione (ossia il peso di una colonna d'aria di sezione 1 estesa fino al limite dell'atmosfera) col variare l'altezza da h ad $h+dh$.

Tal peso è espresso anzitutto da $g\delta dh$, se g indica l'accelerazione di gravità all'altezza h, ovvero da $g_0\left(\frac{a}{r}\right)^2 \delta dh$, se indichiamo con g_0 il valore dell'accelerazione di gravità nella stazione inferiore (al mare). Ma il peso medesimo è espresso anche da $-g_0\, dB\, \varrho$, se indichiamo con dB l'incremento della pressione barometrica, passando da h ad $h+dh$ (pressione ridotta a 45° e al mare) e con ϱ la densità normale del mercurio. Si ha così l'equazione (d'equilibrio dell'atmosfera)

$$\varrho\, dB = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 \delta\, dh,$$

[1] Le ascensioni aereonautiche (*Wissenschaftliche Luftfahrten.* Berlin) e i palloni-scandaglio (*Ballon-sondes* di Teisserenc du Bort) condurrebbero veramente a 6°.0 o 6°.1 come gradiente termico medio fra 0^m e 9000^m e a 5°.8 soltanto fra 0^m e 5000^m. Per altro le dette indagini mostrano anzitutto una considerevole variabilità nel gradiente termico, fino a raggiungere da una parte il limite adiabatico (9°.9) in notti serene estive e dall'altra valori negativi — inversioni della temperatura — nei sereni invernali. Con tanta variabilità è questione piuttosto oziosa il cercare, che il gradiente termico assunto come valore normale coincida fino ai decimi di grado col valore medio assegnato dalla fisica dell'atmosfera, e molto più ragionevole sarà assumere come valore normale un valore, che presenti vantaggi speciali dal lato analitico. A tale condizione soddisfa appunto il valore da noi assunto $\beta = 6°.2$, perchè a questo gradiente corrisponde un valore razionale semplice $\left(\frac{9}{2}\right)$ per il parametro fondamentale (k) delle nostre formole. È inutile aggiungere, che nel seguito viene esaminata anche la influenza di una variazione del gradiente termico nel calcolo degli spessori atmosferici F(s, H).

dove s'intende che dB e dh siano espressi in una medesima unità lineare (il km.) e ϱ e δ in una medesima unità di densità.

Ora noi vogliamo assumere come unità di densità la densità δ_0 dell'aria nella stazione inferiore e come unità di pressione il valore normale della colonna barometrica al mare (76×10^{-5}).

Indicando con p la misura della pressione in questa nuova unità e con x, come sopra, la misura $\frac{\delta}{\delta_0}$ della densità relativa dell'aria, l'equazione precedente prenderà la forma

$$\frac{\varrho}{\delta_0} 76 \times 10^{-5} \, dp = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 x \, dh.$$

La quantità ϱ del primo membro (densità normale del mercurio a 45° e al mare) è una costante assoluta, non così δ_0 che rappresenta la densità effettiva od attuale dell'aria nella stazione inferiore.

Detta δ^* la densità normale (cioè per $t = 0°$, $p = 1$) a 45° e al mare, è per il principio stesso di Mariotte — Gay-Lussac

$$\delta_0 = \delta^* \frac{p_0}{1 + m t_0};$$

Sostituendo questa espressione in luogo di δ_0 e $dr = dh$ nella precedente equazione otteniamo dunque

$$\varrho \frac{76 \times 10^{-5}}{\delta^*} (1 + m t_0) \, d \frac{p}{p_0} = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 x \, dr.$$

La quantità $\varrho \frac{76 \times 10^{-5}}{\delta^*}$, che compare nel primo membro, è oramai una costante assoluta ed ha manifestamente le dimensioni di una lunghezza. Indicandola con l_0, la equazione, che ne consegue,

$$g_0 l_0 \delta^* = g_0 \varrho \, 76 \times 10^{-5}$$

ci mostra subito il significato geometrico di questa costante.

Il primo membro esprime infatti il peso di una colonna d'aria *omogenea* di densità normale δ^* e di altezza l_0, e il secondo membro il peso a 45° di una colonna di mercurio dell'altezza di 760^{mm}. Quindi l_0 risulta essere l'altezza d'un'atmosfera omogenea alla densità normale a 45° e al mare, che eserciterebbe pressione eguale a quella dell'atmosfera effettiva in condizioni normali. Perciò questa costante si chiama comunemente *l'altezza dell'atmosfera ridotta omogenea*. A stretto rigore, risultando per l_0 l'altezza di 8 km. circa, il significato geometrico di l_0 non sarebbe esattamente quello indicato, se non a patto d'introdurre oltre un'atmosfera omogenea ideale anche un'accelerazione di gravità costante fino all'altezza di 8 km.; tuttavia la variazione dell'accelerazione di gravità coll'altezza è così piccola, che non ne

viene alterata sostanzialmente la relazione suddetta. Del resto è perfettamente ozioso il voler dare alla costante l_0 questa o quella interpretazione geometrica fondata su considerazioni meramente ipotetiche e noi abbiamo riportato questa interpretazione soltanto dal lato del valore storico del concetto di atmosfera ridotta omogenea.

Per ottenere il valore di questa costante fondamentale assumiamo con Roiti (Fisica, pag. 190 e 199).

δ^* (densità normale dell'aria a 45° e al mare) $= 0.001292607$ $\log \delta^*$ 7.1114666
ϱ (» » del mercurio ») $= 13.596$ $\log \varrho$ 1.1334112

Ne consegue

$$\log l_0 = 0.9027582$$
$$l_0 = 7^{km}.9939 .$$

Per semplificare le nostre espressioni porremo

$$l = l_0(1 + mt_0) .$$

Con ciò l'equazione d'equilibrio dell'atmosfera prende la forma

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{1}{l}\left(\frac{a}{r}\right)^2 x\, dr .$$

Questa può venire ulteriormente semplificata, facendovi comparire in luogo di r la variabile s mediante la (11). Si ottiene così infine [1]

$$\text{(B)} \qquad \frac{dp}{p_0} = -\frac{a}{l}\, x\, ds .$$

Aggiungendo infine l'equazione di Mariotte — Gay-Lussac nella forma

$$\text{(C)} \qquad \frac{p}{p_0} = x\,\frac{1 + mt}{1 + mt_0}$$

abbiamo tre relazioni fra le variabili t, p, x e la s (altezza relativa), le quali permettono di ridurre la determinazione di x ad una sola equazione differenziale ordinaria subito integrabile.

Si ha anzitutto introducendo la (A) in (C) e sostituendo poi l'espressione di $\frac{p}{p_0}$ in (B)

$$\text{(12)} \qquad \frac{p}{p_0} = x(1 - \gamma s)$$

$$\text{(13)} \qquad (1 - \gamma s)\, dx = \left(\gamma - \frac{a}{l}\right) x ds ,$$

[1] È opportuno notare, che questa equazione sussiste rigorosamente, soltanto se noi consideriamo, come tacitamente si è fatto, l'atmosfera in condizioni ideali di equilibrio, talchè ad eguale altezza, ossia sopra una medesima superficie sferica, regni eguale pressione. In realtà questo equilibrio non si ha quasi mai, perchè le depressioni barometriche registrate continuamente dalla meteorologia stanno a dimostrare il contrario. Tuttavia è stata studiata l'influenza di tali depressioni sulla refrazione astronomica e venne trovata minima, nè diversamente può accadere nel nostro problema.

avendo posto

$$\gamma = \frac{m\beta a}{1 + mt_0} = \frac{\gamma_0}{1 + mt_0}. \tag{13a}$$

Dalla (13), integrando e determinando la costante d' integrazione colla condizione iniziale

$$\text{per } s = 0: \quad x = 1,$$

si ottiene

$$x = (1 - \gamma s)^k, \tag{14}$$

avendo posto

$$k = \frac{a}{\gamma l} - 1 = \frac{1}{m\beta l_0} - 1. \tag{14a}$$

La (14) è l'espressione, che deve venir introdotta in luogo della densità x nella equazione (9) per il calcolo dello spessore $F_0(z, H)$. Delle due costanti γ e k soltanto la prima dipende dalla temperatura t_0 della stazione inferiore, l'altra è da riguardare come una costante assoluta, almeno per un dato valore del gradiente termico in altezza. È ovvio che pel calcolo degli spessori atmosferici normali $F_0(z, H)$ si dovrà adoperare per γ il valore γ_0 corrispondente a $t_0 = 0°$.

3. Passando ora al calcolo della λ^*, si avrà secondo la (6) e la (4)

$$\lambda^* = \frac{\mu^*}{\delta^*} = \int_0^{H^*} x \, dh.$$

Per le (11) e (14) questa espressione diviene

$$\lambda^* = a \int_0^{S^*} (1 - \gamma_0 s)^k \frac{ds}{(1 - s)^2}, \tag{15}$$

S^* indicando il valore della variabile s, che corrisponde al limite H^* della atmosfera. Questo valore viene fissato dalla condizione

$$x = 0 \quad \text{per} \quad s = S^*$$

onde

$$S^* = \frac{1}{\gamma_0}, \quad H^* = \frac{a}{\gamma_0 - 1}.$$

Circa il valore H^*, che risulta, secondo la nostra teoria, per l'altezza dell'atmosfera, esso dipende dal valore, che si assume pel gradiente della temperatura. Assumendo, come si è già detto, un gradiente termico di 6°.2 per km. (quale corrisponde al valore normale $\frac{9}{2}$ del parametro k) si ottiene $H^* = 45^{km}.1$. Questo è naturalmente un valore troppo piccolo, e tale risultato è da spiegare col fatto, che il gradiente di temperatura 6°.2, quale risulta prossimamente dalla esperienza pei primi

8 o 9 km. di altezza, non può mantenersi indefinitamente, ma deve necessariamente diminuire oltre una certa altezza, come sembrano anche accennare i risultati dei palloni scandaglio. In effetto io ho mostrato (v. *Zur Theorie der Extinktion* ecc., Kap. III), come, ammettendo sopra 9 km. il gradiente $\beta = 3°$, il valore conseguente per l'altezza dell'atmosfera cresce subito fino ad $H^* = 81^{km}.6$, che è già un valore molto più ammissibile. In ogni modo io ho anche mostrato, che per la determinazione degli spessori atmosferici attraversati dai raggi luminosi la modificazione del gradiente termico oltre 9 km. di altezza non porta che differenze minime, inegualmente compensate dall'aumento rilevantissimo, che seguirebbe nella mole dei calcoli volendo tener conto di questa circostanza. Per questa ragione ho senz'altro conservato il valore $\frac{9}{2}$ già adoperato per k nella teoria generale della estinzione.

Dalla (15), svolgendo in serie di potenze di s l'integrale del secondo membro, si ricava per il calcolo di λ lo sviluppo

$$\lambda^* = a \int_0^{S^*} (1 - \gamma_0 s)^k \left(1 + \frac{2}{1} s + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} s^2 + \cdots \right) ds ,$$

da cui con semplici integrazioni per parti, tenendo conto, che $1 - \gamma S^*$ è da porre uguale a zero,

$$(16) \qquad \lambda^* = \frac{a}{\gamma_0(k+1)} + \frac{2a}{\gamma_0^2(k+1)(k+2)} + \frac{6a}{\gamma_0^3(k+1)(k+2)(k+3)} + \cdots$$

$$(16_a) \qquad = l_0 \left(1 + \frac{2}{\gamma_0(k+2)} + \frac{6}{\gamma_0^2(k+2)(k+3)} + \cdots \right)$$

$$= [9.259637] \frac{a}{\gamma_0} + [8.74775] \frac{a}{\gamma_0^2} + [8.380] \frac{a}{\gamma_0^3} + \cdots$$

I coefficienti logaritmici di quest'ultima formola suppongono, che sia stato assunto il valore $\frac{9}{2}$ pel parametro k, mentre le due espressioni precedenti sono più generali. La (16) può anche esprimere lo spessore λ_0 della atmosfera ridotta omogenea, per una temperatura $t_0 \neq 0°$ (nella stazione inferiore) quando si intenda sostituito il valore (13_a) di γ in luogo di γ_0.

Come appare dalla (16_a), la quantità λ^*, che abbiamo definito come lo spessore d'una atmosfera di massa eguale a quella dell'atmosfera effettiva, e che abbia per tutto la densità, che possiede l'atmosfera effettiva in condizioni normali a 45° e al mare, non coincide perfettamente colla quantità l_0 comunemente intesa come altezza di un'atmosfera ridotta omogenea. E non poteva risultare diversamente, dappoichè la ipotesi, che un'atmosfera omogenea eserciti pressione eguale alla atmosfera effettiva (alla qual condizione corrisponde l'altezza l_0) non implica, che le due atmosfere vengano a possedere anche la stessa massa. Non di meno è la quantità λ^* e non, come sin qui si è usato, la l_0, che deve venir posta a base del calcolo degli spessori atmosferici, e la differenza non è soltanto formale, soprattutto in calcoli, che

aspirino a un certo rigore, poichè i valori risultanti per λ^* ed l_0 sono rispettivamente

$$\lambda^* = 8^{\text{km}}.0109 \quad , \quad l_0 = 7^{\text{km}}.9939 .$$

Il precedente valore di λ^*, fondamentale per il calcolo degli spessori atmosferici venne calcolato in due modi del tutto indipendenti e cioè una prima volta mediante la formola (16), una seconda volta per quadratura numerica. Il primo calcolo ha dato $\lambda^* = 8.010898$, il secondo $\lambda^* = 8.010896$. La differenza di 0.000002 rientra completamente nei limiti d'esattezza di un calcolo con logaritmi a 7 cifre.

A noi occorrerà nel seguito per utili controlli anche il valore della quantità λ per un luogo situato ad una altezza qualunque H_0 diversa da zero. In tal caso si ottiene naturalmente una espressione meno semplice e precisamente

$$(16_b)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{H_0} &= a\int_{S_0}^{S^*}(1-\gamma_0 s)^k(1+2s+3s^2+\cdots)\,ds \\ &= \frac{a(1-\gamma_0 S_0)^{k+1}}{\gamma_0(k+1)} + \frac{2a(1-\gamma_0 S_0)^{k+1}}{\gamma_0(k+1)}\left\{S_0+\frac{1-\gamma_0 S_0}{\gamma_0(k+2)}\right\} + \\ &+ \frac{3a(1-\gamma_0 S_0)^{k+1}}{\gamma_0(k+1)}\left\{S_0^2+\frac{2S_0(1-\gamma_0 S_0)}{\gamma_0(k+2)}+\frac{2(1-\gamma_0 S_0)^2}{\gamma_0^2(k+2)(k+3)}\right\} \\ &+ \cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

La S_0 indica naturalmente il valore della variabile s per $h = H_0$. Il valore così calcolato λ_{H_0} esprime lo spessore dell'atmosfera sovrastante alla altezza H_0 supposta quest'atmosfera ridotta omogenea alla densità normale dell'aria, al mare.

4. Veniamo infine al calcolo dell'elemento d'arco $d\sigma$ della curva della refrazione, con che sarà completato lo studio della funzione fondamentale $F_0(z, H)$ (formola (9)). Per questo elemento si ha notoriamente dalla teoria della refrazione astronomica l'espressione

$$(17)\qquad d\sigma = \frac{dh}{\sqrt{1-\left(\frac{a\mu_0}{r\mu}\right)^2\sin^2 z}} ,$$

indicando r come sopra il raggio di curvatura $a + h$ della superficie di livello generica, μ e μ_0 gli indici di refrazione dell'aria alla altezza h e per $h = 0$ e z la distanza zenitale apparente dei raggi osservati. Per gli indici di refrazione μ, μ_0 assumeremo, senza annettervi peraltro che un significato puramente empirico, la formola usuale presso quasi tutte le teorie della refrazione astronomica (formola di Laplace)

$$\frac{\mu^2}{\mu_0^2} = 1 - 2\alpha(1-x) ,$$

dove α indica la ben nota costante della refrazione.

Con questo e dietro semplici trasformazioni, introducendo in luogo di r la variabile s mediante la (12), la nostra funzione $F_0(z, H)$ assume la forma

$$F_0(z, H) = C_z\int_0^H \frac{x\sqrt{1-2\alpha(1-x)}\,dh}{\sqrt{Z^2-\varepsilon_z(1-x)+s-\frac{1}{2}s^2}} ,$$

avendo posto

$$C_z = \frac{1}{\lambda^* \sqrt{2 \sin z}} \quad , \quad Z^2 = \tfrac{1}{2} \cot g^2 z \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\alpha}{\sin^2 z} .$$

Ho mostrato nel lavoro più volte citato (*Zur Theorie der Extinktion* ecc., Kap. III), come si possa senza errore sensibile trascurare il termine quadratico in s nel denominatore e il radicale, che figura nel numeratore, anche nel caso là considerato di percorsi estesi a tutta l'atmosfera. A maggior ragione sarà questo lecito qui, dove consideriamo percorsi limitati ad uno strato parziale dell'atmosfera (è quasi superfluo avvertire che $\frac{dF_0}{dh}$ è sempre positivo entro i limiti considerati per h). Avremo quindi definitivamente

$$F_0(z, H) = C_z \int_0^H \frac{x\, dh}{\sqrt{Z^2 - \varepsilon_z(1-x)} + s} ,$$

e ci proponiamo la questione di ottenere i valori di questa funzione di due variabili z ed H nel modo più pratico per la costruzione di tavole a doppia entrata. Accennerò in primo luogo uno sviluppo analitico analogo a quello da me seguito nella teoria generale più volte citata.

5. Si ha anzitutto

$$dh = \frac{a\, ds}{(1-s)^2} = a(1 + 2s + \cdots)\, ds ,$$

e possiamo qui limitarci a considerare la parte di prim'ordine di $F_0(z, H)$, cioè quella, che risulta, ponendo $dh = a\, ds$; ottenendosi la parte di second'ordine (con $dh = 2as\, ds$) mediante sviluppi e calcoli del tutto analoghi. Indichiamo questa parte di prim'ordine con $\Phi_0(z, H)$. Introducendo la nuova variabile $y = 1 - \gamma s$, troviamo

$$\Phi_0(z, H) = \frac{a C_z}{\sqrt{\gamma_0}} \int_v^1 \frac{y^k\, dy}{\sqrt{\Gamma_0^2 - (y + \Delta y)}} ,$$

avendo posto

$$\Delta y = \gamma_0 \varepsilon_z (1 - x) \quad , \quad \Gamma_0^2 = 1 + Z^2 \gamma_0 ,$$

e indicando con v il valore della variabile y, che corrisponde alla altezza H. Svolgendo infine il radicale in serie di Taylor per le potenze di Δy, si avrà

$$\Phi_0(z, H) = \frac{a C_z}{\sqrt{\gamma_0}} \left\{ \int_v^1 \frac{y^k\, dy}{(\Gamma_0^2 - y)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \varepsilon_z \gamma_0 \int_v^1 \frac{y^k (1 - y^k)\, dy}{(\Gamma^2 - y)^{\frac{3}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon_z^2 \gamma^2 \int_v^1 \frac{y^k (1 - y^k)^2\, dy}{(\Gamma^2 - y)^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right\} .$$

Se si osserva, che l'integrazione da 0 ad 1 darebbe la funzione $\Phi(z)$ corrispondente

al percorso dei raggi attraverso tutta l'atmosfera, per la quale funzione ho già dato sviluppi e tavole nel lavoro citato, potremo scrivere

$$\Phi_0(z\,,\mathrm{H}) = \Phi(z) - \frac{a\mathrm{C}_z}{\sqrt{\gamma_0}}\left\{\int_0^v \frac{y^k\,dy}{(\Gamma_0^2 - y)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\varepsilon_z\gamma_0 \int_0^v \frac{y^k(1-y^k)\,dy}{(\Gamma_0^2 - y)^{\frac{1}{2}}} + \cdots\right\}$$

Ponendo infine

$$y = t\Gamma_0^2 \quad \text{e} \quad v = \mathrm{T}\Gamma_0^2\,,$$

si trova

$$\int_0^v \frac{y^k\,dy}{(\Gamma_0^2 - y)^{\frac{1}{2}}} = \Gamma^{2k+\frac{1}{2}} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{t^k\,dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{v}{\mathrm{T}}\right)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{t^k\,dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$$

e analogamente

$$\int_0^v \frac{y^k(1-y^k)\,dy}{(\Gamma_0^2 - y)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{v}{\mathrm{T}}\right)^{k-\frac{1}{2}} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{t^k\,dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{v}{\mathrm{T}}\right)^{2k} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{t^{2k}\,dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ecc.}$$

Ora io ho già dato tavole per il calcolo degli integrali definiti, che qui compaiono, pel valore $\frac{9}{2}$ del parametro k (1). Risulta dunque, che la risoluzione numerica del problema, che ci siamo proposti, di determinare cioè lo spessore atmosferico attraversato da un raggio luminoso comunque inclinato fra due determinate altezze sul livello del mare, è riducibile alle stesse tavole numeriche e a sviluppi del tutto analoghi a quelli da me ottenuti per la teoria generale dell'assorbimento atmosferico (traiettorie estese a tutta l'atmosfera).

Questa risoluzione analitica del problema non potrebbe certo facilmente venir sostituita da una più rapida, finchè si tratti di altezze H di due o tremila metri, perchè a tali altezze corrisponde già una parte considerevole della intera massa atmosferica. Potrebbero invece ottenersi naturalmente formole approssimate più semplici pel caso di uno strato atmosferico più piccolo, ma non presenta qui alcun interesse la ricerca di tali formole, e basterà accennare, che una di queste viene fornita dalla teoria di Bouguer (rettificata) nel modo, che indicai in altra occasione (2).

6. Lo sviluppo analitico accennato sopra sarebbe certo il più conveniente per il calcolo della $\mathrm{F}_0(z\,,\mathrm{H})$, se si trattasse di eseguire questo calcolo per un solo o per pochi valori di H. Avremmo potuto effettivamente limitare le nostre tavole numeriche al caso Etna-Catania, lasciando ad altri la cura di costruirsi tavole analoghe per altre stazioni, quando si presenterà il caso di ripetere le determinazioni di Langley e di Müller-Kempf. Varie ragioni ci hanno spinto però ad un disegno più vasto e, necessariamente, di più ponderosa attuazione.

Pensammo, che, quando avessimo ottenuti i valori degli spessori atmosferici $\mathrm{F}(z\,,\mathrm{H})$ per lo strato Catania-Etna, difficilmente questi valori sarebbero stati utiliz-

(1) V. *Zur Theorie der Extinktion*..... Anhang I und II.

(2) A. Bemporad, *Sulla teoria d'estinzione di Bouguer*, Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani, vol. XXX e *Sulla teoria della estinzione atmosferica*, ibidem, XXXII, pag. 108.

zabili per future determinazioni di questo genere, perchè, dietro la esperienza di Müller e Kempf, potrà bensì scegliersi l'osservatorio Etneo come stazione superiore, ma poco probabilmente l'osservatorio di Catania come stazione inferiore. Pensammo ancora, che l'obbligare i futuri osservatori alla non lieve fatica preliminare di costruirsi le tavole adatte alle stazioni, che si troverà conveniente di scegliere, sarebbe stato quasi altrettanto, come assicurare l'abbandono del metodo da noi proposto; e riflettemmo infine, che con fatica non soverchia potevano costruirsi tavole a doppia entrata per il calcolo degli spessori atmosferici $F(z, H)$, sufficientemente estese per abbracciare tutti i casi possibili circa la posizione delle due stazioni e la inclinanazione dei raggi, ottenendo così un materiale non solo applicabile per future esperienze, ma adatto altresì alle più svariate ricerche teoriche nel campo dell'assorbimento atmosferico.

Per un siffatto calcolo però la quadratura numerica si presentava — per tante ragioni, che qui non è il caso di ricordare — incomparabilmente più vantaggiosa di quella analitica, e in questo modo effettivamente vennero costruite le tavole, che qui comunico. Le formole adoperate per dette quadrature numeriche sono le ben note

$$(18)\qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(x)\,dx = w\left\{{}^{I}f\left(a+i+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}f^{I}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{17}{5760}f^{III}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)+\cdots\right\}$$

$$(18a)\qquad {}^{I}f\left(a-\frac{1}{2}\right)=w\left\{-\frac{1}{24}f^{I}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{17}{5760}f^{III}\left(a-\frac{1}{2}\right)-\cdots\right\}.$$

L'intervallo d'integrazione w venne preso di 500^{m} per le distanze zenitali fino a $z=88°$ e di 200^{m} da 88° a 89°. S'intende, che, per alleviare in qualche modo l'ingente mole dei calcoli, venne fatto ampio uso d'interpolazioni, non tanto oltre però da infirmare la esattezza dei risultati più che per due unità dell'ultima decimale, al massimo. Si è procurato di prendere l'intervallo per la variabile z così piccolo, che le differenze seconde dei valori intavolati riuscissero trascurabili. Si rinunziò ad ottenere, che fosse verificata la condizione analoga per le differenze nel senso di H per non aumentare oltre misura l'estensione delle tavole. Del resto la interpolazione rispetto ad H — salvo il caso di ricerche speciali — viene fatta una volta per tutte per ogni coppia di stazioni, che si considera, e non era quindi necessario l'estender tanto la tavola nel senso di questa variabile.

Comunico qui per esteso i valori assunti per le costanti nel calcolo di questa tavola (I). Questi valori valgono per 45° e al mare.

$a = 6377^{km}.36$ $\qquad t_0 = 0°$ $\qquad m = 0.003663$
$l_0 = 7^{km}.9939$ $\qquad \delta^* = 0^{gr}.00129261$ $\qquad \alpha_0 = 60''.153$
$g_0 = 9^{m}.8052$ $\qquad \log\gamma_0 = 2.161520$ $\qquad \log\lambda_0 = 0.903681.$

Il valore della costante della refrazione α_0 è ricavato, sull'autorità di Bauschinger [1],

[1] Bauschinger J., *Untersuchungen über die astronomische Refraktion*. Neue Annalen der Kgl. Sternwarte in München. Bd. III, 1898, pag. 222.

da sette determinazioni molto precise, con esclusione dei valori, fin qui generalmente ammessi, di Bessel. Questo valor medio assunto per α_0 concorda nel modo migliore colle recentissime ed esattissime osservazioni di Courvoisier [1]. Per la δ^* venne ammesso il valore di Régnault, per m il valore proposto da Radau.

Per quanto riguarda la precisione dei dati della tavola I, trattandosi di una tavola fondamentale per tutta la teoria, ritenemmo utile dare i valori degli spessori atmosferici in tre cifre decimali, cioè fino ai millesimi di un'atmosfera ($0^{mm}.76$ di colonna barometrica), sebbene, per l'attuale precisione delle misure fotometriche, sarebbero state sufficienti due sole cifre decimali. Per assicurare poi il più possibile l'esattezza della terza cifra decimale, i valori della funzione integranda vennero presi sempre con 5 cifre decimali, talchè si può ritenere, che la successiva quadratura numerica — fondata su quattordici valori della funzione integranda fino a $z = 88°$, su ventinove da $z = 88°$ a $z = 89°$ — dia la quarta decimale esatta, e che le successive interpolazioni (in generale interpolazioni nel mezzo) non possano anche nei casi più sfavorevoli alterare la terza cifra decimale.

La tavola così ottenuta fornisce direttamente cogli argomenti z ed H i valori delle masse d'aria attraversate dai raggi incidenti colla distanza zenitale z *al mare*, fra le altezze zero ed H. Mostreremo ora, come col sussidio di altra tavola (tavola II) la tavola stessa (I) possa anche fornire le masse analoghe pei raggi incidenti con nota distanza zenitale in una stazione ad un livello qualunque fra 0^m e 5000^m.

7. La tavola II ha per scopo precipuo di determinare quale distanza zenitale z' abbia all'altezza H qualunque, fra 0^m e 5000^m, un raggio incidente con nota distanza zenitale al mare o ad un'altra qualunque superficie di livello fra 0^m e 5000^{mm}.

Dalla relazione (17), considerando che $d\sigma$ rappresenta l'elemento d'arco della traiettoria luminosa e dh il tratto elementare corrispondente sulla verticale, si ricava

$$\cos z' = \frac{dh}{d\sigma} = \sqrt{1 - \left(\frac{a\mu_0}{r\mu}\right)^2 \sin^2 z}.$$

Da questa relazione, con semplici trasformazioni e introducendovi in luogo di $r = a + h$ la variabile $s = \frac{h}{r}$ secondo la (11), si ottiene

$$\tang z' = \frac{1 - s}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{Z^2 - \varepsilon_z(1 - x)} + s}, \tag{19}$$

avendo Z^2 ed ε_z il significato stabilito da formole precedenti. Questa era per noi la forma più comoda per il calcolo di z' in funzione di z e di H, perchè la quantità $\sqrt{Z^2 - \varepsilon_z(1 - x)} + s$ era già stata calcolata per una estesa serie di valori di z e di H per la quadratura numerica relativa alla costruzione della tavola I.

La tavola II (a doppia entrata, come la I, cogli argomenti z ed H) fornisce la correzione $\Delta z = z' - z$ da apportare alla distanza zenitale apparente z di un raggio al mare, per ottenere la distanza zenitale z' dello stesso raggio all'altezza H

[1] L. Courvoisier, *Untersuchungen über die astronomische Refraktion*. Veröffentlichungen der Grossh. Sternwarte zu Heidelberg (astrometrisches Institut). Bd. III, pag. 212.

qualunque fra 0^m e 5000^{mm}. Viceversa, se in una stazione B di nota altezza H_0 venne osservata una stella colla distanza zenitale apparente z', la tavola stessa fornisce la distanza zenitale apparente z, che i raggi osservati avrebbero al mare e così quella, che avrebbero ad un'altra altezza qualunque.

Se si vuole allora la massa d'aria attraversata da un raggio comunque inclinato fra le altezze H_0 e H_1, si ricaverà anzitutto colla tavola II dalla distanza zenitale nota z' per l'altezza H_0 il corrispondente valore z al mare. Con questo valore dalla tavola I si ricaveranno $F(z, H_0)$ e $F(z, H_1)$, e la differenza di questi valori darà manifestamente la massa d'aria cercata, risolvendosi così il problema più generale accennato in fine al § precedente.

I valori di Δz sono dati dalla tavola II fino ai decimi di minuto primo, limite di precisione certo più che sufficiente per lo studio dell'assorbimento atmosferico. Con lieve fatica avremmo potuto dare però i valori di Δz esatti fino ai decimi di di secondo d'arco, come si suole nelle ordinarie teorie della refrazione, e allora la tavola II avrebbe potuto costituire un contributo forse non disprezzabile alla teoria della refrazione astronomica. Ci astenemmo tuttavia dal dare tale estensione alla tavola in discorso, e per non aumentare la mole già rilevante delle tavole numeriche, e perchè la influenza della refrazione non costituisce veramente che un elemento secondario per lo studio dell'assorbimento atmosferico.

8. Fra le tavole I, II e la teoria generale da me data per l'estinzione nel lavoro più volte citato (*Zur Theorie der Extinktion* ecc.) possono stabilirsi utili raffronti. Così nel detto lavoro (Cap. V) è accennato il procedimento per ottenere dalle tavole medie ivi date per il calcolo degli spessori atmosferici (tavole valide per un luogo al mare) le tavole relative ad una stazione situata a rilevante altezza. Questo problema può ora risolversi in modo del tutto indipendente, combinando la tavola d'estinzione media (al mare) colle nostre tavole I e II. È interessante vedere fino a qual punto combinano i risultati ottenuti per vie così diverse.

A pag. 46 del citato lavoro si trovano come valori della funzione $F(z)$ (massa d'aria attraversata dai raggi incidenti colla distanza zenitale z, essendo valutata come 1 la massa d'aria attraversata da raggi verticali)

per $z = 87°$ e per un luogo a 35° di latit. e a 3000^m di altezza	per $z = 87°$ e per un luogo a 55° di latit. e a 3000^m di altezza
$F(z) = 15{,}450$	$F(z) = 15{,}443$

Per un luogo situato alla latitudine di 45° (che è quella, per cui son calcolate le nostre tavole) e sempre a 3000^m di altezza potrà ammettersi dunque il valor medio fra i due precedenti

$$F(87°) = 15{,}447 .$$

Questo valore non è direttamente paragonabile con quelli delle nostre tavole, per le quali l'unità di massa assunta è la massa di una colonna d'aria verticale estesa dal mare fino al limite dell'atmosfera, mentre l'unità di massa per $F(87°)$, come si è detto, è la massa di una colonna d'aria verticale estesa da 3000^m di altezza fino

al limite dell'atmosfera. Ora secondo la nostra tavola VI, col. 9ª, le misure relative delle masse unitarie in discorso sono

$$\lambda_0 = 8{,}010898 \qquad\qquad \lambda_{3000} = 5{,}436227\,.$$

Concludiamo, che la massa d'aria attraversata da raggi incidenti colla distanza zenitale di 87° a 3000ᵐ di altezza, secondo gli sviluppi analitici svolti nel lavoro citato e secondo i dati numerici ricavati dalla nostra tavola VI, è data da

$$M(87^\circ) = 15{,}447 \times \frac{5\,,\,436227}{8\,,\,010898} = 10{,}482\,.$$

Ora lo stesso valore può ottenersi anche in quest'altro modo essenzialmente diverso col sussidio delle tavole I e II del presente lavoro. Dalla tav. II può ricavarsi quale distanza zenitale z_1 posseggano al mare i raggi incidenti colla distanza zenitale $z = 87^\circ$ all'altezza di 3000ᵐ. Dalla tavola dei valori di $F(z)$ data nel lavoro citato può ricavarsi (coll'argomento z_1) la massa d'aria $F(z_1)$ attraversata dai raggi considerati nell'intero percorso dal mare al limite dell'atmosfera. Infine dalla tav. I del presente lavoro può ricavarsi (sempre coll'argomento z_1) la massa d'aria $F(z_1, 3000)$ attraversata dai raggi medesimi dal mare fino a 3000ᵐ. La differenza $F(z_1) - F(z_1, 3000)$ esprimerà manifestamente la massa d'aria attraversata dai raggi da 3000ᵐ fino al limite dell'atmosfera, dovrà quindi coincidere col valore testè ottenuto

$$M(87^\circ) = 10{,}482\,.$$

Riproduco qui succintamente le accennate operazioni: il segno $\sim$ è da leggere *corrisponde a.*

Secondo la tav. II

z_{mare}		Δz_{3000}		z_{3000}
87°,4	$\sim$	— 27′,22	$\sim$	86°56′,78
87 ,5	$\sim$	— 28 ,14	$\sim$	87 1 ,86
87 ,6	$\sim$	— 29 ,13	$\sim$	87 6 ,87

Di qui mediante una semplice proporzione si ricava

$$z_{mare} = 87^\circ{,}4634 \sim z_{3000} = 87^\circ$$

Quindi $z_1 = 87^\circ{,}4634 = 87^\circ\,27'{,}80$ è la distanza zenitale, che posseggono al mare i raggi incidenti colla distanza zenitale 87° a 3000ᵐ di altezza.

Dalla tavola XXIII del citato lavoro (*Zur Theorie der Extinktion...*) si ricava allora

$$F(z_1) = F(87^\circ\,27'{,}80) = 17{,}173\,,$$

mentre dalla tav. I del presente lavoro si ha

$$F(z_1, 3000) = F(87^\circ\,27'{,}80\,;\,3000) = 6{,}689\,.$$

Indi

$$F(z_1) - F(z_1, 3000) = 10{,}484\,.$$

L'accordo di questi due valori M(87°) e $F(z_1) - F(z_1, 3000)$ ottenuti in modi del tutto indipendenti e col sussidio di quattro tavole numeriche diverse è in ogni caso assai soddisfacente. E anche la lieve differenza di 0,002 non è da attribuire menomamente, come taluno potrebbe ritenere, all'accumularsi degli errori di approssimazione delle varie tavole, bensì al fatto che la curva della refrazione corrispondente a $z = 87°$ *calcolata cogli elementi relativi ad un luogo a 3000ᵐ di altezza* non è perfettamente sovrapponibile (per quanto la teoria adoperata sia precisa, o come suol dirsi *pieghevole*) colla parte superiore della curva della refrazione corrispondente ad un'altra conveniente distanza zenitale z_1, *calcolata cogli elementi di un luogo al mare.* E appunto il valore sopra indicato con M (87°) si fonda sulla curva della refrazione calcolata cogli elementi relativi ad un luogo a 3000ᵐ di altezza, mentre i valori $F(z_1)$ e $F(z_1, 3000)$ si fondano sopra una curva della refrazione calcolata cogli elementi relativi ad un luogo al mare.

Un altro controllo, più semplice, ma meno comprensivo del precedente, perchè non abbraccia che due tavole, può aversi come segue. Nel citato lavoro (*Zur Theorie der Extinktion*...) si ottiene colla stessa teoria qui ammessa per la costituzione dell'atmosfera, ma con un procedimento analitico in luogo del procedimento numerico qui seguito, la massa d'aria attraversata dai raggi dal mare fino al limite dell'atmosfera. Qui abbiamo calcolato invece le masse d'aria attraversate dai raggi, dal mare fino a 5000ᵐ di altezza. È chiaro che, calcolando indipendentemente (sia con procedimento numerico, sia con procedimento analitico) la massa d'aria attraversata dai raggi da 5000ᵐ fino al limite dell'atmosfera, questo valore dovrà risultare uguale alla differenza dei due precedenti. Noi abbiamo eseguito questo calcolo per la distanza zenitale $z = 87°$, e crediamo utile riprodurne qui i punti principali, anche per dare un esempio numerico dei calcoli, su cui si fonda tutto il presente lavoro.

Posto

$$f = \frac{w\,(1-\gamma s)^k}{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 z - \alpha \operatorname{cosec}^2 z\,[1-(1-\gamma s)^k] + s}}$$

dove α, γ e k hanno i valori superiormente indicati, ed s (altezza relativa) si esprime per l'altezza h secondo la (11), noi abbiamo calcolato i valori di questa espressione di 500 in 500 metri a partire da $h = -750^m$, dando a w (intervallo d'integrazione) il valore 0,5 (mezzo chilometro). I valori ottenuti per questa espressione per $z = 87°$ sono riportati nella colonna f del sottostante quadro d'integrazione. Le altre colonne contengono: 1° le serie sommate ${}^1f$, il primo termine delle quali venne calcolato secondo la formola (18a); 2° le prime differenze f^1 delle f (le sole, che occorra qui considerare); 3° il secondo termine $\Delta\,{}^1f = \frac{1}{24} f^1(a + i + \frac{1}{2})$ della formola d'integrazione (18); 4° i valori di $\int_0^{iw} f dh$ ottenuti sommando le ${}^1f$ colle $\Delta\,{}^1f$. Questi ultimi valori di $\int_0^{iw} f dh$ arrotondati alla terza decimale sono quelli, che figurano nella tavola I in corrispondenza a $z = 87°$ e $H = 500^m, 1000^m, \ldots$ I valori per

H = 250^m, 750^m,... vennero ottenuti naturalmente mediante interpolazione nel mezzo dai valori precedenti.

h	$'f$	f	f'	$\Delta\,'f$	$\int_0^{iw} f dh$
		1,33364			
			— 9589		
		1,23775			
0^m	0,00369		— 8859	— 369	
		1,14916			
500	1,15285		— 8204	— 342	1,14943
		1,06712			
1000	2,21997		— 7595	— 316	2,21681
		0,99117			
1500	3,21114		— 7047	— 294	3,20820
		0,92070			
2000	4,13184		— 6541	— 272	4,12912
		0,85529			
2500	4,98713		— 6078	— 253	4,98460
		0,79451			
3000	5,78164		— 5650	— 235	5,77920
		0,73801			
3500	6,51965		— 5255	— 219	6,51746
		0,68546			
4000	7,20511		— 4891	— 204	7,20307
		0,63655			
4500	7,84166		— 4563	— 190	7,83976
		0,59092			
5000	8,43258		— 4234	— 176	8,43082
		0,54858			

Per eseguire ora il controllo superiormente accennato ho calcolato mediante integrazione numerica l'importo di $\int f dh$ da 5000^m fino al limite dell'atmosfera con $w = 500^m$ fino a 7^{km} di altezza, con $w = 1000^m$ da 7^{km} fino a 31^{km} e con $w = 2000^m$ al disopra dei 31^{km}. Ecco il relativo quadro d'integrazione, in cui sopprimo per brevità le colonne delle $\Delta\,'f$ e degli $\int_0^{iw} f dh$: le f, f' sono scritte in unità della 5^a decimale.

h	$'f$	f	f'
		59092	
km 5,0	0,00176		— 4234
		54858	
5,5	0,55034		— 3952
		50906	
6,0	1,05940		— 3683
		47223	
6,5	1,53163		— 3432
		43791	
7,0	1,96954		— 3196
		40595	

$$\int_5^7 f dh = 1{,}96821$$

h	$'f$	f	f'
		105695	
			— 14741
		90954	
km 7	1,97355		— 12809
		78145	
8	2,75500		— 11130
		67015	
9	3,42515		— 9671
		57344	
10	3,99859		— 8397
		48947	
11	4,48806		— 7287
		41660	
12	4,90466		— 6313
		35347	
13	5,25813		— 5462
		29885	
14	5,55698		— 4714
		25171	
15	5,80869		— 4061
		21110	
16	6,01979		— 3487
		17623	
17	6,19602		— 2987
		14636	
18	6,34238		— 2548
		12088	
19	6,46326		— 2167
		9921	

h	$'f$	f	f'
		9921	
km 20	6,56247		— 1831
		8090	
21	6,64337		— 1542
		6548	
22	6,70885		— 1292
		5256	
23	6,76141		— 1074
		4182	
24	6,80323		— 888
		3294	
25	6,83617		— 728
		2566	
26	6,86183		— 591
		1975	
27	6,88158		— 476
		1499	
28	6,89657		— 379
		1120	
29	6,90777		— 298
		822	
30	6,91599		— 231
		591	
31	6,92190		— 176
		415	

$$\int_5^{31} f dh = 6{,}92183$$

h	$'f$	f	f'
		2596	
			— 1199
		1397	
km 31	6,92213		— 708
		689	
33	6,92902		— 388
		301	
35	6,93208		— 190
		111	
37	6,93314		— 81
		30	
39	6,93344		— 25
		5	
41	6,93349		

Otteniamo dunque, detta H l'altezza corrispondente al limite dell'atmosfera,

$$\int_5^H f dh = 6{,}93349 .$$

Aggiungendo questo valore a quello risultante dal primo quadro d'integrazione

$$\int_0^5 f dh = 8{,}43082$$

si ottiene

$$\int_0^H f dh = 15{,}36431\,.$$

Questo numero, ottenuto come si è visto mediante due integrazioni numeriche distinte, una delle quali ha fornito i valori della nostra tavola I per $z = 87°$, esprime la massa d'aria attraversata dai raggi incidenti con $z = 87°$ al mare, lungo tutto il loro percorso dal mare fino al limite dell'atmosfera.

Ma la stessa massa è espressa anche dalla funzione $F(z)$ da me calcolata con procedimento analitico nel lavoro più volte citato. Ora questo procedimento fondato sopra uno sviluppo in serie convergentissimo fornisce (cfr. *Zur Theorie der Extinktion...* p. 42 in fine) i seguenti termini dei diversi ordini per il calcolo di $F(87°)$.

	$(F)_0$	15,0022
	$(F)_1$	3470
	$(F)_2$	144
	$(F)_3$	7
indi	$F(87°)$	15,3643

in coincidenza perfetta col valore superiormente ottenuto.

Un ultimo controllo della esattezza dei calcoli si ebbe col mezzo della formola (16_b) per λ_H. Lo sviluppo (16_b) esprime, pel modo com'è stato ottenuto, lo spessore dell'atmosfera sovrastante all'altezza H_0, ridotta omogenea alla densità normale dell'aria al mare. Ma lo spessore in discorso è espresso manifestamente anche da $\lambda_0[1 - F_0(0, H_0)]$, poichè λ_0 esprime lo spessore della intera atmosfera (ridotta omogenea ecc.) e $\lambda_0 F_0(0, H_0)$ lo spessore analogo per lo strato da 0 ad H_0; la differenza dà dunque bene lo spessore degli strati sovrastanti all'altezza H_0. Ora il calcolo per quadratura numerica, mediante il quale è stata ottenuta la tavola I, fornisce, ad esempio, per $H_0 = 3000^m$: $F_0(0, H_0) = 0.321548$, onde risulta

$$\lambda_{H_0} = \lambda_0[1 - F_0(0, H_0)] = [0.735200]\,,$$

mentre il calcolo analitico secondo la formola (16_b) fornisce

$$\lambda_{H_0} = [0.735201]$$

cioè quasi esattamente lo stesso.

9. Passando al calcolo del termine correttivo $\Delta_t F(z, H)$ dipendente dalla temperatura, basterà osservare, che secondo le (8), (9), (9') si ha

$$\Delta_t F(z, H) = \frac{1}{\lambda^*}\int_0^H \left(\frac{x_{t_0}}{1 + m t_0}\frac{d\sigma_{t_0}}{dh} - x_0 \frac{d\sigma_0}{dh}\right) dh\,,$$

significando $x_0, \frac{d\sigma_0}{dh}$ i valori della x e di $\frac{d\sigma}{dh}$, che risultano dalle formole (13_a), (14), (17) per $t_0 = 0°$, mentre $x_{t_0}, \frac{d\sigma_{t_0}}{dh}$ denotano i valori analoghi corrispondenti alla temperatura generica t_0. La espressione precedente venne senz'altro calcolata per quadratura numerica per una serie di valori di z e di H una prima volta per $t_0 = +20°$ e una seconda volta per $t_0 = -20°$. Queste quadrature numeriche riuscirono naturalmente assai più semplici di quelle relative ad $F_0(z, H)$ (tav. I) per la piccolezza dei valori della funzione integranda. Ottenuti per i singoli valori di z e di H i due valori

$$\Delta_{+20°} F(z, H) \quad , \quad \Delta_{-20°} F(z, H)$$

abbiamo da questi calcolato i coefficienti a e b della formola quadratica

$$\Delta_{t_0} F(z, H) = a(z, H) \frac{t_0}{10°} + b(z, H) \left(\frac{t_0}{10°}\right)^2 \tag{20}$$

e questi coefficienti vengono comunicati nelle tavole a doppia entrata III_a e III_b.

Tutto questo riguarda il calcolo del termine correttivo della temperatura per un luogo situato al mare. Per un luogo ad un'altezza H_0 qualunque fra 0^m e 5000^m lo stesso procedimento, che abbiamo accennato sopra (§ 5) per ottenere gli spessori atmosferici medî, servirà ad ottenere la rettificazione di temperatura. Si determinerà cioè colla tavola II la distanza zenitale z al mare che corrisponde alla distanza zenitale z_0 osservata all'altezza H_0. Ricavando dalle tavole III_a, III_b i valori $a(z, H_0), a(z, H)$; $b(z, H_0), b(z, H)$, le differenze $a(z, H) - a(z, H_0)$; $b(z, H) - b(z, H_0)$ saranno i valori da adoperare come a, b per ottenere secondo la formola (20) il termine correttivo $\Delta_t F(z, H)$ relativo allo spessore percorso dal raggio considerato fra le altezze H_0 ed H.

Degna di nota è, a questo riguardo, una circostanza a prima vista singolare, la quale può esprimersi come segue: le variazioni, dipendenti dalla temperatura, degli spessori atmosferici in uno strato inferiore a 5000^m possono risultare maggiori delle variazioni analoghe corrispondenti a percorsi estesi a tutta l'atmosfera. Così per $t_0 = +20°$ e $z = 87°$ si hanno da applicare agli spessori dati dalla tavola media (tav. I) le correzioni sotto indicate

H	$\Delta_t F(z, H)$
1000^m	— 0.146
2000	— 0.261
3000	— 0.349
4000	— 0.415
5000	— 0.463
10000	— 0.520
30000	— 0.233
per tutta l'atmosfera	— 0.221 [1]

[1] Cfr. *Zur Theorie der Extinktion*..... pag. 49.

Questo dipende naturalmente dal fatto, che le densità dell'aria corrispondenti all'ipotesi $t_0 = +20°$ solo fino ad una certa altezza (oltre 10000^m) riescono minori di quelle corrispondenti a $t_0 = 0°$; da una certa altezza in poi prendono il sopravvento e quindi il termine correttivo corrispondente agli strati superiori ha il segno opposto a quello per gli strati inferiori. Come si vede, anche colla semplice ipotesi di un decrescimento uniforme della temperatura coll'altezza, la costituzione portata dalle leggi fisiche per l'atmosfera non riesce così semplice, come si potrebbe attendere.

10. Per quanto riguarda la rettificazione di pressione, abbiamo ricercato anzitutto, se le variazioni di pressione avessero effetto sensibile sull'integrale della formola (8), cioè in quanto B compare nella costante α della refrazione. Risultò per $z = 87°$ ed $H = 5000^m$ da un calcolo per quadrature numeriche

$$\frac{1}{\lambda^*}\left\{\left(\int_0^{5000} x\, d\sigma\right)_{760^{mm}} - \left(\int_0^{5000} x\, d\sigma\right)_{740^{mm}}\right\} = 0.004 .$$

L'influenza della pressione, per quanto questa entra nella costante della refrazione, è dunque del tutto trascurabile; e per rettificare le masse d'aria fornite dalla nostra tav. I della correzione dipendente dalla pressione basta moltiplicarle per il fattore $\frac{B}{760^{mm}}$. Tale rettificazione viene agevolata dalla tav. IV, che fornisce in corrispondenza all'argomento M (massa d'aria attraversata dai raggi già rettificata per la temperatura) l'incremento ΔM di M, che corrisponde all'aumento di 10^{mm} nella pressione.

Questo per un luogo situato al mare. Se si vuol tener conto della correzione analoga per una stazione all'altezza H_0, indicando con $B^*_{H_0}$ la pressione normale, data secondo le (13) (14) da

$$B^*_{H_0} = B^*(1 - \gamma S_0)^{k+1} \qquad (B^* = 760^{mm})$$

e con B_{H_0} la pressione effettiva, data analogamente da

$$B_{H_0} = B_0(1 - \gamma S_0)^{k+1}, \qquad (B_0 = \text{pressione effettiva al mare})$$

si avrà per divisione

$$\frac{B_{H_0}}{B^*_{H_0}} = \frac{B_0}{B^*} .$$

Dunque il fattore correttivo dipendente dalla pressione è lo stesso, per date condizioni meteorologiche, a tutte le altezze, epperò ricordando che lo spessore di un percorso fra due altezze qualunque H_0 ed H vien da noi ottenuto come differenza di due spessori aventi il limite inferiore al mare, concludiamo, che la correzione di pressione si applica per qualunque altezza nell'identico modo come al mare cioè secondo la formola

$$\left[\int_{H_0}^{H_1} F(z, h)\, dh\right]_{t,B} = \left[\int_{H_0}^{H_1} F(z, h)\, dh\right]_{t,B^*} \cdot \frac{B}{B^*} .$$

11. Abbiamo ricercato infine quale influenza possa avere nel calcolo della estinzione una variazione del gradiente termico coll'altezza. Visto l'intimo legame, che passa

fra i parametri k e β (formola 14_a), basterà cercare quale variazione corrisponde, nel calcolo degli spessori atmosferici ad una data variazione di k. Assumendo in luogo di $k=\frac{9}{2}$ ($\beta=6°.21$) il valore $k=5$ ($\beta=5°.68$) risulta per $z=87°$ e $H=5000^m$, doversi applicare allo spessore atmosferico dato dalla tavola media (8.434) la correzione $+0.030$, correzione così piccola (tenuto conto anche, che si riferisce a una distanza zenitale ben grande), che non è evidentemente il caso di tenerne conto.

12. Perchè lo studio dei termini di correzione dipendenti dalla temperatura e dalla pressione sia completo, non resta che ricercare la influenza di questi elementi sulle refrazioni medie da noi date nella tav. II. Si vede fin da principio, che le relative correzioni non possono esser che piccolissime, perchè la temperatura e la pressione non entrano nella formola (19) che per il termine di 2° ordine

$$\varepsilon_z(1-x)=(\varepsilon_z)_0\frac{1}{1+mt_0}\frac{B}{760}(1-x).$$

Risulta infatti per $z=89°$, per $H=5000^m$ e per $t_0=+20°$ doversi applicare alla refrazione media data dalla tavola II (1°18'.7) la correzione $+1'.4$. Ancora minore risulta la correzione dipendente da una ordinaria variazione della pressione. Le correzioni in discorso sono dunque senz'altro trascurabili.

13. Per lo studio dell'assorbimento selettivo è di grande interesse, oltre alla conoscenza degli spessori atmosferici attraversati dai raggi nello strato d'aria compreso fra due date stazioni, anche la conoscenza degli spessori atmosferici attraversati precedentemente, prima di giungere al livello della stazione superiore. A tal fine comunico nella tavola V, i valori delle masse d'aria attraversate dai raggi luminosi dal mare fino al limite dell'atmosfera, per distanze zenitali z da 0° fino a 89°. Detta tavola venne calcolata secondo la stessa teoria e le stesse costanti, che qui adopero, nel lavoro più volte accennato *Zur Theorie der Extinktion...* (Tafel XXIII). Nella seguente tavola VI comunico le rettificazioni dipendenti dalla temperatura per le masse d'aria fornite dalla tavola V. Anche queste rettificazioni vennero calcolate naturalmente secondo le norme indicate nel citato lavoro.

Nella tavola VII vennero raccolti per una serie altezze nel livello del mare i valori da noi ottenuti per le principali quantità, che compaiono nel calcolo degli spessori atmosferici, e cioè i valori della variabile ausiliaria s, della densità relativa dell'aria x, degli spessori atmosferici in direzione verticale λ_H e di altre quantità di continua applicazione nei calcoli relativi all'assorbimento atmosferico, e che possono tornare utili anche in altre ricerche affini.

Seguono in fine le tavole I_E, II_E, III_E per lo strato Catania-Etna ricavate per interpolazione dalle tavole più ampie I e II, III secondo i procedimenti accennati nei precedenti §§. Di queste tavole viene fatta estesa applicazione nel seguente capitolo.

14. Prima però di procedere a tale applicazione, non sarà fuor di luogo vedere, entro quali limiti la teoria qui proposta per il decrescimento della densità dell'aria

coll'altezza si accordi coi dati meteorologici, che accompagnarono quelle osservazioni. Le formole da me proposte non hanno certo la pretesa di concorrere per esattezza colle ben note formole altimetriche del Lugli e di altri, nè lo potrebbero a priori, visto che qui si prescinde completamente dalla umidità, e che in generale si limitano gli sviluppi a quel grado di esattezza, che è proporzionato alla precisione raggiungibile in misure astrofotometriche. Altra ragione, per la quale non può attendersi a priori un perfetto accordo fra le osservazioni meteorologiche in Catania e all'Etna da una parte e le formole altimetriche dall'altra, si è che la distanza delle due stazioni importa in linea retta ben 26^{km}, cosicchè può esser ben sensibile la influenza di eventuali depressioni barometriche o di gradienti termici orizzontali, a tutto detrimento dell'approssimazione delle formole altimetriche. In ogni modo risulterà, che l'accordo fra la teoria qui proposta e le osservazioni meteorologiche è del tutto soddisfacente.

Debbo alla cortesia del dott. Mendola assistente nell'Osservatorio di Catania la comunicazione dei dati seguenti relativi alla temperatura e pressione nei giorni nei quali osservarono Müller e Kempf e per le ore 21 corrispondenti all'incirca al principio delle osservazioni.

	T_C	T_E	$T_C - T_E$	B_C	B_E	$B_C - B_E$
1894 Agosto 20	23°.3	3°.1	20°.2	755.3 mm	536.9 mm	218.4 mm
» » 21	23.4	2.4	21.0	755.1	536.7	218.4
» » 22	22.8	5.7	17.1	759.2	540.4	218.8
» » 23	26.4	10.1	16.3	761.7	542.7	219.0
» » 24	25.2	10.3	14.9	760.6	543.0	217.6
» » 25	25.6	7.6	18.0	758.4	541.8	216.6
» » 26	27.0	7.3	19.7	758.4	543.0	215.4
» » 27	29.2	8.5	20.7	758.2	539.1	219.1

La media dei valori $T_C - T_E$ è 18°.49, ed essendo valutata a 69^m l'altezza dell'Osservatorio di Catania e a 2942^m quella dell'Osservatore Etneo e quindi a 2873^m la differenza di livello, ne segue come valore medio del gradiente termico in altezza fra le accennate stazioni, nelle accennate sere, il valore

$$\beta = 6°.44$$

in accordo, che può ben dirsi soddisfacente col valore da noi ammesso come normale

$$\beta = 6°.21.$$

Per quanto riguarda poi le pressioni, detti p_0, p_C, p_E rispettivamente i valori delle pressioni relative (1) al mare, in Catania e all'Etna; H_C, H_E le altezze in metri

(1) $p = \frac{B}{760}$, se B indica la pressione in *mm*,

delle due stazioni; s_C, s_E i valori corrispondenti della variabile s, cioè

$$s_C = \frac{H_C}{a + H_C} \quad , \quad s_E = \frac{H_E}{a + H_E} ,$$

sussisteranno secondo la (12) le formole

$$\frac{p_C}{p_0} = x_C(1 - \gamma s_C) = (1 - \gamma s_C)^{k+1}$$

$$\frac{p_E}{p_0} = x_E(1 - \gamma s_E) = (1 - \gamma s_E)^{k+1} ,$$

onde

$$\frac{p_E}{p_C} = \left(\frac{1 - \gamma s_E}{1 - \gamma s_C}\right)^{k+1} .$$

In questa formola γ ha il valore

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + m t_0}$$

t_0 essendo la temperatura al mare, per la quale potremo prendere senz'altro i valori osservati in Catania. Per verificare allora, fino a che grado questa formola per $\frac{p_E}{p_C}$ si accordi coi dati di fatto, non avremo che a introdurvi i valori p_C e t_0 delle pressioni e temperature osservate in Catania, e confrontare i valori, che ne conseguono per p_E coi valori della pressione effettivamente osservati all' Etna. Si ottiene

	Agosto 20	21	22	23	24	25	26	27
Valori calcolati $(p_E)_C =$	$\overset{mm}{536.9}$	536.8	539.3	543.4	541.8	540.5	541.4	542.6
» osservati $(p_E)_0 =$	536.9	537.7	540.4	542.7	543.0	541.9	543.0	539.1
$O - C =$	0.0	-0.1	$+1.1$	-0.7	$+1.2$	$+0.7$	$+1.6$	-3.5

Il valore medio degli $O - C$ è dunque $\pm 1^{mm}.2$, approssimazione certo considerevole, e che non vorrà riguardarsi come fortuita.

Questa è anche all' incirca l'approsimazione, che può attribuirsi ai valori delle masse d'aria dati dalle nostre tavole per le varie distanze zenitali. Non sarà fuor di luogo il rilevare quanto questa approssimazione sia superiore a quella consentita dal procedimento fin qui seguito dagli sperimentatori (Langley e Müller-Kempf) per calcolare le masse d'aria. Nella Memoria più volte citata di Müller-Kempf (pag. 272) si trova l' inciso seguente: *Le masse d'aria* (sovrastanti le due stazioni) *stanno fra loro come le rispettive altezze barometriche* (540^{mm} per l'Etna e 760^{mm} per Catania). *Se si indica quindi con* 1 *la massa della intera atmosfera, la massa* l_1 *della colonna d'aria* (verticale) *sovrastante all'Etna sarà espressa da*

$$l_1 = \frac{540}{650} = 0.711 .$$

Ne seguirebbe per la massa della colonna verticale d'aria Catania-Etna il valore

$$1 - l_1 = 0.289 .$$

Ora secondo le nostre tavole I_E, II_E questo è prossimamente il valore della massa d'aria dello strato Catania-Etna in direzione verticale, per condizioni normali di pressione e per 20° di temperatura. Il detto valore può considerarsi quindi in ogni caso come un buon valore *medio*; ma l'escursione annua della temperatura è per Catania almeno 30°, e a tale escursione corrisponde secondo la nostra tavola III_E una oscillazione di 0,027 nella massa d'aria (in direzione verticale) pari a circa 20^{mm} di mercurio.

Questo certo non piccolo divario sfugge completamente al calcolo delle masse secondo la formola semplice adoperata da Langley e da Müller-Kempf, mentre viene agevolmente sottoposto al calcolo mediante le nostre tavole.

Per il calcolo delle masse d'aria attraversate dai raggi luminosi in direzione obliqua fra due determinate altezze non è possibile alcun confronto con calcoli di altri esperimentatori, perchè questo genere di calcoli costituisce appunto l'innovazione essenziale portata dal presente lavoro. Taluno [1] ha però calcolato gli spessori atmosferici in direzione obliqua mediante la formola approssimata

$$M_z = M_0 \sec z\,,$$

M_0 indicando lo spessore dello strato atmosferico in direzione verticale ed M_z lo spessore analogo per la distanza zenitale z. Ma questa formola, a meno che lo strato atmosferico considerato non sia sottilissimo, è ammissibile appena fino a $z = 65°$ o 70° al più, e diventa del tutto scorretta per distanze zenitali alquanto forti.

III.

Le osservazioni fotometriche di Müller e Kempf in Catania e all'Etna.

Come si è già accennato altrove, il programma d'osservazione, che Müller e Kempf si erano prefisso di svolgere nel 1894 negli Osservatorî di Catania e dell'Etna, comprendeva per le singole sere d'osservazione:

1°. La determinazione della curva d'estinzione separatamente per Catania e per l'Etna mediante osservazioni simultanee di una medesima stella, dal levare fino ad una considerevole altezza sull'orizzonte.

2°. La determinazione diretta dell'assorbimento esercitato dallo strato d'aria Catania-Etna nella direzione verticale mediante osservazioni simultanee di stelle zenitali nelle due stazioni.

Soltanto questa seconda parte del programma potè venir svolta completamente in tutte le nove sere d'osservazione. La prima parte per varî contrattempi causati, e dalla difficoltà delle comunicazioni, e dalle vicende meteorologiche all'Etna riuscì solo in cinque sere (1894, agosto 20, 21, 22, 25, 26). Queste sere soltanto sono dunque utilizzabili per il nostro scopo, che riflette la determinazione dell'assorbimento atmosferico da coppie di osservazioni estrazenitali.

[1] Così il ch.mo prof. Oddone nella sua Nota: *Sul coefficiente medio di trasparenza dell'aria per grandi visuali terrestri*. Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 5ª, vol. XXXIV, 1901, pag. 511.

1. Per le osservazioni di estinzione M. e K. usavano osservare alternativamente la stella d'estinzione e la polare, con che conseguivano il vantaggio di eliminare la influenza di eventuali variazioni personali e strumentali nel corso di una medesima sera. Per il nostro scopo conviene però conoscere le luminosità effettive osservate nelle due stazioni per la stella di estinzione e non le luminosità relative alla polare, poichè questa non ha naturalmente la stessa intensità luminosa apparente nelle due stazioni. Ora gli A. A. comunicano nella loro Memoria le puntate fatte al fotometro a cuneo separatamente per la stella di estinzione e per la polare. Se noi dunque ammettiamo, che le variazioni fisiologiche e strumentali, che avvengono nel corso di una sera risultino eliminate o compensate nella media di tutte le letture fatte per la polare nel corso di detta sera, questa media esprimerà la lettura esatta corrispondente alla polare, e aggiungendo a questa la differenza osservata (in mm.) fra la stella di estinzione e la polare, nel senso $\star - P$, si avranno le singole letture della stella di estinzione libere, per quanto è possibile ottenere, degli errori non controllabili di origine fisiologica e strumentale.

Le letture così ottenute per Catania e per l'Etna (L_C ed L_E) non sono direttamente paragonabili due a due, vale a dire la traiettoria dei raggi luminosi osservati all'Etna non collima esattamente colla parte superiore della traiettoria dei raggi osservati (simultaneamente o quasi) in Catania, perchè la simultaneità delle osservazioni non trae seco (in generale) la eguaglianza degli angoli z' e z_1, da cui dipende la sovrapponibilità delle due traiettorie (cfr. Cap. I). Però, come si è accennato a suo luogo, si può ovviare a questo inconveniente con un semplice procedimento di rettificazione, che consiste nell'apportare alle luminosità osservate nella stazione superiore correzioni convenienti per ridurle dalla distanza zenitale effettivamente osservata all'Etna z_E, a quella voluta z_E'. Per questo occorre il coefficiente differenziale della luminosità in discorso rispetto alla distanza zenitale z_E, quale potrebbe venir fornito da un procedimento grafico, o da una formola empirica qualunque. Ad evitare qualsiasi elemento soggettivo, ho applicato la formola consueta della estinzione

$$g = g_0 - \frac{\log p}{0.4}\left[F(z_E) - 1\right],$$

la quale, abbiano o no le costanti g_0, p il significato fisico, che viene loro comunemente attribuito, fornisce indubbiamente un'ottima formola di ragguaglio. Pei valori di $F(z_E)$ (spessori atmosferici estesi a tutta l'atmosfera) ho applicato la tavola V del presente lavoro. La formola precedente può scriversi più semplicemente

$$g = x + y\left[F(z_E) - 1\right]$$

e la questione, che ci siamo proposta, equivale a quella di determinare le incognite x, y da un certo numero di equazioni di questa forma, essendo g e z_E dati d'osservazione ed $F(z_E)$ fornito dalla detta tavola. Ho fatto questa determinazione col metodo dei minimi quadrati. Riproduco nel quadro seguente per ognuna delle sere i valori g e z_E ricavati dalla Memoria di M. e K. (e precisamente dalla tavola VI), indi i valori di $F(z_E) - 1$, e in un'ultima colonna i valori *Oss.* — *Calc.* Seguono appresso le equazioni normali e i valori ottenuti per le x, y.

1894 Agosto 20				Agosto 21				Agosto 22				Agosto 25				Agosto 26			
z_E	g	$F(z_E)-1$	O—C	z_E	g	$F(z_E)-1$	O—C	z_E	g	$F(z_E)-1$	O—C	z_E	g	$F(z_E)-1$	O—C	z_E	g	$F(z_E)-1$	O—C
81°.59	1.71	5.58	+ 3	87°.22	2.72	15.17	— 14	86°.26	2.40	13.91	— 6	85°.29	1.47	9.91	— 17	83°.32	1.23	7.10	— 6
79.28	1.54	4.25	+ 1	82.93	1.82	6.70	+ 17	82.17	1.65	6.02	+ 22	84.07	1.67	7.99	+ 29	80.01	0.96	4.60	+ 2
74.01	1.19	2.59	— 15	79.09	1.47	4.16	+ 18	78.11	1.03	3.76	— 10	80.56	0.93	4.91	— 3	77.36	0.98	3.49	+ 20
70.09	1.32	1.92	+ 6	74.21	1.06	2.63	— 1	73.23	1.00	2.43	+ 4	77.93	0.72	3.69	— 7	73.56	0.43	2.50	— 21
64.95	1.29	1.35	+ 9	64.76	1.21	1.33	+ 32	69 30	0.81	1.81	— 7	74.31	0.39	2.65	— 26	70.52	0.61	1.98	+ 5
61.21	1.27	1.07	+ 10	61.60	0.66	1.10	— 19	64.37	0.93	1.30	+ 12	71.45	0.78	2.12	+ 20	66.59	0.54	1.50	+ 4
56.29	0.95	0.80	— 18	56.68	0.94	0.86	+ 12	60.62	0.69	1.03	— 9	67.23	0.56	1.57	+ 5	63.35	0 35	1.22	— 10
44.02	1.14	0.39	+ 5	44.02	0.66	0.39	— 9	55.51	0.65	0.76	— 9	64.33	0.29	1.30	— 18	59.18	0.19	0.95	— 23
39.48	1.07	0.29	— 1	39.30	0.64	0.29	— 10	43.10	0.38	0.37	— 3	60.02	0.68	1.00	+ 25	47.91	0.63	0.49	+ 28
				36.01	0.44	0.24	— 29	38.59	0.56	0.28	— 12	48.80	0.29	0.52	— 7	43.43	0.38	0.38	+ 5
				31.98	0.76	0.18	+ 4	35.34	0.74	0.22	+ 7	44.15	0.30	0.39	— 5	39.99	0.41	0.30	+ 9
				29.24	0.78	0.15	+ 6	31.23	0.67	0.17	0	40.90	0.20	0.32	— 14	35.23	0.18	0.22	— 13
				26.02	0.63	0.11	— 8	28.45	0.66	0.14	0	36.15	0.51	0.24	+ 18				
								25.73	1.05	0.11	+ 39								

Agosto 20	Agosto 21	Agosto 22	Agosto 25	Agosto 26
$9x + 8.23y = 11.48$	$13x + 83.31y = 13.79$	$14x + 32.31y = 13.22$	$13x + 36.61y = 8.79$	$12x + 24.73y = 6.89$
$18.23x + 63.36y = 26.31$	$33.31x + 308.26y = 66.37$	$32.31x + 256.63y = 54.27$	$36.61x + 216.96y = 40.20$	$24.73x + 99.11y = 20.89$
$x = 1.04$	$x = 0.70$	$x = 0.64$	$x = 0.64$	$x = 0.29$
$\log y = 9.0622$	$\log y = 9.1536$	$\log y = 9.1157$	$\log y = 9.1324$	$\log y = 9.1520$

Si noterà, che i valori O — C da noi ottenuti coincidono quasi perfettamente cogli O — C ottenuti da M. e K. Questo non significa altro, se non che la formola di Laplace (adoperata da M. e K. per la riduzione delle loro osservazioni) è un'ottima formola di ragguaglio per le osservazioni di estinzione, tanto che la rappresentazione delle osservazioni stesse riesce egualmente bene con questa formola come con quella più rigorosa da me data nel lavoro citato. È da porre mente tuttavia, che questo dipende in gran parte dalla circostanza che nelle attuali serie di osservazioni scarseggiano forti distanze zenitali (tre sole superano 85°).

2. Dopo questi calcoli preliminari la riduzione delle osservazioni procede nel modo seguente.

Dai valori di z app. corrispondenti alle osservazioni di Catania (z_C), si ricavano mediante la tavola II_E per l'Etna (pag. 338) le distanze zenitali apparenti z_E', che i raggi osservati in Catania hanno all'altezza dell'Etna, indi i valori $F(z_E')$ mediante la tavola V. Si formano in seguito i valori $F(z_E)$ corrispondenti alle distanze zenitali z_E effettivamente osservate all'Etna (questi valori sono già stati ottenuti nel computo precedente per la formazione di $F(z_E) - 1$). La differenza $F(z_E') - F(z_E)$ moltiplicata per y (relativo alla sera di cui si tratta) dà la correzione da apportare alla g osservata per ridurla alla distanza zenitale z_E'. Poichè noi però ci riferiamo alle letture L_E al fotometro (scala in mm.), le dette differenze saranno da moltiplicare, anzichè per y, per $-y:K$ (se K rappresenta la costante del fotometro, (vale a dire l'equivalente di 1 mm. in classi di grandezza stellare) e si hanno così le correzioni analoghe ΔL da farsi alle letture L_E [1]. Ottenuta così per ogni osservazione all'Etna la lettura L'_E ridotta alla distanza zenitale z_E' e quindi immediatamente paragonabile alla lettura L_C, la differenza $L'_E - L_C$ esprimerà l'importo dall'assorbimento dovuto allo strato Catania-Etna *più* l'ammontare delle equazioni personali e strumentali.

3. Non rimane dunque ormai che sceverare queste ultime due cause di errore, ciò che trovasi già fatto nella Memoria di Müller e Kempf. Posto che l'osservatore M e lo strumento I si trovino all'Etna, e l'osservatore K e lo strumento II in Catania, avrà luogo un'equazione della forma

$$L'_E - L_C = (\text{Assorb.}) + (M - K) + (I - II).$$

E se si scambiano successivamente gli strumenti, o gli osservatori, o strumenti e osservatori insieme, varranno rispettivamente le altre tre equazioni

$$L'_E - L_C = (\text{Assorb.}) + (M - K) - (I - II)$$
$$L'_E - L_C = (\text{Assorb.}) - (M - K) + (I - II)$$
$$L'_E - L_C = (\text{Assorb.}) - (M - K) - (I - II).$$

Da tali quattro equazioni applicate alle osservazioni di stelle zenitali Müller e Kempf poterono ricavare (essendo elementi noti le $L'_E - L_C$) i seguenti valori delle incognite

[1] Il segno — attribuito al fattore $-y:K$ per l'ottenimento di ΔL dipende dal fatto, che, aumentando il numero ordinale della grandezza g, diminuisce la luminosità della stella e quindi anche la lettura L al fotometro. È da notare altresì, che le g del quadro precedente sono le differenze di grandezza $G_* - G_P$ fra la stella d'estinzione e la polare, mentre le L_E attuali sono le letture corrispondenti alle grandezze G_* della stella d'estinzione. È però manifesto, che $\frac{\Delta g}{\Delta z} = \frac{\Delta G_*}{\Delta z}$.

(Assorb.) (nella direzione verticale) $= + 0^m.53$
(M — K) (equazione personale) $= - 0.\ 55$
(I — II) (equazione strumentale) $= + 0.\ 38.$

Noi possiamo senz'altro applicare i due ultimi dati per il nostro scopo, perchè non c'è ragione, per cui debbano variare le quantità in questione col variare della distanza zenitale. E siccome nel caso nostro non si presentano che le prime due combinazioni, circa la distribuzione degli osservatori e degli strumenti, così avremo rispettivamente:

(21) 1ª Combin.ne (Ag. 20, 21, 22) $\text{Assorb.} = (L'_E - L_C) - (M - K) - (I - II) = (L'_E - L_C) + 0^m.17$

2ª Combin.ne (Ag. 25, 26) $\text{Assorb.} = (L'_E - L_C) - (M - K) + (I - II) = (L'_E - L_C) + 0^m.93$

Abbiamo racchiuso fra parentesi la differenza $L'_E - L_C$ per indicare, che deve intendersi convertita in classi di grandezza mediante moltiplicazione per la costante K del fotometro ($0^m.1958$).

4. Si ha così da ogni coppia di osservazioni estrazenitali simultanee, come puro risultato di osservazione, l'assorbimento esercitato dallo strato Catania-Etna lungo la traiettoria corrispondente alla distanza zenitale z_C (distanza zenitale apparente apparente in Catania). Si ricavi allora con questo valore z_C dalla tavola I_E per lo strato Catania-Etna (pag. 335) la massa $F(z, H)$ attraversata dai raggi in questione [1]. Il quoziente $q = \frac{\text{Assorb.}}{F(z, H)}$ ci darà il coefficiente di assorbimento medio relativo alle singole masse considerate (unità di massa la massa di un'atmosfera). Riferendosi invece alla teoria di Bouguer-Pouillet, il detto quoziente moltiplicato per 0.4 fornisce il logaritmo del coefficiente di trasmissione p (per un'atmosfera).

Nei prospetti seguenti riproduco i valori ottenuti dalle singole coppie di stelle per il coefficiente di trasmissione p e i dati principali dei relativi calcoli. Precisamente la prima colonna contiene le distanze zenitali relative alle osservazioni in Catania (z_C), la seconda contiene la correzione di refrazione Δz data dalla tavola II_E (pag. 338) per ricavare dalla distanza zenitale z_C la distanza zenitale z_E' (3ª colonna), che i raggi osservati in Catania possiedono all'altezza dell'Etna. La quarta colonna contiene la differenza degli spessori atmosferici corrispondenti alle distanze zenitali z_E' e z_E (distanza zenitale effettivamente osservata all'Etna); la quinta contiene la correzione ΔL_E da farsi alla lettura ottenuta all'Etna, in corrispondenza alla detta differenza di spessori atmosferici; la 6ª, 7ª, 8ª, 9ª colonna contengono rispettivamente le letture fatte all'Etna, le medesime corrette, le letture fatte in Catania e le differenze di queste ultime due; la 10ª colonna dà l'assorbimento in classi di grandezza ricavato dalle $L_E' - L_C$ nel modo espresso dalle equazioni (21); la 11ª le masse d'aria $F(z, H)$ attraversate dai raggi nello strato Catania-Etna, ricavate dalla tavola I_E pag. 337 coll'argomento z_C. L'ultima colonna infine dà i valori ottenuti per il coefficiente di trasmissione p. È bene inteso, che alla terza cifra decimale in $F(z, H)$ e in p non è da attribuire che il significato di *risultato di calcolo*, in altri termini si comunica questa cifra, non già nel senso, che sia questo il grado di precisione corrispondente alla precisione delle osservazioni, ma solo per assicurare la esattezza della seconda decimale.

[1] Non teniamo conto per il calcolo di detta massa della lieve rettificazione dipendente dalla temperatura, rettificazione che dovrebbe applicarsi secondo la tavola III_E.

Agosto 20 — γ *Pegasi.*

z_C	Δz	z'_E	$F(z'_E) - F(z_C)$	ΔL_E	L_E	L'_E	L_C	$L'_E - L_C$	Assorb.	$F(z, H)$	p
°	°	°		mm	mm	mm	mm	mm	m		
82.57	— 0.16	82.41	+ 0.65	— 0.38	58.79	58.41	50.19	+ 8.22	1.78	2.396	0.505
78.14	— 0.10	78.04	— 0.52	+ 0.31	58.63	58.94	50.86	+ 8.08	1.75	1.514	0.345
73.84	— 0.07	73.77	— 0.05	+ 0.03	60.43	60.46	55.12	+ 5.34	1.22	1.120	0.366
70.68	— 0.06	70.62	+ 0.07	— 0.04	59.80	59.76	56.84	+ 2.92	0.74	0.943	0.485
65.35	— 0.05	65.30	+ 0.03	— 0.02	59.91	59.89	56.12	+ 3.77	0.91	0.747	0.326
61.38	— 0.04	61.34	+ 0.01	— 0.01	60.03	60.02	57.72	+ 2.30	0.62	0.652	0.417
43.0	—	43.0	— 0.02	— 0.01	60.70	60.69	60.84	— 0 15	0.14	0.427	0.740
39.4	—	39.4	—	—	61.03	61.03	59.12	+ 1.91	0.54	0.404	0.292
Agosto 21 — γ *Pegasi.*											
81.80	— 0.16	81.65	— 1.08	+ 0.79	56.55	57.34	52.55	4.79	1.11	2.171	0.624
77.94	— 0.10	77.84	— 0.50	+ 0.37	58.35	58.72	51.82	6.90	1.52	1.489	0.391
73.05	— 0.07	72.98	— 0.24	+ 0.18	60.44	60.62	57.98	2.64	0.69	1.069	0.552
64.16	— 0.05	64.11	— 0.05	+ 0.04	59.67	59.71	57.60	2.11	0.57	1.746	0.481
60.59	— 0.04	60.55	— 0.07	+ 0.05	62.47	62.52	57.62	4.90	1.13	0.637	0.195
55.47	— 0.03	55.44	— 0.06	+ 0.04	61.07	61.11	57.72	3.39	0.83	0.552	0.251
43.0	—	43.0	— 0.02	+ 0.02	62.50	62.52	58.78	3.74	0.90	0.427	0.143
38.7	—	38.7	— 0.01	+ 0.01	62.57	62.58	61.30	1.28	0.42	0.400	0.381
35.0	—	35.0	— 0.02	+ 0.01	63.60	63.61	61.10	2.51	0.66	0.381	0.203
31.1	—	31.1	— 0.01	+ 0.01	61.97	61.98	60.25	1.73	0.50	0.364	0.282
28.1	—	28.1	— 0.01	+ 0.01	61.90	61.91	60.75	1.16	0.40	0.354	0.354
25.5	—	25.5	—	—	62.97	62.67	60.75	1.92	0.55	0.346	0.231
Agosto 22 — γ *Pegasi.*											
81.99	— 0.19	81.84	— 0.26	+ 0.17	57.07	57.24	53.30	+ 3.94	0.94	2.221	0.678
78.14	— 0.10	78.04	— 0.03	+ 0.01	60.24	60.25	54.67	+ 5.58	1.26	1.514	0.465
72.26	— 0.07	72.19	— 0.19	+ 0.13	60.42	60.55	57.82	+ 2.73	0.70	1.023	0.532
69.10	— 0.06	69.04	— 0.03	+ 0.02	61.37	61.39	58.43	+ 2.96	0.75	0.874	0.453
64.36	— 0.05	64.31	— 0.01	0.00	60.75	60.75	60.06	+ 0.69	0.31	0.721	0.673
60.39	— 0.04	60.35	— 0.02	+ 0.01	61.99	62.00	60.23	+ 1.77	0.52	0.633	0.469
55.28	— 0.03	55.25	— 0.01	+ 0.01	62.20	62.21	59.91	+ 2.30	0.62	0.550	0.354
43.0	—	43.0	—	—	63.55	63.55	61.77	+ 1.78	0.52	0.427	0.325
38.3	—	38.3	—	—	62.64	62.64	60.87	+ 1.77	0.52	0.398	0.300
35.0	—	35.0	—	—	61.74	61.74	62.01	— 0.27	0.12	0.381	0.748
31.2	—	31.2	—	—	62.10	62.10	61.80	+ 0.30	0.23	0.365	0.560
28.4	—	28.4	—	—	62.12	62.12	60.15	+ 1.97	0.56	0.355	0.234
25.5	—	25.5	—	—	60.15	60.15	62.05	— 1.90	—0.20	0.346	—

Agosto 25 — *γ Andromedae.*

z_C	Δz	z'_E	$F(z'_E) - F(z_E)$	ΔL_E	L_E	L'_E	L_C	$L'_E - L_C$	Assorb.	$F(z, H)$	p
84°.09	— 0°.21	83°.88	— 0.15	mm + 0.10	mm 57.45	mm 57.55	mm 52.41	mm + 5.14	m 1.94	2.985	0.549
80.43	— 0.13	80.30	— 0.15	+ 0.10	60.43	60.53	57.91	+ 2.62	1.44	1.868	0.492
77.94	— 0.10	77.84	— 0.03	+ 0.02	61.62	61.64	61.44	+ 0.20	0.97	1.489	0.548
74.46	— 0.08	74 38	+ 0.02	— 0.01	62.65	62.64	62.01	+ 0.63	1.05	1.163	0.436
71.59	— 0.07	71.52	+ 0.01	— 0.01	63.18	63.17	62.36	+ 0.77	1.08	0.988	0.366
67.52	— 0.05	67.47	+ 0.03	— 0.02	63.72	63.70	64.71	— 1.01	0.73	0.816	0.439
64.29	— 0.05	64.24	— 0.01	0.00	63.99	63.99	63.94	+ 0.05	0.94	0.719	0.300
60.14	— 0.04	60.10	0.00	0.00	64.30	64.30	63.74	+ 0.56	1.04	0 627	0.217
48.0	—	48.0	— 0.02	+ 0.02	64.77	64.79	65.79	— 1.20	0.70	0.466	0.251
44.4	—	44.4	—	—	64.90	64.90	65 03	— 0.13	0.90	0.437	0.150
40.8	—	40.8	—	—	64.97	64.97	65.81	— 0 84	0.77	0.413	0.180
36 4	—	36.4	—	—	65.05	65.05	64.58	+ 0.47	1 02	0.388	0.089

Agosto 26 — *γ Andromedae.*

z_C	Δz	z'_E	$F(z'_E) - F(z_E)$	ΔL_E	L_E	L'_E	L_C	$L'_E - L_C$	Assorb.	$F(z, H)$	p
83.20	— 0.18	83.02	— 0.32	+ 0.23	60.22	60.45	55.94	+ 4.51	1.81	2.606	0.527
80.03	— 0.12	79.91	— 0.51	+ 0.04	61.59	61.63	59.02	+ 2.61	1.44	1 894	0.497
77.37	— 0.10	77.27	— 0.30	+ 0.02	61.51	61.53	60.17	+ 1.36	1.20	1.423	0.460
73.57	— 0.07	73.50	— 0.12	— 0.01	64.31	64.32	62.93	+ 1.39	1.20	1.100	0.450
70.66	— 0 06	70.60	+ 0.11	+ 0.01	63.36	63.35	63.37	— 0.02	0.93	0.942	0.403
66.88	— 0.05	66.83	+ 0.24	+ 0.02	63.75	63.73	65.89	— 2.16	0.51	0.794	0.553
63.31	— 0.04	63.27	—	—	64.69	64.69	66.17	— 1.48	0.64	0.691	0.426
59.30	— 0.04	59.26	—	—	65.54	65.54	66.72	— 1.18	0.70	0.612	0.348
48.0	—	48.0	—	—	63.27	63.27	66.70	— 3.43	0.26	0.466	0.599
43.5	—	43.5	—	—	64.54	64.54	65.45	— 0.91	0.75	0.431	0.201
39.7	—	39.7	—	—	64.42	64.42	65.57	— 1.15	0.70	0.406	0.204
35.7	—	35.7	—	—	65.56	65.56	67.05	— 1.49	0.64	0.385	0.216

Per Agosto 22, $z_C = 25°.5$ risulterebbe un valore di p maggior d'1 cioè una luminosità maggiore per Catania, che per l'Etna, ciò che naturalmente non è ammissibile per condizioni normali dell'atmosfera. Non venne pertanto ricavato alcun valore di p da questa coppia di osservazioni. E invero dai valori O — C relativi alle osservazioni fatte all'Etna (tabella a pag. 276) appare che l'ultima osservazione del giorno Agosto 22 dovrebbe venir scartata, ammontando per questa l'O — C a quasi mezza grandezza. La causa può ricercarsi o nell'intenso sviluppo di fumo dal cratere centrale, di che è fatta menzione a pag. 234 della Memoria di M. e K., ovvero nella stanchezza dell'osservatore, essendo questa appunto l'ultima osservazione della serata.

5. Ponendo ora a fronte in un unico quadro i valori del coefficiente di trasmissione e le corrispondenti distanze zenitali z_C, poi formando le medie dei dati relativi alle cinque sere, si ottiene il prospetto seguente:

Da $z = 84$ a $z = 60°$.

	z_c	p	z_c	p	z_c	p	z_c	p	z_c	p	z_c	p
1894												
Agosto 20	82°.57	0.505	78°.14	0.345	73°.84	0.366	70°.68	0.485	65°.35	0.326	—	—
» 21	81.80	0.624	77.94	0.391	73.05	0.552	—	—	—	—	64°.16	0.481
» 22	81.99	0.678	78.14	0.465	—	—	72.26	0.532	69.10	0.453	64.36	0.673
» 25	84.09 80.43	0.549 0.492	77.94	0.548	74.46	0.436	71.59	0.366	67.52	0.439	64.29	0.300
» 26	83.20 80.03	0.527 0.497	77.37	0.460	73.57	0.450	70.66	0.403	66.88	0.553	63.31	0.426
Medie	82.02	0.553	77.91	0.442	73.73	0.451	71.30	0.446	67.21	0.443	64.03	0.470

Da $z = 60°$ a $z = 30°$.

	z_c	p	z_c	p	z_c	p	z_c	p	z_c	p	z_c	p
Agosto 20	61.38	0.417	—	—	43.0	0.740	39.4	0.292	—	—	31.1	0.282
» 21	60.59	0.195	55.5	0.251	43.0	0.143	38.7	0.381	35.0	0.203	28.1	0.354
											25.5	0.231
» 22	60.39	0.469	55.3	0.354	43.0	0.325	38.3	0.300	35.0	0.748	31.2 28.4	0.560 0.234
» 23	60.14	0.217	48.0	0.251	44.4	0.150	40.8	0.180	36.4	0.089	—	—
» 24	59.30	0.348	48.0	0.599	43.5	0.201	39.7	0.204	35.7	0.216	—	—
Medie	60.36	0.329	51.7	0.364	43.4	0.312	39.4	0.271	35.5	0.314	28.9	0.332

6. Oltre alle osservazioni delle stelle di estinzione *γ Pegasi* e *γ Andromedae* ho anche elaborato in modo analogo per le singole sere in questione le osservazioni di stelle zenitali eseguite da M e K per la determinazione diretta dell'assorbimento in direzione verticale. Risultarono i valori seguenti di p:

$z = 0°$.

	p	Num. osservazioni
Agosto 20	0.210	4 gruppi
» 21	0.479	2 »
» 22	0.317	7 »
» 25	0.182	6 »
» 26	0.110	6 »
Media [1]	0.231	25 »

[1] Nel formar la media venne assunto come peso dei singoli valori di p il numero dei gruppi (di 5 stelle), su cui ciascuno riposa.

7. Rappresentando graficamente i risultati ottenuti, e precisamente prendendo come ascisse i valori di z e come ordinate i valori corrispondenti di p, si ottiene la curva seguente.

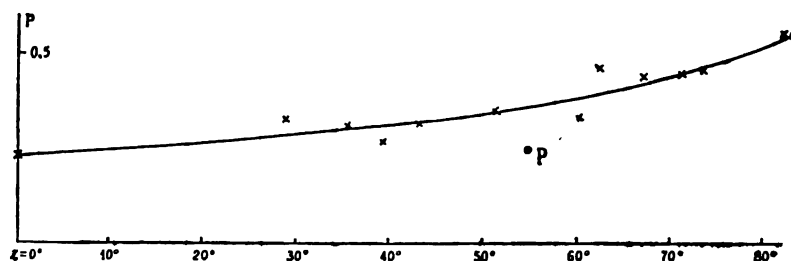



Fig. 4.

È senz'altro manifesto l'andamento saliente della curva col crescere della distanza zenitale. Per $z = 80°$ il coefficiente di trasmissione è quasi esattamente il doppio di quello, che si ottiene per la direzione verticale.

Perchè si possa giudicare poi del grado di sicurezza di tale risultato, aggiungerò che il valore di p corrispondente a $z = 0°$ riposa su 100 coppie di stelle (ognuna puntata quattro volte), mentre i due gruppi di osservazioni da 30° a 60° (incl.) e da 60° a 84° comprendono ognuno 28 coppie (puntate parimente quattro volte ciascuna).

8. Ho elaborato infine, sempre collo stesso procedimento, anche le osservazioni della polare ($z_c = 52°.5$) ottenendo i risultati seguenti:

Polare: $z_c = 52°.5$.

		p	Num. osservazioni
Agosto	20	0.180	9 coppie
»	21	0.254	13 »
»	22	0.364	13 »
»	25	0.259	12 »
»	26	0.212	12 »
Media		0.254	59 »

Anche a questo valore è da attribuire un alto grado di sicurezza. Tuttavia esso non si accorda bene colla curva tracciata sopra. Poichè non mancano ragioni per spiegare questa deviazione, e verranno esposte nella discussione seguente, così non venne tenuto conto di questo valore per il tracciamento della curva.

IV.

Discussione dei risultati d'osservazione.

1. Il risultato principale, che si rileva dai calcoli precedenti, è che la luce incidente con distanza zenitale piuttosto forte viene assorbita assai diversamente da quella, che penetra nell'atmosfera in direzione verticale. Apparentemente l'atmosfera trasmetterebbe in direzione verticale appena la metà di quanto trasmette — a parità di masse d'aria attraversate — in direzioni inclinate di 10° sull'orizzonte. Il risultato è perfettamente conforme alle vedute di Forbes e di Langley, e si spiega, considerando, che un raggio inclinato di 10° sull'orizzonte arriva all'altezza dell'Etna già spogliato delle radiazioni, che rimangono più facilmente assorbite nell'atmosfera, mentre queste sono ancora contenute nei raggi provenienti in direzione verticale; è ben naturale quindi, che pei raggi del primo caso risulti un coefficiente di trasmissione maggiore.

Prima di proceder oltre, bisogna esaminare però, se il risultato ottenuto coi nostri calcoli non potrebbe per avventura spiegarsi con altre circostanze, per esempio col maggior potere assorbente degli strati inferiori dell'atmosfera, perchè si è visto altrove [1], che a tale circostanza appunto sono da attribuire i risultati contraddittori delle precedenti ricerche. Qui si dimostra ancor meglio la efficacia del nostro procedimento, perchè mentre le ricerche di Langley e di Müller-Kempf, pur conducendo a dimostrare un maggiore assorbimento per gli strati inferiori dell'atmosfera, lasciavano sempre in dubbio, se questo dipendesse dall'estinzione selettiva (Langley) o non piuttosto da un maggior potere assorbente degli strati inferiori (Müller-Kempf), qui risulterà col sussidio della nostra tavola, che delle due ipotesi la prima sola può spiegare il fenomeno, di cui abbiamo dimostrato l'esistenza, mentre la seconda, se mai, tenderebbe a produrre manifestazioni opposte.

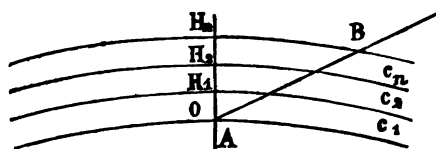



Fig. 5.

2. Si consideri (v. fig. 5) l'atmosfera divisa in un gran numero di strati orizzontali (sferici) sufficientemente sottili, per modo che in ciascuno strato possa riguardarsi come costante il potere assorbente dell'aria. Siano 0, H_1, H_2, ... H_n le altezze delle superficie di livello limitanti i successivi strati, e indichiamo con $i_0(z)$, $i_1(z)$, ... $i_n(z)$ le rispettive intensità luminose, che possiede alle dette altezze un raggio incidente

[1] *Introduzione*, pag. 245.

colla distanza zenitale z (al mare). *Ammettiamo variabile secondo una legge qualunque la successione dei coefficienti di assorbimento dei singoli strati, ma supponiamo, che valga entro ciascuno strato la legge di Bouguer-Pouillet.* Indichiamo in generale con $F(z;H_r,H_{r+1})$ la massa d'aria attraversata fra le altezze H_r, H_{r+1} dal raggio incidente al mare colla distanza zenitale z, massa espressa dall'integrale definito

$$F(z;H_r,H_{r+1}) = Cz\int_{H_r}^{H_{r+1}} \frac{x\,dh}{\sqrt{Z^2-\varepsilon_z(1-x)}+s}$$

e che sappiamo calcolare mediante la nostra tavola I. Allora entro ciascuno strato $H_r - H_{r+1}$ varrà con *uno speciale valore del coefficiente di assorbimento* c_r la formola (di Pouillet)

$$i_r = i_{r+1}\, e^{-c_r F(z;H_r,H_{r+1})}$$

Scrivendo questa equazione per $r = 0, 1, \ldots n$, ed eliminando le $i_1, i_2, \ldots i_{n-1}$, otteniamo subito

$$i_0(z) = i_n(z)\, e^{-[c_1 F(z,H_1)+c_2 F(z;H_1,H_2)+\cdots+c_n F(z;H_{n-1},H_n)]}$$

ovvero

$$i_0(z) = i_n(z)\, p_1^{F(z,H_1)} \,.\, p_2^{F(z;H_1,H_2)} \ldots p_n^{F(z;H_{n-1},H_n)},$$

avendo indicato con $p_1 = e^{-c_1}, p_2 = e^{-c_2}, \ldots p_n = e^{-c_n}$ i coefficienti di trasmissione (per un'atmosfera) corrispondenti ai singoli strati [1].

Se ora dalle due intensità luminose $i_0(z), i_n(z)$ corrispondenti agli estremi della traiettoria considerata ricaviamo un solo cofficiente di trasmissione medio P, mediante la formola

$$i_0(z) = i_n(z)\, P^{F(z,H_n)}$$

(dove $F(z,H_n)$ denota la massa d'aria attraversata nel percorso complessivo AB) si avrà fra P e le $p_1, p_2, \ldots p_n$ la equazione

$$P^{F(z,H_n)} = p_1^{F(z,H_1)}\, p_2^{F(z;H_1,H_2)} \ldots p_n^{F(z;H_{n-1},H_n)}. \tag{22}$$

Dalla (22) appare che il coefficiente di trasmissione P determinato dalle singole coppie di osservazioni estrazenitali $i_0(z)$ e $i_n(z)$, deve risultare effettivamente una certa funzione $P(z)$ della z, quando il potere assorbente specifico dell'aria varî coll'altezza. Dunque anche la circostanza della variabilità di questo potere assorbente potrà dar luogo ad un andamento simile a quello da noi ottenuto come risultato d'osservazione nel capitolo precedente, e la questione si riduce a vedere, se questo andamento sia in egual senso, e possa essere egualmente rilevante.

[1] L'esponente relativo a p_1 dovrebbe scriversi in analogia con gli altri $F(z;0,H_1)$, ma è manifestamente $F(z;0,H_1) = F(z,H_1)$.

Ma è facile riconoscere, che questo non può mai avvenire, con valori ammissibili per le $c_1, c_2, \ldots c_n$. L'equazione (22) tradotta nelle $c_1, c_2, \ldots c_n$ fornisce infatti, se $-C(z)$ è il logaritmo di $P(z)$ (base e),

$$C(z) = \frac{c_1 F(z, H_1) + c_2 F(z; H_1, H_2) + \cdots + c_n F(z; H_{n-1}, H_n)}{F(z, H_n)} . \tag{23}$$

Ora è senz'altro manifesto da una semplice ispezione della nostra tavola I, che le $F(z, H_1), F(z; H_1, H_2), \ldots F(z; H_{n-1}, H_n)$ *considerate come funzioni di* z hanno tutte un andamento *quasi* identico; un andamento analogo avrà dunque anche una loro combinazione lineare qualunque, come è quella, che figura nel numeratore. D'altra parte anche $F(z, H_n)$ può riguardarsi come una tale combinazione lineare, poichè è manifestamente

$$F(z, H_n) = F(z, H_1) + F(z; H_1, H_2) + \cdots + F(z; H_{n-1}, H_n).$$

Si conclude, che $C(z)$ è bensì funzione di z, ma esprimendosi come quoziente di due tali funzioni, che hanno adamento quasi identico rispetto alla variabile z, la $C(z)$ e quindi la $P(z)$ non mostrerà che un leggerissimo andamento rispetto a questa variabile, non certo un andamento come quello da noi ottenuto alla fine del capitolo precedente, secondo il quale il valore di P per $z = 80^\circ$ è circa il doppio del valore analogo per $z = 0^\circ$.

Poichè la dimostrazione da noi fatta riposa in parte su considerazioni funzionali intuitive, non sarà inutile dimostrare più rigorosamente, che è impossibile con una serie di valori ammissibili per le c_i, ottenere che risulti, conforme ai risultati del capitolo precedente

$$P(0^\circ) = 0.231 \qquad P(80^\circ) = 0.500$$

cioè prossimamente

$$P(80^\circ) = 2\,P(0^\circ).$$

Questa equazione infatti, ponendo per $P(80^\circ), P(0^\circ)$ le loro espressioni

$$P(0^\circ) = e^{-C(0^\circ)} \qquad P(80^\circ) = e^{-C(80^\circ)},$$

fornisce

$$e^{-C(80^\circ)} = 2e^{-C(0^\circ)} = e^{0.69315 - C(0^\circ)}$$

essendo 0.69315 il logaritmo di 2 (base e). Ne consegue fra le $C(80^\circ)$ e $C(0^\circ)$ l'equazione

$$C(0^\circ) - C(80^\circ) = 0.69315 .$$

Sostituiamo ora in questa equazione, in luogo delle $C(0^\circ), C(80^\circ)$ le loro espressioni secondo la (23). Si ottiene:

$$\begin{gathered} c_1 \left\{ \frac{F(0^\circ, H_1)}{F(0^\circ, H_n)} - \frac{F(80^\circ, H_1)}{F(80^\circ, H_n)} \right\} + c_2 \left\{ \frac{F(0^\circ; H_1, H_2)}{F(0^\circ, H_n)} - \frac{F(80^\circ; H_1, H_2)}{F(80^\circ, H_n)} \right\} + \cdots \\ \cdots + c_n \left\{ \frac{F(0^\circ; H_{n-1}, H_n)}{F(0^\circ, H_n)} - \frac{F(80^\circ; H_{n-1}, H_n)}{F(80^\circ, H_n)} \right\} = 0.69315 . \end{gathered} \tag{24}$$

Per fissar le idee poniamo $n = 6$ e

$$H_1 = 500^m, H_2 = 1000^m, H_3 = 1500^m, \ldots H_6 = 3000^m.$$

La tavola I ci fornisce subito i valori delle espressioni, che figurano nella equazione precedente; soltanto, siccome le differenze, che si devono calcolare, sono assai piccole, le tre cifre decimali date dalla detta tavola sarebbero insufficienti per ottenere le differenze stesse con una certa precisione. Come venne però avvertito nel Cap. 2° (pag. 31), le quadrature numeriche vennero eseguite con 5 cifre decimali. Prendendo dunque i valori originali, anzichè quelli arrotondati della tavola, si trova

$F(0°, H_1) = 0.060871$	$F(80°, H_1) = 0.35020$
$F(0°; H_1, H_2) = 0.057800$	$F(80°; H_1, H_2) = 0.33184$
$F(0°; H_2, H_3) = 0.054850$	$F(80°; H_2, H_3) = 0.31427$
$F(0°; H_3, H_4) = 0.052020$	$F(80°; H_3, H_4) = 0,29744$
$F(0°; H_4, H_5) = 0.049304$	$F(80°; H_4, H_5) = 0.28133$
$F(0°, H_5, H_6) = 0.046701$	$F(80°; H_5, H_6) = 0.26592$
$F(0°, H_6) = 0.321546$	$F(80°, H_6) = 1.84100$

Introducendo questi valori numerici nella (24), questa prende la forma seguente

$$-0.00092\, c_1 - 0.00049\, c_2 - 0.00013\, c_3 + 0.00021\, c_4 + 0.00052\, c_5 + 0.00080\, c_6 = 0.69315.$$

Si noterà subito, che la somma algebrica dei coefficienti delle c è pressochè nulla (— 0.00001). Questa circostanza unita all'altra, che i coefficienti stessi sono assai piccoli rispetto al termine noto del secondo membro, mostra che occorrerebbero valori grandissimi di qualcuna delle c per poter soddisfare a questa equazione. In ogni caso una delle c a coefficiente positivo, vale a dire o la c_4, o la c_5, o la c_6 dovrebbe essere notevolmente maggiore delle c_1, c_2, c_3, e ricordando che le c esprimono coefficienti di assorbimento, si conclude che, per soddisfare ai risultati del Cap. precedente *con sole ipotesi circa la variazione del potere assorbente coll'altezza*, bisognerebbe ammettere *per uno strato al disopra di 1500ᵐ* un potere assorbente molto maggiore che per gli strati inferiori, anzi addirittura un potere assorbente *infinitamente maggiore* che per gli altri strati. Se infatti per semplificare la considerazione poniamo $c_1 = c_2 = c_3$, $c_4 = c_5 = c_6$, avremo per le c_1, c_4 la equazione

$$0.00153\, c_4 = 0.00154\, c_1 + 0.69315,$$

cioè molto prossimamente

$$c_4 = c_1 + \frac{0.69315}{0.00153} = c_1 + 453,$$

e ricordando che e^{-c_4}, e^{-c_1} rappresentano i coefficienti di trasmissione p_4, p_1 risulterebbe per questi la equazione

$$p_4 = \frac{p_1}{e^{453}},$$

che praticamente significa $p_4 = 0$, cioè trasparenza nulla per uno strato al disopra

di 1500^m. Ora questo è talmente contrario ai risultati della esperienza quotidiana, che possiamo legittimamente conchiuderne:

I risultati ottenuti mediante la nostra riduzione dalle osservazioni di Müller-Kempf non possono in alcun modo spiegarsi colla semplice ipotesi della variabilità del potere assorbente dell'aria coll'altezza.

3. Nel discutere i risultati delle loro osservazioni, Müller e Kempf ricorsero, per eliminare le contraddizioni, di cui abbiamo fatto cenno a suo luogo [1], alla ipotesi di uno strato inferiore di forma particolare, dotato di un forte potere assorbente. Precisamente essi ammisero l'esistenza di una specie di nuvola tondeggiante, che si estendesse limitatamente (circa 2500^m) dalla parte del mare; e riuscirono effettivamente a ristabilire un accordo tollerabile fra i varî coefficienti di trasmissione da loro ottenuti mediante le ipotesi seguenti:

altezza H dello strato sferico	600^m
raggio r » » »	5500^m
coeffic. di trasmiss. dello strato sferico	0.010 [2]
coeffic. di trasmiss. degli strati superiori . . .	0.835.

È senza dubbio interessante vedere, se con una siffatta ipotesi potesse per avventura spiegarsi il fenomeno, di cui abbiamo dimostrato l'esistenza nel precedente capitolo.

Indichiamo con r il raggio della superficie limite dello strato sferico, con H l'altezza del medesimo strato al disopra del luogo di osservazione O, con z la distanza zenitale del raggio, che si considera, con z_1 l'angolo $\widehat{OCD}$. Come mostra la fig. 6, si suppone per semplicità, che il punto culminante della callotta sferica si trovi precisamente sulla verticale del luogo d'osservazione.

Dal triangolo COD si ha subito

$$\sin(z - z_1) = \left(1 - \frac{H}{r}\right) \sin z$$

$$OD = r \frac{\sin z_1}{\sin z} .$$

Se si conduce poi da D la perpendicolare DF a CO, e si indica con h_z l'altezza CF

(1) *Introduzione*, pag. 245.

(2) M. e K. non comunicano direttamente questo valore, ma soltanto il coefficiente di trasmissione p_1 per un metro d'aria. Noi diamo invece per omogeneità il valore del coefficiente di trasmissione corrispondente per un'atmosfera. È facile il passaggio dal primo al secondo, che indicheremo con P; basta determinare P dalla equazione

$$P = p_1^{\lambda_0} ,$$

dove λ_0 indica l'altezza in metri dell'atmosfera ridotta omogenea, cioè secondo i nostri calcoli (pag. 258) 8010^m.9. In tal modo venne ottenuto il valore 0.010 da noi dato sopra, come corrisponda a $p_1 = 9.9997510$, medio dei 5 valori ottenuti da Müller e Kempf per agosto 20, 21. 22, 25, 26 (v. Tabella a pag. 58 della Memoria citata di M. e K.).

del punto D, nel quale il raggio luminoso penetra nello strato più assorbente, si avrà subito

$$h_z = \mathrm{OD}\cos z = r\sin z_1 \operatorname{cotg} z\,.$$

Allora la massa d'aria attraversata dal raggio in questione nello strato più assorbente è espressa secondo le nostre notazioni da $F(z\,;h_z)$; la massa d'aria attraversata fra la superficie limite di detto strato e la superficie di livello EE corrispondente all'altezza H_E dell'Etna sarà espressa invece da $F(z\,;h_z\,,H_E)$; le masse analoghe per raggi verticali saranno infine $F(0°\,;H)\,,F(0°\,;H\,,H_E)$.

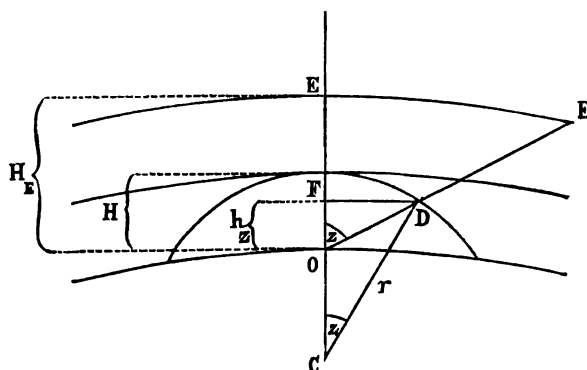



Fig. 6.

Sia c_1 il coefficiente di assorbimento dello strato sferico inferiore, c_2 quello degli strati superiori fino all'altezza dell'Etna. Per semplificare i calcoli, supporremo che $-c_1\,,-c_2$ siano i logaritmi ordinarî a base 10 di $p_1\,,p_2$ (coefficienti di trasmissione dei due strati) anzichè i logaritmi naturali come abbiamo supposto nella trattazione precedente. Siano infine $C(0°)$ e $C(z)$ i valori del coefficiente *medio* di assorbimento ricavati dalle osservazioni simultanee nelle due stazioni, per le distanze zenitali 0° e z. Colle stesse considerazioni fatte sopra si avranno due equazioni analoghe alla (23), della forma

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{F(0°\,,H)}{F(0°\,,H_E)}\,c_1 + \frac{F(0°\,;H\,,H_E)}{F(0°\,,H_E)}\,c_2 = C(0°)\\ &\frac{F(z\,,h_z)}{F(z\,,H_E)}\,c_1 + \frac{F(z\,;h_z\,,H_E)}{F(z\,,H_E)}\,c_2 = C(z)\,. \end{aligned}\right.$$

I valori numerici dei coefficienti del secondo membro ci sono dati dalle riduzioni del capitolo precedente, e hanno il valore di risultati di osservazione. Si è trovato per $z = 0°$ e $z = 80°$ rispettivamente $P = 0.231\,, P = 0.500$, epperò

$$\begin{aligned} C(0°) &= -\log_{10} P(0°) = 0.63639\\ C(80°) &= -\log_{10} P(80°) = 0.30103\,. \end{aligned}$$

Calcolando per una serie di valori di r e H i valori corrispondenti di h_z (per $z = 80°$),

indi le $F(z, h_z)$, $F(z; h_z, H_E)$, $F(0^\circ, H)$ ecc.; risolvendo poi il sistema (25) rispetto alle c_1, c_2, e passando infine dai logaritmi ai numeri, cioè ai coefficienti di trasmissione p_1, p_2, si ottengono i risultati seguenti:

$H_E = 3000^m$ $F(0^\circ, H_E) = 0.32155$ $F(z, H_E) = 1.84100$ $(z = 80^\circ)$

r	5500^m	5500^m	5500^m	5500^m	5500^m	10000^m	2000^m	1000^m
H	600	700	800	900	1000	1000	1000	1000
h_z	311	343	374	403	430	538	272	174
$F(0^\circ, H)$	0.07268	0.08435	0.09591	0.10735	0.11868	0.11868	0.11868	0.11868
$F(0^\circ; H, H_E)$	0.24887	0.23719	0.22564	0.21420	0.20287	0.20287	0.20287	0.20287
$F(z, h_z)$	0.12244	0.24260	0.26425	0.28367	0.30226	0.37251	0.19293	0.12244
$F(z; h_z, H_E)$	1.69856	1.59840	1.57675	1.55733	1.53874	1.46849	1.64807	1.69856
p_1	. .	. .	. .	0.01	0.02	. .	0.04	0.05
p_2	>1	>1	>1	0.96	0.92	>1	0.68	0.61

Per spiegare colla ipotesi di M. e K. (senza ricorrere alla estinzione selettiva) i risultati delle osservazioni, bisogna portare, come si vede, l'altezza dello strato di maggiore assorbimento a 900^m almeno, poichè con $r = 5500^m$ e $H = 600, 700$ e 800^m risulterebbe per gli strati superiori un coefficiente di trasmissione maggiore dell'unità, ciò che non ha senso. D'altra parte anche valori come 0.96, 0.92 sono assai poco probabili, poichè è ben certo, che il valore 0.835 ammesso da Müller e Kempf per l'assorbimento di tutta l'atmosfera (in condizioni normali) rappresenta già esso un limite superiore. Per giungere a valori ammissibili bisogna dunque impiccolire notevolmente il raggio della callotta sferica, pur mantenendone l'altezza attorno a 1000^m. Ora una tale costituzione non è affatto naturale, mentre naturalissima è la spiegazione del fenomeno da noi posto in luce ($P(80^\circ) = 2\,P(0^\circ)$), se se ne cerca la causa nella estinzione selettiva.

4. Le osservazioni della polare ci hanno condotto al valore 0.254 per il coefficiente di trasmissione dello strato Catania-Etna nella direzione della polare. Ora la curva di ragguaglio dei coefficienti di trasmissione ottenuti dalle altre coppie di stelle fornisce per $z = 52^\circ.5$ (distanza zenitale apparente della polare per Catania) il coefficiente di trasmissione 0.37. La differenza è ben rilevante. D'altra parte, che la estinzione subisca variazioni in azimut oltrechè in distanza zenitale è in molti casi ben probabile; nel caso attuale poi il fenomeno trova la sua naturale spiegazione nella circostanza, che i raggi della polare traversano lo strato Catania-Etna lungo un percorso, la cui proiezione cade tutta entro terra, mentre le stelle di estinzione vennero tutte osservate dal sorgere fino allo Zenit, epperò dalla parte del mare, dove è naturale attendersi una minore estinzione. Tenendo conto ora, che il cratere centrale dell'Etna si trova quasi esattamente a Nord dell'Osservatorio Etneo, mentre dista di circa 7 km. dal meridiano di Catania, si può trarre dal citato fenomeno argomento a conchiudere, che l'attività del cratere non alterò menomamente durante

le osservazioni di Müller e Kempf la trasparenza dell'aria, poichè in caso contrario avrebbero dovuto risentirne essenzialmente le osservazioni della polare istituite nella stazione superiore, e dal confronto di queste osservazioni con quelle di Catania sarebbe risultato un valore più forte, che dalle altre stelle con uguale D. Z., per il coefficiente di trasmissione, mentre, come si è visto, accade precisamente il contrario.

5. L'aspetto della curva rappresentativa dei coefficienti di trasmissione cambia notevolmente, se si prendono come ascisse, anzichè le distanze zenitali, le masse d'aria traversate dai raggi alle varie distanze zenitali per giungere fino all'altezza dell' Etna. La diversità di tali masse porta, secondo la teoria dell'assorbimento selettivo, una diversa composizione e quindi una diversa attitudine a rimanere assorbito per un medesimo raggio luminoso considerato sotto diverse distanze zenitali. Molto istruttivo può riuscire dunque l'ordinare i valori del coefficiente di trasmissione rispetto alle masse d'aria attraversate; soltanto questo raffronto anzi potrà dare un' idea circa la quantità di luce, che può rimanere assorbita negli strati superiori dell'atmosfera.

Secondo le nostre notazioni la massa d'aria attraversata da un raggio incidente colla distanza zenitale z (al mare) fra la superficie di livello di altezza H e il limite dell'atmosfera è espressa da

$$M = F(z) - F(z, H)$$

avendosi $F(z)$ dalla tavola V ed $F(z, H)$ (fino ad $H = 50000^m$) dalla tavola I.

Calcolando nel modo indicato le dette masse per le distanze zenitali 0°, 20°, 40°, 60°, 70°, 75°, 80° e per l' altezza H_E dell' Etna (tavola a pag. 335), ponendo infine a fronte delle singole masse i corrispondenti valori del coefficiente di trasmissione ricavati dalla curva a pag. 282 si ottengono i valori e la curva seguenti:

z	0°	20°	40°	60°	70°	75°	80°
$F(z)$	1.000	1.061	1.301	1.994	2.904	3.816	5.600
$F(z)$	0.313	0.332	0.408	0.625	0.912	1.204	1.889
M	0.687	0.729	0.893	1.369	1.992	2.612	3.711
p	0.23	0.28	0.31	0.39	0.43	0.48	0.50

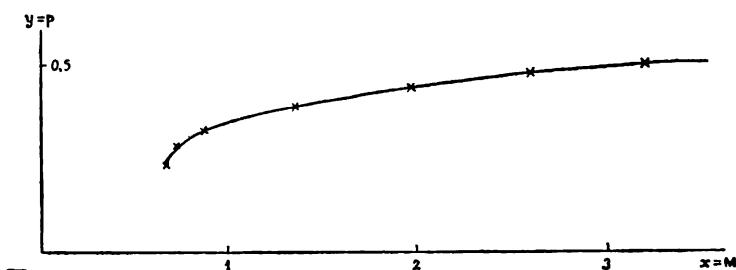



Fig. 7.

Come chiaro appare dalla curva, il coefficiente di trasmissione aumenta dapprimo assai rapidamente coll'aumentare della massa d'aria precedentemente attraversata; per masse piuttosto rilevanti però la proporzione dell'aumento si attenua sempre più, mostrando, che p tende ad un valore limite finito col crescere anche indefinito di M.

Infatti il valore di p non può certo crescere oltre quel valore finito di P, che rappresenta il coefficiente di trasmissione delle radiazioni semplici più resistenti, per dir così, all'assorbimento atmosferico. Si può stabilire dunque a priori, che la curva, col crescere indefinito della massa d'aria traversata, deve tendere assintoticamente ad una retta parallela all'asse delle x.

Non può asserirsi lo stesso per l'altra curva I, perchè per questa l'ascissa z non può procedere in ogni caso che poco oltre 90°; questa curva volge poi manifestamente la sua convessità verso l'asse x, mentre la curva attuale II si mostra concava rispetto a questo asse.

Lo studio della curva II dalla parte del ramo indefinito non presenta interesse, se non in quanto si tratti di determinare il valore limite del coefficiente di trasmissione. Assai più interessante è lo studio della curva dall'altro lato. Qui vediamo, che un aumento anche piccolo della massa d'aria fa aumentare notevolmente il coefficiente di trasmissione, altera quindi assai la composizione dei raggi. Questo indica chiaramente, che una notevole quantità della energia luminosa primitiva deve rimanere assorbita negli strati più alti dell'atmosfera, risultato del tutto conforme alle vedute di Langley.

Il maggior potere assorbente degli strati inferiori dell'atmosfera non può, per quanto si è visto ai nn. 2 e 3, produrre le manifestazioni da noi rilevate, e che noi riteniamo ormai come dovute all'azione dell'assorbimento selettivo. Le considerazioni funzionali svolte a pag. 285 lasciano anzi apparire, che la prima circostanza mentre si palesa nel modo più sensibile, fino a distruggere le manifestazioni dell'assorbimento selettivo, nel confronto delle luminosità apparenti *di sole stelle zenitali* da diverse stazioni (pag. 245), non può avere influenza sensibile, *nè conforme, nè contraria* a quella dell'assorbimento selettivo, quando si confrontano i coefficienti di trasmissione ottenuti per un medesimo strato da osservazioni simultanee istituite in due stazioni per le medesime stelle *a diverse distanze zenitali.* Così la nostra riduzione delle osservazioni di Müller-Kempf, mentre pone in luce per la prima volta in modo indubbio tutta la portata del fenomeno dell'assorbimento selettivo dell'atmosfera, mostra in pari tempo, che il procedimento da noi seguito di confrontare insieme colle zenitali le singole coppie di osservazioni estrazenitali è anche il più adatto allo studio del fenomeno stesso.

Non è però dubbio, che la questione dell'assorbimento atmosferico, se entra oggi — come osiamo sperare — in una nuova fase, è ancora ben lontana dalla soluzione definitiva. Noi abbiamo potuto porre in luce un fatto fin qui solo sospettato, da molti e dai più illustri pertinacemente negato, abbiamo potuto dare procedimenti e mezzi ausiliarî nuovi per lo studio di queste manifestazioni, ma quanto a risalire dai fenomeni osservati all'importo complessivo dell'assorbimento atmosferico, il passo è troppo arduo per poterlo per adesso anche solo tentare. Il materiale da noi esaminato comprende appena cinque sere di osservazioni, e occorrerebbero invece degli anni per poter formulare risultati, che aspirino ad una certa generalità. Si consideri ancora, che i dati da noi ottenuti riguardano una porzione relativamente piccola (circa $\frac{1}{3}$) della intera massa atmosferica. Per risalire da questa all'assorbimento di tutta l'atmosfera bisogna necessariamente *estrapolare*, e perchè l'estrapo-

lazione non sia affatto illusoria, bisogna almeno possedere dati relativi a varî strati atmosferici, cioè ripetere simili determinazioni in una stessa località a varie altezze sul livello del mare.

Per ora si può solo asserire, che, per effetto del fenomeno da noi posto in luce, perdono molto del loro valore tutte o quasi tutte le determinazioni fin qui fatte dell'ammontare dell'assorbimento atmosferico, e che questo è da ritenere sensibilmente superiore al 20 %, senza che si possa precisare per adesso, di quanto. La risposta su questo punto non potrà venir data che da estese, continuate osservazioni simultanee, svolte colla precisione, che seppero raggiungere Müller e Kempf, ridotte colle formole rigorose, che vennero qui ottenute. A noi basti per ora l'aver dato queste formole e i mezzi necessarî per applicarle.

APPENDICE.

Mentre il presente lavoro era in corso di stampa, potei fare varie applicazioni della teoria e delle tavole numeriche qui comunicate, sulle quali applicazioni credo opportuno far seguire qui qualche cenno.

Anzitutto ho calcolato delle tavole ausiliarie [1] per future esperienze fra gli Osservatorî di Catania e dell'Etna sul genere di quelle di Müller e Kempf qui discusse. Queste tavole differiscono dalle analoghe I_E, II_E qui adoperate, in ciò che venne tenuto più stretto conto delle altitudini precise dei due Osservatorî, e vennero poi calcolati i valori effettivi degli spessori atmosferici corrispondenti a varie temperature (0°, 10°, 20°, 30°) in luogo di comunicare, come qui vien fatto, i soli coefficienti a e b della formola di rettificazione per la temperatura.

In una nota successiva [2] ho mostrato, come le tavole qui comunicate siano immediatamente applicabili alla riduzione rigorosa delle determinazioni dell'assorbimento atmosferico fondate sulla osservazione fotometrica di nevai alpini (secondo il metodo ideato dal chiar.mo prof. Oddone) e ne ho fatto l'applicazione effettiva, comunicando le tavole relative ai tre nevai del M. Grigna settentr., del M. Penice e del M. Veissmies (luogo d'osservazione Pavia). È fondata la speranza, che interessanti risultati possano ricavarsi dalla ripresa di tali esperienze.

In un ultimo lavoro, non ancora pubblicato, applico il metodo qui proposto e le annesse tavole numeriche alle recenti osservazioni attinometriche del prof. K. Ångström all'isola di Teneriffa, e ne traggo i seguenti interessanti risultati:

[1] A. Bemporad, *Tavole ausiliarie per esperienze sull'assorbimento atmosferico fra l'Osservatorio astrofisico di Catania e l'Osservatorio Etneo.* Memorie della Soc. degli Spettrosc. ital. XXIII, 1904, p. 213.

[2] A. Bemporad, *Sulle determinazioni dell'assorbimento atmosferico mediante osservazioni fotometriche di nevai alpini dall'Osservatorio geofisico di Pavia,* Memorie del R. Istit. lomb. di sc. e lett. Cl. di sc. matem. e natur. Vol. XX, XI della serie III, 1905.

1°. Si conferma pienamente anche per le radiazioni calorifiche, ossia meno rifrangibili, dello spettro l'azione notevolissima dell'assorbimento selettivo con parvenze affatto analoghe a quelle qui ottenute dalla osservazione delle intensità luminose degli astri.

2°. Si acquista per la prima volta una chiara idea del modo e della rapidità del decrescimento del potere assorbente dell'aria coll'altezza, e precisamente si stabilisce la seguente singolare relazione, che, *considerando a varie altezze sul livello del mare (da 0^m a 3500^m) raggi, che abbiano precedentemente attraversato eguali masse d'aria — i quali raggi è lecito considerare come quasi egualmente composti — il coefficiente di assorbimento per questi raggi è molto prossimamente proporzionale alla quarta potenza della densità dell'aria alle varie altezze.*

In altri termini vale molto prossimamente entro i detti limiti e per i detti raggi la formola

$$Q = Q' e^{-cM},$$

dove Q e Q' indicano rispettivamente la intensità residua e la intensità iniziale dei raggi, che attraversano la massa d'aria M, e il coefficiente di assorbimento *c* ha l'espressione

$$c = kx^4,$$

x indicando la densità dell'aria e *k* una quantità, che dipende solo dallo spessore d'aria precedentemente attraversato dai raggi, che si considerano. La relazione proposta presenta singolari analogie, forse non casuali, colla legge termodinamica detta di Stephan [1] e colla legge di diffusione di Lord Rayleigh [2], ma non occorre aggiungere, che la relazione stessa venne da noi stabilita del tutto indipendentemente dalle citate leggi.

[1] V. *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, Paris, 1900, p. 61.
[2] V. *Philos. Magaz.*, vol. XLI, p. 107.

TAVOLA I

Valori delle masse d'aria F(*z*, H) attraversate dai raggi luminosi fra il mare e varie **altezze (H)** fino a 5000^m, per distanze zenitali (*z*) da 0° a 89°, essendo valutata come 1 la **massa di una**

H / *z*	250^m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
0°	0,031	0,061	0,090	0,119	0,146	0,173	0,200	0,226	0,250	0,275
10	0,031	0,062	0,092	0,121	0,149	0,176	0,203	0,229	0,254	0,279
11	0,032	0,062	0,092	0,121	0,149	0,177	0,204	0,230	0,255	0,280
12	0,032	0,062	0,092	0,121	0,150	0,177	0,204	0,230	0,256	0,281
13	0,032	0,063	0,092	0,122	0,150	0,178	0,205	0,231	0,257	0,282
14	0,032	0,063	0,093	0.122	0,151	0,179	0,206	0,232	0,258	0,283
15	0,032	0,063	0,093	0,123	0,152	0,180	0,207	0,233	0,259	0,284
16	0,032	0,063	0,094	0,123	0,152	0,180	0,208	0,234	0,261	0,286
17	0,032	0,064	0,094	0,124	0,153	0,181	0,209	0,236	0,262	0,287
18	0,033	0,064	0,095	0,125	0,154	0,182	0,210	0,237	0,263	0,289
19	0,033	0,064	0,095	0,125	0.155	0,183	0,211	0,238	0,265	0,291
20	0,033	0,065	0,096	0,126	0,156	0,185	0.213	0.240	0,267	0,293
21	0,033	0,065	0,096	0,127	0,157	0,186	0,214	0,241	0,268	0,294
22	0,033	0,066	0,097	0,128	0,158	0.187	0,216	0,243	0,270	0,296
23	0,034	0,066	0,098	0,129	0,159	0,188	0,217	0,245	0,272	0,298
24	0,034	0,067	0,099	0.130	0,160	0,190	0,219	0,247	0,274	0,300
25	0,034	0,067	0,099	0,131	0,162	0,191	0,221	0,249	0,276	0,302
26	0,034	0.068	0,100	0,132	0,163	0,193	0,223	0,251	0,279	0,305
27	0,035	0,069	0,101	0,133	0,164	0,195	0,225	0,253	0,281	0,308
28	0,035	0,069	0,102	0,134	0,166	0,197	0,227	0,255	0,284	0,311
29	0,035	0,070	0,103	0,135	0,167	0.198	0,229	0,257	0,286	0,314
30	0,036	0,070	0,104	0,137	0,169	0,200	0,231	0,260	0,289	0,317
31	0.036	0,071	0,105	0,138	0,171	0,202	0.233	0,263	0,292	0,320
32	0,037	0,072	0,106	0,140	0,173	0.205	0,236	0,266	0,295	0,324
33	0,037	0,073	0,107	0,141	0,175	0.207	0,238	0,269	0,298	0,327
34	0,037	0,074	0,109	0,143	0,177	0,209	0,241	0,272	0,302	0,331
35	0,038	0,074	0,110	0,144	0.179	0,212	0,244	0,275	0,306	0.335
36	0,038	0,075	0,111	0,146	0,181	0,214	0,247	0,279	0,310	0,339
37	0,039	0,076	0,113	0,148	0,183	0,217	0,250	0,282	0,314	0,343
38	0,039	0,077	0,114	0,150	0,186	0,220	0,254	0.286	0,318	0,348
39	0,040	0,078	0,116	0,153	0,188	0,223	0,257	0,290	0,322	0,353
40	0,040	0,079	0,118	0,155	0,191	0,226	0,261	0.294	0,327	0,359
41	0.041	0,080	0,119	0,157	0,194	0,229	0,265	0,298	0,332	0,364
42	0,042	0,082	0,121	0,159	0,197	0,233	0,269	0,303	0,337	0,369
43	0,042	0,083	0,123	0,162	0,200	0,237	0,273	0.308	0,342	0,375
44	0,043	0,085	0,125	0,165	0.204	0,241	0,278	0,313	0,348	0,382
45	0,044	0,086	0,127	0,168	0,207	0,245	0,283	0,318	0,354	0,388
46	0,045	0,088	0,130	0,171	0,211	0,250	0,288	0,324	0,361	0,395
47	0,045	0,089	0,132	0,174	0,215	0.254	0,293	0,330	0,367	0,402
48	0,046	0,091	0,135	0,177	0,219	0.259	0,299	0,337	0,374	0,410
49	0,047	0,093	0,137	0,181	0,223	0,264	0,305	0,344	0,382	0,418
50	0,048	0,095	0,140	0,185	0,228	0,270	0,311	0,351	0,390	0,427
51	0,049	0,097	0,143	0,189	0,233	0,276	0,318	0,358	0,398	0,436
52	0,050	0,099	1,146	0,193	0,238	0,282	0,325	0,366	0,407	0,446
53	0,052	0,102	0,149	0,197	0,243	0,288	0,332	0,374	0,416	0,456
54	0,053	0,104	0,153	0,202	0,249	0,295	0,340	0,383	0,426	0,467
55	0,054	0,107	0,157	0,207	0,255	0,302	0,349	0,393	0,437	0,479

atmosfera (massa d'aria contenuta in una colonna verticale di sezione 1 estesa dal mare fino al limite dell'atmosfera, sotto la latitudine di 45°, in condizioni normali — 0° e 760^{mm} — di temperatura e pressione).

H / z	2750^m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
0°	0,298	0,321	0,344	0,366	0,387	0,408	0,428	0,447	0,466	0,484
10	0,302	0,325	0,349	0,371	0,393	0,414	0,434	0,454	0,473	0,492
11	0,303	0,326	0,350	0,372	0,394	0,415	0,435	0,456	0,475	0,494
12	0,304	0,328	0,351	0,374	0,395	0,417	0,437	0,458	0,477	0,496
13	0,306	0,329	0,352	0,375	0,396	0,418	0,439	0,459	0,479	0,498
14	0,307	0,330	0,354	0,377	0,398	0,420	0,441	0,461	0,481	0,500
15	0,308	0,332	0,355	0,378	0,400	0,422	0,443	0,463	0,483	0,502
16	0,310	0,333	0,357	0,380	0,402	0,424	0,445	0,465	0,485	0,504
17	0,311	0,335	0,359	0,382	0,404	0,426	0,447	0,467	0,487	0,507
18	0,313	0,337	0,361	0,384	0,406	0,428	0,449	0,470	0,490	0,510
19	0,315	0,339	0,363	0,386	0,409	0,431	0,452	0,473	0,493	0,513
20	0,317	0,341	0,366	0,389	0,412	0,434	0,455	0,476	0,496	0,516
21	0,319	0,343	0,368	0,391	0,415	0,436	0,458	0,479	0,499	0,519
22	0,321	0,346	0,370	0,394	0,418	0,439	0,461	0,482	0,502	0,522
23	0,323	0,348	0,373	0,397	0,421	0,442	0,464	0,485	0,506	0,526
24	0,326	0,351	0,376	0,400	0,424	0,446	0,468	0,489	0,510	0,530
25	0,328	0,354	0,379	0,403	0,427	0,449	0,472	0,493	0,514	0,534
26	0,331	0,357	0,382	0,407	0,430	0,453	0,476	0,497	0,518	0,538
27	0,334	0,360	0,385	0,410	0,434	0,457	0,480	0,501	0,522	0,543
28	0,337	0,363	0,389	0,414	0,438	0,462	0,484	0,506	0,527	0,548
29	0,340	0,366	0,393	0,418	0,442	0,466	0,489	0,511	0,532	0,553
30	0,344	0,370	0,397	0,422	0,447	0,471	0,494	0,516	0,538	0,559
31	0,347	0,374	0,401	0,426	0,452	0,475	0,499	0,521	0,543	0,565
32	0,351	0,378	0,405	0,431	0,457	0,480	0,504	0,527	0,549	0,571
33	0,355	0,382	0,409	0,436	0,462	0,486	0,510	0,533	0,555	0,577
34	0,359	0,387	0,414	0,441	0,467	0,492	0,516	0,539	0,561	0,584
35	0,363	0,391	0,419	0,446	0,472	0,498	0,522	0,545	0,568	0,591
36	0,368	0,396	0,425	0,452	0,478	0,504	0,528	0,552	0,575	0,599
37	0,373	0,401	0,430	0,458	0,484	0,510	0,535	0,559	0,583	0,607
38	0,378	0,407	0,436	0,464	0,490	0,517	0,543	0,567	0,591	0,615
39	0,383	0,413	0,442	0,470	0,497	0,524	0,550	0,575	0,599	0,623
40	0,389	0,419	0,449	0,477	0,505	0,532	0,558	0,584	0,608	0,632
41	0,394	0,425	0,456	0,484	0,512	0,540	0,566	0,593	0,617	0,642
42	0,400	0,432	0,463	0,492	0,520	0,548	0,575	0,602	0,626	0,652
43	0,407	0,439	0,470	0,500	0,528	0,557	0,584	0,612	0,636	0,662
44	0,414	0,446	0,478	0,508	0,537	0,566	0,594	0,622	0,647	0,673
45	0,421	0,454	0,486	0,517	0,546	0,576	0,604	0,633	0,658	0,685
46	0,429	0,462	0,494	0,526	0,556	0,587	0,615	0,644	0,670	0,697
47	0,437	0,470	0,503	0,536	0,567	0,598	0,627	0,656	0,683	0,710
48	0,445	0,479	0,513	0,546	0,578	0,609	0,639	0,668	0,696	0,724
49	0,454	0,489	0,524	0,557	0,590	0,621	0,652	0,681	0,710	0,738
50	0,463	0,499	0,535	0,569	0,602	0,634	0,665	0,695	0,725	0,753
51	0,473	0,510	0,546	0,581	0,615	0,648	0,679	0,709	0,740	0,769
52	0,484	0,521	0,558	0,594	0,628	0,662	0,694	0,725	0,756	0,785
53	0,495	0,533	0,571	0,608	0,643	0,677	0,710	0,742	0,774	0,803
54	0,507	0,546	0,581	0,622	0,658	0,693	0,727	0,760	0,792	0,823
55	0,520	0,560	0,598	0,037	0,674	0,710	0,745	0,779	0,811	0,844

Segue Tavola I.

H / *z*	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
55°	0,054	0,107	0,157	0,207	0,255	0,302	0,349	0,393	0,437	0,479
56	0,055	0,109	0,161	0,212	0,262	0,310	0,358	0,403	0,448	0,491
57	0,057	0,112	0,165	0,218	0,269	0,318	0,367	0 414	0,460	0,504
58	0,058	0,115	0,170	0,224	0,276	0,327	0,377	0,426	0,473	0,518
59	0,060	0,118	0,175	0,230	0,284	0,337	0,388	0,438	0.487	0,533
60	0,062	0,122	0,180	0,237	0,293	0,347	0,400	0,451	0,501	0,549
61	0.064	0,126	0,186	0,245	0,302	0,357	0,412	0,465	0,516	0,566
62	0,066	0,130	0,192	0,253	0,312	0,369	0,425	0,480	0,533	0,585
63	0,068	0,134	0,199	0,262	0,322	0,382	0,440	0,496	0,551	0.605
64	0,070	0,139	0,206	0,271	0,334	0,396	0,456	0,514	0,571	0,626
65	0,073	0,144	0,214	0,281	0,346	0,411	0,473	0,533	0,592	0,649
66	0,076	0,150	0,222	0,292	0,360	0,426	0,491	0,554	0,615	0,675
67	0,079	0,156	0,231	0,304	0,375	0,444	0,511	0,577	0,640	0,702
68	0,082	0,162	0,241	0,317	0,391	0,463	0,533	0,601	0,668	0,732
69	0,086	0,169	0,251	0,331	0,409	0,484	0,557	0,629	0,699	0,765
70	0,090	0,178	0,263	0,347	0,428	0,507	0,584	0,659	0,731	0,802
71	0,095	0,187	0,277	0,364	0,449	0,532	0,613	0,692	0,768	0,843
72	0,100	0,197	0,291	0,383	0,474	0,561	0,646	0,729	0,809	0,888
73	0,105	0.208	0,308	0,405	0,500	0,593	0,683	0,770	0,855	0,938
74	0,112	0,221	0,327	0,430	0,531	0,629	0,724	0,817	0,907	0,995
75,0	0.119	0,235	0,348	0,458	0,565	0,669	0,771	0,870	0,966	1,059
75,1	0,120	0,236	0,350	0,461	0,568	0,674	0,776	0.875	0,972	1,066
75,2	0,121	0,238	0,352	0,464	0,572	0,678	0,781	0,881	0,978	1,073
75.3	0,121	0,240	0,355	0,467	0,576	0,682	0,786	0,887	0,985	1,080
75,4	0,122	0,241	0,357	0,470	0,580	0,687	0,791	0,893	0.991	1,087
75,5	0,123	0,243	0,360	0,473	0,584	0,692	0,797	0,899	0,998	1,095
75,6	0,124	0,245	0,362	0,476	0,588	0.696	0,802	0,905	1,005	1,102
75,7	0,125	0,246	0,365	0,479	0,592	0,701	0,808	0,911	1,012	1,110
75,8	0,126	0,248	0,367	0,483	0,596	0,706	0,813	0,917	1,019	1,117
75,9	0,126	0,250	0,370	0,486	0,600	0,711	0,819	0,923	1,026	1,125
76,0	0,127	0,251	0,372	0,490	0,604	0,716	0,824	0,930	1,033	1,133
76,1	0,128	0,253	0,375	0,493	0,609	0,721	0,830	0,937	1,040	1,141
76,2	0,129	0,255	0.377	0,497	0,613	0,726	0,836	0,943	1,047	1,149
76,3	0,130	0,257	0,380	0,500	0,617	0,731	0,841	0,950	1,054	1,157
76,4	0,131	0,259	0,383	0,503	0,622	0,736	0,848	0,957	1,062	1,165
76,5	0,132	0,260	0,386	0,508	0,627	0,742	0,854	0,964	1,070	1,174
76,6	0,133	0,262	0,388	0,511	0,631	0,747	0,861	0,971	1,078	1,182
76.7	0,134	0,264	0,391	0,515	0,636	0,753	0,867	0,978	1,086	1,191
76,8	0,135	0,266	0,394	0,519	0,640	0,758	0,873	0,985	1,094	1,200
76,9	0,136	0,268	0,397	0,523	0,645	0,764	0,880	0,992	1,102	1,209
77,0	0,137	0,270	0,400	0,527	0,650	0,770	0,886	1,000	1,110	1,218
77.1	0,138	0,272	0,403	0,531	0,655	0,775	0,893	1,007	1,119	1,227
77,2	0,139	0,274	0,406	0,535	0,660	0,781	0,900	1,015	1,127	1,236
77,3	0,140	0,277	0,410	0,539	0,665	0,787	0,907	1,023	1,136	1,246
77,4	0,141	0,279	0,413	0,543	0,670	0,794	0,914	1,031	1,145	1.256
77.5	0,142	0,281	0,416	0,548	0,676	0,800	0,921	1,039	1,154	1.266
77,6	0,143	0,283	0,419	0,552	0,681	0,806	0,928	1,047	1,163	1.275
77,7	0,144	0,285	0,422	0,557	0,687	0,812	0,935	1,055	1,172	1.285
77,8	0,146	0,288	0,426	0.561	0,692	0,819	0,943	1,064	1,182	1.296
77,9	0,147	0,290	0,430	0,565	0,697	0,826	0,951	1,073	1,192	1.306
78,0	0,148	0,292	0,433	0,570	0,703	0,833	0,959	1,081	1,201	1.317
78,1	0,149	0,295	0,437	0,575	0,709	0,839	0,967	1,090	1,211	1.328
78,2	0.151	0,297	0,440	0.579	0,715	0,846	0,975	1,099	1,221	1.339
78,3	0,152	0,300	0,444	0,584	0,720	0,853	0,983	1.108	1,231	1.350
78,4	0,153	0.303	0,448	0,589	0,726	0,860	0.991	1,118	1,241	1.361
78,5	0,154	0.305	0.451	0,594	0,733	0,868	0,999	1,128	1,252	1.373
78,6	0,156	0,308	0,455	0,599	0,739	0,876	1,008	1,137	1,263	1.385
78,7	0,157	0,310	0.459	0,604	0,745	0,883	1,017	1,147	1,273	1.397
78,8	0,158	0,313	0.463	0,610	0,752	0,891	1,026	1,157	1,285	1.409
78,9	0,160	0,316	0.468	0,615	0.758	0.899	1,035	1.167	1,296	1.421
79,0	0,161	0,319	0,472	0,621	0,766	0,907	1,044	1,178	1,308	1.434

H / z	2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
55°	0,520	0,560	0,598	0,637	0,674	0,710	0,745	0,779	0,811	0,844
56	0,533	0,574	0,614	0,654	0,691	0,729	0,764	0,799	0,832	0,866
57	0,547	0,589	0,631	0,672	0,709	0,749	0,785	0,820	0,854	0,889
58	0,562	0,606	0,648	0,690	0,729	0,769	0,807	0,843	0,878	0,913
59	0,578	0,623	0,667	0,710	0,750	0,791	0,830	0,867	0,903	0,939
60	0,596	0,642	0,687	0,731	0,773	0,814	0,854	0,893	0,931	0,968
61	0,615	0,662	0,709	0,754	0,797	0,839	0,881	0,921	0,960	0,999
62	0,635	0,684	0,732	0,779	0,823	0,867	0,910	0,951	0,991	1,031
63	0,657	0,707	0,757	0,805	0,851	0,897	0,941	0,983	1.025	1,065
64	0,680	0,732	0,784	0,834	0,882	0,929	0,974	1.018	1,062	1,103
65	0,705	0,759	0,813	0,865	0,915	0,964	1,010	1,056	1,101	1,145
66	0,733	0,789	0,844	0,898	0,950	1,001	1,050	1,097	1,144	1,183
67	0,763	0,821	0,879	0,935	0,989	1,042	1,093	1,142	1,191	1,237
68	0,796	0,857	0,917	0,975	1,031	1,086	1,139	1,191	1,242	1,290
69	0,831	0,895	0,958	1,019	1,077	1,135	1,191	1,245	1,298	1,349
70	0,871	0,938	1,004	1,067	1,129	1,189	1,247	1,304	1,359	1,413
71	0,915	0,986	1,054	1,121	1,186	1,249	1,310	1,370	1,428	1,484
72	0,964	1,038	1,110	1,181	1,249	1,315	1,380	1,443	1,504	1,563
73	1,019	1,097	1,173	1,248	1,320	1,390	1,458	1,524	1,589	1,651
74	1,080	1,164	1,244	1,323	1,400	1,474	1,546	1,616	1,684	1,751
75,0	1,150	1,239	1,325	1,408	1,490	1,569	1,646	1,720	1,793	1,863
75,1	1,157	1,247	1,333	1,417	1,500	1.579	1,657	1,732	1,805	1,875
75,2	1,165	1,255	1,342	1,427	1,509	1,589	1,667	1,743	1,817	1,887
75,3	1,173	1,263	1,351	1,436	1,519	1,600	1,678	1,754	1,828	1,900
75,4	1,181	1,272	1,360	1,446	1,529	1,611	1,689	1,766	1,840	1,913
75,5	1,189	1,280	1,369	1,456	1,540	1,621	1,701	1,778	1,852	1,926
75,6	1,197	1,289	1,378	1,465	1,550	1,632	1,712	1,790	1,865	1,939
75,7	1,205	1,298	1,388	1,475	1,561	1,643	1,724	1,802	1,878	1,952
75.8	1,213	1,307	1,397	1,485	1,571	1,655	1,736	1,814	1,891	1,965
75,9	1,222	1,316	1,407	1,495	1,582	1,666	1,748	1,827	1,904	1,979
76,0	1,230	1,325	1,417	1,506	1,593	1,678	1,760	1,840	1,917	1,992
76,1	1,238	1,334	1,427	1,516	1.604	1,689	1,772	1,852	1,930	2,006
76,2	1,247	1,343	1,437	1,527	1,615	1,701	1,785	1,865	1,944	2,020
76,3	1,256	1,353	1,447	1,538	1,627	1,713	1,797	1,879	1,958	2,034
76,4	1,265	1,363	1,457	1,549	1,639	1,725	1,810	1,892	1,972	2,049
76.5	1,275	1,372	1,468	1,560	1,650	1,738	1,823	1,906	1,986	2,064
76,6	1,284	1,382	1,478	1,572	1,662	1.751	1,836	1,920	2,000	2,079
76,7	1,293	1,393	1,489	1,583	1,674	1,763	1,850	1,934	2,015	2,094
76,8	1,303	1,403	1,500	1,595	1,687	1,776	1,863	1,948	2,030	2,109
76,9	1,312	1,413	1,511	1,607	1,699	1,790	1,877	1,962	2,045	2,125
77,0	1,322	1,424	1,523	1,619	1,712	1,803	1,891	1,977	2,060	2,141
77,1	1,332	1,435	1,534	1.631	1,725	1,817	1,905	1,992	2,076	2,157
77,2	1,342	1,446	1,546	1,643	1,738	1,830	1,920	2,007	2,091	2,173
77,3	1,353	1,457	1.558	1,656	1,752	1,844	1,935	2,022	2,107	2,190
77,4	1,363	1,468	1,570	1,669	1,765	1,859	1,950	2,038	2,124	2,207
77,5	1,374	1.479	1,582	1,682	1,779	1,873	1.965	2,054	2,140	2,224
77,6	1,385	1,491	1,594	1,695	1,793	1,888	1,980	2,070	2,157	2,241
77,7	1,396	1,503	1,607	1,709	1,807	1,903	1,996	2,086	2,174	2,259
77,8	1,407	1,515	1,620	1,722	1,822	1.918	2,012	2,103	2,191	2,277
77,9	1,418	1,527	1,633	1.736	1,836	1,933	2,028	2,120	2,209	2,295
78,0	1,430	1,540	1,647	1,750	1,851	1,949	2,044	2,137	2,227	2,314
78,1	1,442	1,552	1,660	1,765	1,866	1,965	2,061	2,154	2,245	2,333
78,2	1,454	1,565	1,674	1,779	1,882	1,981	2,078	2,172	2,263	2,352
78,3	1,466	1,578	1,688	1,794	1,897	1,998	2,095	2,190	2.281	2,372
78,4	1,478	1,591	1,702	1,809	1,913	2,015	2,113	2,209	2,301	2,392
78,5	1,491	1,605	1,716	1,824	1,929	2,032	2,131	2,227	2,321	2,412
78,6	1,503	1,619	1,731	1,840	1.946	2,049	2,149	2,246	2,341	2,432
78,7	1,516	1,633	1,746	1,856	1,963	2,067	2,168	2,266	2,361	2,453
78,8	1,530	1,647	1,761	1,872	1,980	2,085	2,187	2,285	2,381	2,475
78,9	1,543	1,661	1,776	1,889	1,998	2,103	2,206	2,306	2,402	2,496
79,0	1,557	1,676	1,792	1,905	2,015	2,122	2,225	2,326	2,423	2,518

Segue Tavola I.

H / z	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
79,0	0,161	0,319	0,472	0,621	0,766	0,907	1,044	1,178	1,308	1,434
79,1	0,163	0,321	0,476	0,626	0,773	0,915	1,053	1,188	1,319	1,447
79,2	0,164	0,324	0,480	0,632	0,780	0,923	1,063	1,199	1,331	1,460
79,3	0,166	0,327	0,485	0,638	0,787	0,932	1,073	1,210	1,344	1,473
79,4	0,167	0,330	0,489	0,644	0,794	0,940	1,083	1,221	1,356	1,487
79,5	0,169	0,333	0,494	0,650	0,801	0,949	1,093	1,233	1,369	1,501
79,6	0,171	0,337	0,498	0,656	0,809	0,958	1,103	1,244	1,382	1,515
79,7	0,172	0,340	0,503	0,662	0,817	0,967	1,114	1,256	1,395	1,529
79,8	0,174	0,343	0,508	0,668	0,825	0,977	1,124	1,268	1,408	1,544
79,9	0,176	0,346	0,513	0,675	0,833	0,986	1,135	1,280	1,422	1,559
80,0	0,177	0,350	0,518	0,682	0,841	0,996	1,146	1,293	1,436	1,574
80,1	0,179	0,353	0,523	0,688	0,849	1,006	1,158	1,306	1,450	1,590
80,2	0,181	0,357	0,528	0,695	0,858	1,016	1,169	1,319	1,464	1,606
80,3	0,183	0,361	0,534	0,702	0,866	1,026	1,181	1,332	1,479	1,622
80,4	0,185	0,364	0,539	0,710	0,875	1,037	1,193	1,346	1,494	1,639
80,5	0,187	0,368	0,545	0,717	0,884	1,047	1,206	1,360	1,510	1,655
80,6	0,189	0,372	0,551	0,725	0,894	1,058	1,218	1,374	1,526	1,673
80,7	0,191	0,376	0,557	0,732	0,903	1,069	1,231	1,389	1,542	1,690
80,8	0,193	0,380	0,563	0,740	0,913	1,081	1,244	1,403	1,558	1,708
80,9	0,195	0,384	0,569	0,748	0,923	1,093	1,258	1,418	1,575	1,727
81,0	0,197	0,388	0,575	0,756	0,933	1,105	1,272	1,434	1,592	1,746
81,1	0,199	0,393	0,581	0,765	0,943	1,117	1,286	1,450	1,609	1,765
81,2	0,201	0,397	0,588	0,773	0,954	1,129	1,300	1,466	1,627	1,784
81,3	0,204	0,402	0,594	0,782	0,964	1,142	1,315	1,482	1,646	1,804
81,4	0,206	0,406	0,601	0,791	0,976	1,155	1,330	1,499	1,665	1,825
81,5	0,208	0,411	0,608	0,800	0,987	1,168	1,345	1,517	1,684	1,846
81,6	0,211	0,416	0,615	0,810	0,998	1,182	1,361	1,535	1,703	1,867
81,7	0,213	0,421	0,623	0,819	1,010	1,196	1,377	1,553	1,723	1,889
81,8	0,216	0,426	0,630	0,829	1,022	1,211	1,393	1,571	1,744	1,912
81,9	0,218	0,431	0,638	0,839	1,035	1,225	1,410	1,590	1,765	1,935
82,0	0,221	0,436	0,646	0,850	1,048	1,240	1,428	1,610	1,787	1,959
82,1	0,224	0,442	0,654	0,860	1,061	1,256	1,446	1,630	1,809	1,983
82,2	0,227	0,447	0,662	0,871	1,074	1,272	1,464	1,650	1,832	2,008
82,3	0,230	0,453	0,671	0,882	1,088	1,288	1,482	1,671	1,855	2,033
82,4	0,233	0,459	0,679	0,894	1,102	1,305	1,501	1,693	1,879	2,059
82,5	0,236	0,465	0,688	0,905	1,116	1,322	1,521	1,715	1,903	2,086
82,6	0,239	0,471	0,698	0,917	1,131	1,339	1,541	1,738	1,928	2,114
82,7	0,242	0,478	0,707	0,930	1,146	1,357	1,562	1,761	1,954	2,142
82,8	0,246	0,484	0,717	0,943	1,162	1,376	1,583	1,785	1,981	2,171
82,9	0,249	0,491	0,727	0,956	1,178	1,395	1,605	1,809	2,008	2,201
83,0	0,253	0,498	0,737	0,969	1,195	1,414	1,628	1,835	2,036	2,232
83,1	0,256	0,505	0,748	0,983	1,212	1,434	1,651	1,861	2,065	2,263
83,2	0,260	0,513	0,758	0,997	1,230	1,455	1,675	1,888	2,095	2,296
83,3	0,264	0,520	0,770	1,012	1,248	1,477	1,699	1,915	2,125	2,329
83,4	0,268	0,528	0,781	1,027	1,266	1,499	1,724	1,944	2,156	2,363
83,5	0,272	0,536	0,793	1,043	1,285	1,521	1,750	1,973	2,189	2,398
83,6	0,276	0,544	0,805	1,059	1,305	1,544	1,777	2,003	2,222	2,435
83,7	0,280	0,553	0,818	1,075	1,325	1,568	1,804	2,034	2,256	2,472
83,8	0,285	0,562	0,831	1,092	1,347	1,593	1,833	2,066	2,292	2,511
83,9	0,290	0,571	0,844	1,110	1,368	1,619	1,863	2,099	2,329	2,551
84,0	0,294	0,580	0,858	1,128	1,391	1,645	1,893	2,133	2,366	2,592
84,1	0,299	0,590	0,873	1,147	1,414	1,673	1,924	2,168	2,405	2,635
84,2	0,304	0,600	0,888	1,167	1,438	1,701	1,956	2,205	2,445	2,679
84,3	0,310	0,611	0,903	1,187	1,463	1,730	1,990	2,242	2,487	2,725
84,4	0,315	0,621	0,919	1,208	1,488	1,760	2,025	2,280	2,530	2,772
84,5	0,321	0,632	0,935	1,229	1,514	1,792	2,060	2,321	2,574	2,820
84,6	0,327	0,644	0,952	1,252	1,542	1,824	2,098	2,363	2,621	2,871
84,7	0,333	0,656	0,970	1,275	1,571	1,858	2,136	2,407	2,669	2,923
84,8	0,339	0,669	0,988	1,299	1,600	1,892	2,176	2,451	2,718	2,977
84,9	0,346	0,682	1,007	1,324	1,631	1,928	2,247	2,497	2,769	3,033
85,0	0,353	0,695	1,027	1,350	1,663	1,966	2,261	2,546	2,823	3,091

H / z	2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
79°,0	1,557	1,676	1,792	1,905	2,015	2,122	2,225	2,326	2,423	2,518
79,1	1,571	1,691	1,809	1,922	2,033	2,141	2,245	2,347	2,445	2,541
79,2	1,585	1,707	1,825	1,940	2,051	2,160	2,265	2,368	2,467	2,564
79,3	1,600	1,722	1,842	1,958	2,070	2,180	2,286	2,389	2,490	2,587
79,4	1,614	1,738	1,859	1,976	2,089	2,200	2,307	2,411	2,513	2,611
79,5	1,629	1,754	1,876	1,994	2,109	2,220	2,328	2,434	2,536	2,635
79,6	1,645	1,771	1,893	2,013	2,129	2,240	2,350	2,456	2,560	2,659
79,7	1,670	1,788	1,911	2,032	2,149	2,262	2,372	2,479	2,584	2,684
79,8	1,676	1,805	1,930	2,051	2,169	2,284	2,395	2,503	2,608	2,710
79,9	1,683	1,822	1,948	2,071	2,190	2,306	2,418	2,527	2,633	2,736
80,0	1,709	1,840	1,967	2,091	2,211	2,328	2,442	2,552	2,659	2,763
80,1	1,726	1,858	1,987	2,112	2,233	2,351	2,466	2,577	2,685	2,790
80,2	1,743	1,877	2,007	2,133	2,255	2,374	2,490	2,603	2,712	2,817
80,3	1,761	1,896	2,027	2,154	2,278	2,398	2,515	2,629	2,739	2,845
80,4	1,779	1,915	2,048	2,176	2,301	2,423	2,541	2,655	2,766	2,874
80,5	1,797	1,935	2,069	2,199	2,325	2,448	2,567	2,682	2,795	2,904
80,6	1,816	1,955	2,090	2,221	2,349	2,473	2,593	2,710	2,824	2,934
80,7	1,835	1,975	2,112	2,245	2,374	2,499	2,620	2,738	2,853	2,964
80,8	1,854	1,996	2,134	2,269	2,399	2,525	2,648	2,767	2,883	2,995
80,9	1,874	2,018	2,157	2,293	2,425	2,552	2,676	2,797	2,914	3,027
81,0	1,895	2,040	2,181	2,318	2,451	2,580	2,705	2,827	2,945	3,060
81,1	1,916	2,062	2,205	2,343	2,478	2,608	2,735	2,858	2,977	3,093
81,2	1,937	2,085	2,229	2,369	2,505	2,637	2,765	2,889	3,010	3,127
81,3	1,959	2,108	2,254	2,395	2,533	2,666	2,796	2,921	3,044	3,162
81,4	1,981	2,132	2,280	2,423	2,562	2,696	2,827	2,954	3,078	3,198
81,5	2,004	2,157	2,306	2,451	2,591	2,727	2,860	2,988	3,113	3,234
81,6	2,027	2,182	2,323	2,479	2,621	2,759	2,893	3,023	3,149	3,271
81,7	2,051	2,208	2,360	2,508	2,651	2,791	2,926	3,058	3,185	3,309
81,8	2,075	2,234	2,388	2,538	2,683	2,824	2,961	3,094	3,223	3,348
81,9	2,100	2,261	2,417	2,568	2,715	2,858	2,997	3,131	3,262	3,388
82,0	2,126	2,288	2,446	2,599	2,748	2,893	3,033	3,169	3,301	3,429
82,1	2,152	2,317	2,476	2,631	2,782	2,928	3,070	3,207	3,341	3,471
82,2	2,179	2,346	2,507	2,664	2,817	2,964	3,108	3,247	3,382	3,514
82,3	2,207	2,375	2,539	2,698	2,852	3,002	3,147	3,288	3,425	3,558
82,4	2,235	2,406	2,571	2,732	2,888	3,040	3,187	3,330	3,468	3,603
82,5	2,264	2,437	2,604	2,767	2,925	3,079	3,228	3,372	3,513	3,649
82,6	2,294	2,469	2,639	2,804	2,964	3,119	3,270	3,416	3,558	3,696
82,7	2,325	2,502	2,674	2,841	3,003	3,161	3,313	3,462	3,605	3,745
82,8	2,356	2,536	2,710	2,879	3,043	3,203	3,358	3,508	3,653	3,795
82,9	2,388	2,570	2,747	2,918	3,085	3,246	3,403	3,555	3,701	3,846
83,0	2,422	2,606	2,785	2,959	3,127	3,291	3,450	3,604	3,751	3,898
83,1	2,456	2,643	2,824	3,000	3,171	3,337	3,498	3,654	3,804	3,953
83,2	2,491	2,680	2,864	3,042	3,216	3,384	3,548	3,706	3,859	4,008
83,3	2,527	2,719	2,906	3,087	3,262	3,433	3,598	3,759	3,914	4,065
83,4	2,564	2,759	2,948	3,132	3,310	3,483	3,651	3,813	3,971	4,124
83,5	2,603	2,800	2,992	3,179	3,359	3,535	3,705	3,869	4,030	4,185
83,6	2,642	2,842	3,037	3,226	3,410	3,588	3,760	3,927	4,090	4,247
83,7	2,682	2,886	3,084	3,275	3,461	3,642	3,817	3,987	4,151	4,310
83,8	2,724	2,931	3,132	3,326	3,515	3,698	3,876	4,048	4,215	4,377
83,9	2,768	2,978	3,181	3,379	3,571	3,757	3,937	4,111	4,281	4,445
84,0	2,812	3,025	3,232	3,433	3,627	3,816	3,999	4,176	4,348	4,515
84,1	2,858	3,075	3,285	3,488	3,686	3,878	4,063	4,243	4,418	4,587
84,2	2,906	3,126	3,339	3,546	3,747	3,942	4,130	4,313	4,490	4,662
84,3	2,955	3,179	3,396	3,606	3,810	4,008	4,199	4,385	4,565	4,739
84,4	3,006	3,233	3,454	3,667	3,875	4,075	4,270	4,459	4,642	4,818
84,5	3,058	3,289	3,514	3,731	3,941	4,145	4,343	4,535	4,721	4,900
84,6	3,113	3,348	3,576	3,797	4,011	4,218	4,420	4,614	4,803	4,986
84,7	3,170	3,409	3,640	3,865	4,083	4,294	4,499	4,697	4,888	5,074
84,8	3,228	3,471	3,707	3,935	4,157	4,372	4,580	4,781	4,976	5,165
84,9	3,288	3,536	3,776	4,008	4,234	4,452	4,663	4,868	5,066	5,259
85,0	3,351	3,603	3,848	4,084	4,314	4,536	4,751	4,960	5,161	5,357

Segue Tavola I.

H / z	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
85° 0′	0,353	0,695	1,027	1,350	1,663	1,966	2,261	2,546	2,823	3,091
1	0,354	0,697	1,030	1,354	1,668	1,972	2,268	2,554	2,832	3,101
2	0,355	0,700	1,034	1,359	1,674	1,979	2,275	2,562	2,841	3,111
3	0,356	0,702	1,037	1,363	1,679	1,985	2,283	2,571	2,850	3,121
4	0,357	0,704	1,041	1,368	1,685	1,992	2,290	2,579	2,859	3,131
5	0,359	0,707	1,045	1,372	1,690	1,999	2,298	2,588	2,869	3,141
6	0,360	0,709	1,048	1,377	1,696	2,006	2,305	2,596	2,878	3,152
7	0,361	0,712	1,052	1,381	1,701	2,012	2,313	2,605	2,888	3,162
8	0,362	0,714	1,055	1,386	1,707	2,019	2,320	2,613	2,897	3,172
9	0,364	0,716	1,059	1,391	1,713	2,025	2,328	2,622	2,907	3,183
10	0,365	0,719	1,062	1,396	1,719	2,032	2,336	2,631	2,916	3,193
11	0,366	0,721	1,066	1,400	1,724	2,039	2,344	2,639	2,926	3,204
12	0,367	0,724	1,070	1,405	1,730	2,046	2,352	2,648	2,936	3,214
13	0,369	0,726	1,073	1,410	1,736	2,053	2,360	2,657	2,946	3,225
14	0,370	0,729	1,077	1,415	1,742	2,060	2,368	2,666	2,955	3,236
15	0,371	0,731	1,081	1,420	1,748	2,067	2,376	2,675	2,965	3,247
16	0,372	0,734	1,084	1,424	1,754	2,074	2,384	2,684	2,975	3,258
17	0,374	0,736	1,088	1,429	1,760	2,081	2,392	2,693	2,986	3,269
18	0,375	0,739	1,092	1,454	1,766	2,088	2,400	2,703	2,996	3,380
19	0,376	0,742	1,096	1,459	1,772	2,095	2,408	2,712	3,006	3,291
20	0,378	0,744	1,100	1,444	1,779	2,103	2,417	2,721	3,016	3,302
21	0,379	0,747	1,104	1,450	1,785	2,110	2,425	2,731	3,027	3,313
22	0,380	0,749	1,107	1,455	1,791	2,117	2,434	2,740	3,037	3,325
23	0,382	0,752	1,111	1,460	1,797	2,125	2,442	2,749	3,047	3,336
24	0,383	0,755	1,115	1,465	1,804	2,132	2,451	2,759	3,058	3,348
25	0,385	0,757	1,119	1,470	1,810	2,140	2,459	2,769	3,069	3,359
26	0,386	0,760	1,123	1,475	1,816	2,147	2,468	2,778	3,079	3,371
27	0,387	0,763	1,127	1,481	1,823	2,155	2,477	2,788	3,090	3,383
28	0,389	0,766	1,131	1,486	1,830	2,163	2,485	2,798	3,101	3,395
29	0,390	0,769	1,136	1,491	1,836	2,170	2,494	2,808	3,112	3,407
30	0,392	0,771	1,140	1,497	1,843	2,178	2,503	2,818	3,123	3,419
31	0,393	0,774	1,144	1,502	1,849	2,186	2,512	2,828	3,134	3,431
32	0,395	0,777	1,148	1,508	1,856	2,194	2,521	2,838	3,145	3,443
33	0,396	0,780	1,152	1,513	1,863	2,202	2,530	2,848	3,157	3,455
34	0,397	0,783	1,157	1,519	1,870	2,210	2,539	2,859	3,168	3,467
35	0,399	0,786	1,161	1,524	1,877	2,218	2,549	2,869	3,179	3,580
36	0,400	0,789	1,165	1,530	1,883	2,226	2,558	2,879	3,191	3,492
37	0,402	0,792	1,169	1,536	1,890	2,234	2,567	2,890	3,202	3,505
38	0,403	0,795	1,174	1,541	1,897	2,242	2,577	2,900	3,214	3,518
39	0,405	0,798	1,178	1,547	1,905	2,251	2,586	2,911	3,226	3,530
40	0,407	0,801	1,183	1,553	1,912	2,259	2,596	2,922	3,238	3,543
41	0,408	0,804	1,187	1,559	1,919	2,268	2,605	2,933	3,249	3,556
42	0,410	0,807	1,192	1,565	1,926	2,276	2,615	2,943	3,261	3,569
43	0,411	0,810	1,196	1,571	1,933	2,285	2,625	2,954	3,274	3,583
44	0,413	0,813	1,201	1,577	1,941	2,293	2,635	2,965	3,286	3,596
45	0,414	0,816	1,206	1,583	1,948	2,302	2,645	2,977	3,298	3,609
46	0,416	0,819	1,210	1,589	1,955	2,311	2,655	2,988	3,310	3,623
47	0,418	0,823	1,215	1,595	1,963	2,319	2,665	2,999	3,322	3,636
48	0,419	0,826	1,220	1,601	1,971	2,328	2,675	3,010	3,335	3,650
49	0,421	0,829	1,224	1,607	1,978	2,337	2,685	3,022	3,348	3,664
50	0,423	0,832	1,229	1,614	1,986	2,346	2,696	3,033	3,361	3,677
51	0,424	0,836	1,234	1,620	1,994	2,355	2,706	3,045	3,373	3,691
52	0,426	0,839	1,239	1,626	2,001	2,365	2,716	3,057	3,386	3,705
53	0,428	0,842	1,244	1,633	2,009	2,374	2,727	3,069	3,399	3,720
54	0,430	0,846	1,249	1,639	2,017	2,383	2,737	3,080	3,412	3,734
55	0,431	0,849	1,254	1,646	2,025	2,393	2,748	3,092	3,426	3,748
56	0,433	0,853	1,259	1,652	2,033	2,402	2,759	3,105	3,439	3,763
57	0,435	0,856	1,265	1,659	2,041	2,412	2,770	3,127	3,452	3,777
58	0,437	0,860	1,269	1,666	2,049	2,421	2,781	3,129	3,466	3,792
59	0,438	0,863	1,275	1,672	2,058	2,431	2,792	3,141	3,480	3,807
86° 0′	0,440	0,867	1,279	1,679	2,066	2,441	2,803	3,154	3,493	3,822

H / z	2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	7750	5000
85° 0′	3,351	3,603	3,848	4,084	4,314	4,536	4,751	4,960	5,161	5,357
1	3,362	3,615	3,860	4,097	4,328	4,550	4,766	4,975	5,177	5,373
2	3,373	3,626	3,872	4,110	4,341	4,555	4,781	4,991	5,194	5,390
3	3,384	3,638	3,885	4,124	4,355	4,579	4,796	5,006	5,210	5,407
4	3,395	3,650	3,897	4,137	4,369	4,594	4,811	5,022	5,226	5,424
5	3,406	3,661	3,910	4,150	4,383	4,608	4,827	5,038	5,243	5,441
6	3,417	3,673	3,922	4,163	4,397	4,623	4,842	5,054	5,259	5,458
7	3,428	3,685	3,935	4,177	4,411	4,638	4,857	5,070	5,276	5,475
8	3,439	3,697	3,948	4,190	4,425	4,653	4,873	5,086	5,293	5,493
9	3,450	3,709	3,961	4,204	4,440	4,668	4,889	5,103	5,310	5,510
10	3,462	3,722	3,974	4,218	4,454	4,683	4,904	5,119	5,327	5,528
11	3,473	3,734	3,987	4,231	4,468	4,698	4,920	5,135	5,344	5,545
12	3,484	3,746	4,000	4,245	4,483	4,713	4,936	5,152	5,361	5,563
13	3,496	3,758	4,013	4,259	4,498	4,729	4,952	5,169	5,378	5,581
14	3,508	3,771	4,026	4,273	4,512	4,744	4,968	5,185	5,396	5,599
15	3,519	3,783	4,039	4,287	4,527	4,760	4,984	5,203	5,413	5,617
16	3,531	3,796	4,053	4,301	4,542	4,775	5,010	5,219	5,431	5,635
17	3,543	3,809	4,066	4,316	4,557	4,791	5,017	5,236	5,448	5,654
18	3,555	3,822	4,080	4,330	4,572	4,807	5,034	5,254	5,466	5,672
19	3,567	3,835	4,094	4,345	4,587	4,823	5,051	5,271	5,484	5,691
20	3,579	3,847	4,107	4,359	4,603	4,839	5,067	5,288	5,502	5,709
21	3,591	3,860	4,121	4,374	4,618	4,855	5,084	5,306	5,520	5,728
22	3,604	3,874	4,135	4,489	4,634	4,871	5,101	5,323	5,539	5,747
23	3,616	3,887	4,149	4,403	4,649	4,888	5,118	5,341	5,557	5,766
24	3,628	3,900	4,164	4,418	4,665	4,904	5,135	5,359	5,576	5,785
25	3,641	3,914	4,178	4,434	4,681	4,921	5,153	5,377	5,594	5,805
26	3,654	3,927	4,192	4,449	4,697	4,937	5,170	5,395	5,613	5,824
27	3,666	3,941	4,207	4,464	4,713	4,954	5,188	5,414	5,632	5,844
28	3,679	3,954	4,221	4,479	4,729	4,971	5,205	5,432	5,651	5,863
29	3,692	3,968	4,236	4,495	4,745	4,988	5,223	5,450	5,670	5,883
30	3,705	3,982	4,250	4,510	4,762	5,005	5,241	5,469	5,690	5,903
31	3,718	3,996	4,265	4,526	4,778	5,023	5,259	5,488	5,709	5,923
32	3,731	4,010	4,280	4,542	4,795	5,040	5,277	5,507	5,729	5,943
33	3,744	4,024	4,295	4,558	4,812	5,057	5,296	5,526	5,748	5,964
34	3,758	4,038	4,310	4,574	4,829	5,075	5,314	5,545	5,768	5,984
35	3,771	4,053	4,326	4,590	4,845	5,093	5,332	5,564	5,788	6,005
36	3,785	4,067	4,341	4,606	4,862	5,111	5,351	5,583	5,808	6,025
37	3,798	4,082	4,357	4,623	4,880	5,129	5,370	5,603	5,828	6,046
38	3,812	4,096	4,372	4,639	4,897	5,147	5,388	5,622	5,848	6,067
39	3,826	4,111	4,388	4,655	4,914	5,165	5,407	5,642	5,869	6,088
40	3,840	4,126	4,404	4,672	4,932	5,183	5,427	5,662	5,889	6,109
41	3,854	4,141	4,419	4,689	4,950	5,202	5,446	5,682	5,910	6,131
42	3,868	4,156	4,435	4,706	4,967	5,220	5,465	5,702	5,931	6,152
43	3,881	4,171	4,452	4,723	4,985	5,239	5,485	5,722	5,952	6,174
44	3,896	4,187	4,468	4,740	5,003	5,258	5,504	5,743	5,973	6,196
45	3,910	4,202	4,484	4,757	5,021	5,277	5,524	5,763	5,995	6,218
46	3,925	4,217	4,501	4,775	5,040	5,296	5,544	5,784	6,016	6,240
47	3,939	4,233	4,517	4,792	5,058	5,315	5,564	5,805	6,038	6,263
48	3,954	4,249	4,534	4,810	5,077	5,335	5,584	5,826	6,059	6,285
49	3,969	4,265	4,551	4,828	5,095	5,354	5,505	5,847	6,081	6,308
50	3,984	4,281	4,568	4,845	5,114	5,374	5,625	5,868	6,103	6,330
51	3,999	4,297	4,585	4,863	5,133	5,394	5,646	5,890	6,126	6,353
52	4,014	4,313	4,602	4,882	5,152	5,414	5,667	5,911	6,148	6,376
53	4,029	4,329	4,619	4,900	5,171	5,434	5,688	5,933	6,170	6,400
54	4,045	4,346	4,637	4,918	5,191	5,454	5,709	5,955	6,193	6,423
55	4,060	4,362	4,654	4,937	5,210	5,475	5,730	5,977	6,216	6,447
56	4,076	4,379	4,672	4,956	5,230	5,495	5,751	5,999	6,239	6,470
57	4,091	4,396	4,690	4,974	5,250	5,516	5,773	6,022	6,262	6,494
58	4,107	4,413	4,708	4,993	5,270	5,537	5,795	6,044	6,285	6,518
59	4,123	4,430	4,726	5,013	5,290	5,558	5,817	6,067	6,309	6,533
86° 0′	4,139	4,447	4,744	5,032	5,310	5,579	5,839	6,090	6,333	6,567

Segue Tavola I.

H / z	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
86° 0′	0,440	0,867	1,279	1,679	2,066	2,441	2,803	3,154	3,493	3,822
1	0,442	0,870	1,285	1,686	2,074	2,450	2,814	3,166	3,507	3,837
2	0,444	0,874	1,290	1,693	2,083	2,460	2,826	3,179	3,521	3,852
3	0,446	0,877	1,295	1,700	2,091	2,470	2,837	3,192	3,535	3,868
4	0,448	0,881	1,301	1,707	2,100	2.480	2 848	3,205	3,549	3,883
5	0,449	0,885	1,306	1,714	2,108	2,490	2,860	3,218	3,564	3,898
6	0,451	0,888	1,311	1,721	2,117	2,501	2,872	3 231	3,578	3.914
7	0,453	0,892	1,317	1,728	2,126	2,511	2,883	3,244	3,592	3,929
8	0,455	0,896	1,323	1,735	2,135	2,521	2,895	3,257	3,607	3,945
9	0,457	0,900	1,328	1,743	2,144	2,532	2,907	3,270	3,622	3,961
10	0,459	0,904	1,334	1,750	2,153	2,542	2,919	3,284	3,636	3,977
11	0,461	0,908	1,339	1,757	2,162	2,553	2,931	3,297	3,651	3,994
12	0,463	0,911	1,345	1,765	2,171	2,564	2,944	3,311	3,666	4,010
13	0,465	0,915	1,351	1,772	2,180	2,575	2,956	3,325	3,682	4,027
14	0,467	0,919	1,357	1,780	2,189	2,586	2.968	3,339	3,697	4,043
15	0,469	0,923	1,363	1,788	2,199	2,597	2,981	3,353	3,712	4,060
16	0,471	0,927	1,369	1,795	2,208	2,608	2,994	3,367	3,728	4,077
17	0,473	0,932	1,375	1,803	2,218	2,619	3,006	3,381	3,744	4,094
18	0,476	0,936	1,381	1,811	2,227	2,630	3,019	3,396	3,760	4,111
19	0,478	0,940	1,387	1,819	2,237	2,641	3,032	3,410	3,776	4,128
20	0,480	0,944	1,393	1,827	2,247	2,653	3,045	3,425	3,792	4.146
21	0,482	0,948	1,399	1,835	2,257	2,664	3,059	3,440	3,808	4,164
22	0,484	0,953	1,405	1,843	2,267	2,676	3,072	3,454	3,824	4,181
23	0,486	0,957	1,412	1,852	2,277	2.688	3,085	3,469	3,841	4,199
24	0,489	0,961	1,418	1,860	2,287	2,700	3,099	3,484	3,857	4,217
25	0,491	0,966	1,425	1,868	2,297	2,712	3,113	3,500	3,874	4,236
26	0,493	0,970	1,431	1,877	2,307	2,724	3,126	3,515	3,891	4,254
27	0.495	0,975	1,438	1,885	2,318	2,736	3,140	3,530	3,908	4,273
28	0,498	0,979	1,444	1 894	2,328	2,748	3,154	3,546	3,925	4,291
29	0,500	0,984	1.451	1,903	2,339	2,761	3,168	3,562	3,943	4,310
30	0,503	0,988	1,458	1,911	2,350	2,773	3,183	3,578	3,960	4,329
31	0,505	0,993	1,464	1,920	2,361	2,786	3,197	3,594	3,978	4,348
32	0,507	0,998	1,471	1,929	2,371	2,799	3,211	3.610	3,996	4,367
33	0,510	1,002	1,478	1,938	2,382	2,812	3,226	3,627	4,014	4,387
34	0,512	1,007	1,485	1,947	2,393	2,825	3,241	3,643	4,032	4,407
35	0,515	1,012	1,492	1,956	2,404	2,838	3,256	3,660	4,050	4,427
36	0,517	1,017	1,499	1,966	2.416	2,851	3,271	3,676	4,068	4,447
37	0,520	1,022	1,507	1,975	2,427	2,864	3 286	3,693	4,087	4,467
38	0,522	1,027	1,514	1,984	2,439	2,878	3,301	3,710	4,106	4,487
39	0,525	1,032	1,521	1,994	2,450	2,891	3,317	3,728	4,125	4,508
40	0,527	1,037	1,528	2,004	2,462	2,905	3,332	3.745	4,144	4,528
41	0,530	1,042	1,536	2,013	2,474	2,919	3,348	3,763	4,163	4,549
42	0,533	1,047	1,544	2,023	2,486	2,933	3,364	3,780	4,182	4,570
43	0,535	1,052	1.551	2,033	2,498	2,947	3,380	3,798	4.202	4,592
44	0,538	1,057	1,559	2,043	2,510	2,961	3,396	3,816	4,222	4.613
45	0,541	1,063	1,567	2,053	2,522	2,975	3,413	3,834	4,242	4,635
46	0,544	1,068	1,575	2,063	2,535	2,990	3,429	3,853	4,262	4,657
47	0,546	1,074	1,582	2,073	2,547	3,005	3,446	3,871	4,282	4,679
48	0,549	1,079	1,590	2,084	2,560	3,019	3,462	3,890	4,303	4.701
49	0,552	1,085	1,598	2,094	2,573	3,034	3,479	3,909	4,323	4,723
50	0,555	1,090	1,607	2,105	2,586	3,049	3,496	3,928	4,344	4,746
51	0,558	1,096	1,615	2,116	2,599	3,064	3,514	3,947	4,365	4 769
52	0,561	1,102	1,623	2,126	2,612	3,080	3,531	3,967	4,387	4,192
53	0,564	1,107	1,632	2,137	2,625	3,095	3,549	3,986	4,408	4,815
54	0,567	1,113	1,640	2,148	2,638	3,111	3,567	4,006	4.430	4,839
55	0,570	1,119	1,649	2,160	2,652	3.127	3,585	4,026	4,452	4,863
56	0,573	1,125	1,657	2,171	2,666	3,143	3,603	4,046	4,474	4,886
57	0,576	1,131	1,666	2,182	2,679	3,159	3,621	4,067	4,496	4,911
58	0,579	1,137	1,675	2,193	2,693	3,175	3,639	4,087	4 519	4,935
59	0,582	1,143	1,684	2,205	2,707	3,192	3,658	4,108	4,542	4,960
87° 0′	0,585	1,149	1,693	2,217	2,722	3,208	3,677	4,129	4,565	4,985

H / z	2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
86° 0′	4,140	4,447	4,744	5,032	5,310	5,579	5,839	6,090	6,333	6,567
1	4,156	4,464	4,763	5,051	5,330	5,600	5,861	6,113	6,357	6,592
2	4,172	4,482	4,781	5,071	5,351	5,621	5,883	6,136	6,381	6,617
3	4,188	4,499	4,800	5,090	5,371	5,643	5,906	6,159	6,405	6,642
4	4,205	4,517	4,818	5,110	5,392	5,665	5,928	6,183	6,429	6,667
5	4,222	4,535	4,837	5,130	5,413	5,687	5,951	6,207	6,454	6,692
6	4,239	4,553	4,857	5,150	5,434	5,709	5,974	6,231	6,478	6,718
7	4,256	4,571	4,876	5,171	5,456	5,731	5,997	6,255	6,503	6,744
8	4,273	4,589	4,895	5,191	5,477	5,753	6,021	6,279	6,528	6,769
9	4,290	4,607	4,915	5,212	5,499	5,776	6,044	6,303	6,554	6,795
10	4,307	4,626	4,934	5,232	5,520	5,799	6,068	6,328	6,579	6,821
11	4,324	4,645	4,954	5,253	5,542	5,822	6,092	6,353	6,505	6,848
12	4,342	4,664	4,974	5,274	5,564	5,845	6,116	6,378	6,631	6,875
13	4,360	4,683	4,994	5,296	5,587	5,868	6,140	6,403	6,657	6,902
14	4,378	4,702	5,015	5,317	5,609	5,892	6,164	6,428	6,683	6,929
15	4,396	4,721	5,035	5,339	5,632	5,915	6,189	6,454	6,709	6,956
16	4,414	4,740	5,056	5,360	5,655	5,939	6,214	6,479	6,736	6,983
17	4,433	4,760	5,076	5,382	5,678	5,963	6,239	6,505	6,763	7,011
18	4,451	4,780	5,097	5,404	5,701	5,987	6,264	6,531	6,790	7,039
19	4,470	4,800	5,119	5,426	5,724	6,012	6,290	6,558	6,817	7,067
20	4,489	4,820	5,140	5,449	5,748	6,036	6,315	6,584	6,844	7,095
21	4,508	4,840	5,161	5,472	5,771	6,061	6,341	6,611	6,872	7,124
22	4,527	4,860	5,183	5,494	5,795	6,086	6,367	6,638	6,900	7,152
23	4,546	4,881	5,205	5,517	5,819	6,111	6,393	6,665	6,928	7,181
24	4,565	4,902	5,227	5,540	5,844	6,136	6,419	6,692	6,956	7,210
25	4,585	4,923	5 249	5,564	5,868	6,162	6,446	6,620	6,984	7,240
26	4,605	4,944	5,271	5,587	5,893	6,188	6,473	6,748	7,013	7,269
27	4,625	4,965	5,294	5,611	5,918	6,214	6,500	6,776	7,042	7,299
28	4,645	4,986	5,316	5,635	5,943	6,240	6,527	6,804	7 071	7,329
29	4,665	5,008	5,339	5,659	5,968	6,266	6,554	6,832	7,101	7,360
30	4,686	5,030	5,362	5,683	5,993	6,293	6,582	6,861	7,130	7,390
31	4,706	5,052	5,386	5,708	6,019	6,320	6,610	6,890	7,164	7,321
32	4,727	5,074	5,409	5,733	6,045	6,347	6,638	6,919	7,190	7,452
33	4,748	5,096	5,433	5,758	6,071	6,374	6,665	6,948	7,221	7,484
34	4,769	5,118	5,456	5,783	6,097	6,401	6,695	6,978	7,251	7,515
35	4,790	5,141	5,481	5,808	6,124	6,429	6,724	7,008	7,282	7,547
36	4,812	5,164	5,505	5,833	6,151	6,457	6,753	7,038	7,313	7,579
37	4,833	5,187	5,529	5,859	6,178	6,485	6,782	7,068	7,344	7,611
38	4,855	5,211	5,554	5,885	6,205	6,514	6,811	7,099	7,376	7,644
39	4,877	5,234	5,579	5,911	6,233	6,542	6,841	7,130	7,408	7,676
40	4,900	5,258	5,604	5,938	6,260	6,571	6,871	7,161	7,440	7,709
41	4,922	5,282	5,629	5,964	6,288	6,600	6,901	7,192	7,472	7,743
42	4,945	5,306	5,655	5,991	6,316	6,629	6,932	7,223	7,505	7,776
43	4,968	5,330	5,681	6,018	6,345	6,659	6,963	7,255	7,538	7,800
44	4,991	5,355	5,707	6,046	6,373	6,689	6,994	7,287	7,571	7,844
45	5,014	5,380	5,733	6,074	6,402	6,719	7,025	7,320	7,604	7,879
46	5,037	5,405	5,759	6,102	6,431	6,749	7,056	7,353	7,638	7,913
47	5,061	5,430	5,786	6,130	6,461	6,780	7,088	7,386	7,672	7,948
48	5,085	5,455	5,813	6,158	6,490	6,811	7,120	7,419	7,706	7,984
49	5,109	5,481	5,840	6,186	6,520	6,842	7,152	7,452	7,741	7,919
50	5,133	5,507	5,867	6,215	6,550	6,873	7,185	7,486	7,775	8,055
51	5,158	5,533	5,895	6,244	6.581	6,905	7,218	7,520	7,811	8,091
52	5,183	5,559	5,923	6,273	6,611	6,937	7,251	7,554	7,846	8,128
53	5,208	5,586	5,951	6.303	6,642	6,962	7,285	7,589	7,882	8,165
54	5,233	5,613	5,979	6,333	6,673	7,002	7,318	7,624	7,918	8,202
55	5,258	5,640	6,008	6,363	6,705	7,035	7,353	7,659	7,954	8,239
56	5,284	5,667	6,037	6,393	6,737	7,068	7,387	7,694	7,991	8,277
57	5,310	5,695	6,066	6,424	6,769	7,101	7,422	7,730	8,028	8,315
58	5,336	5,723	6,095	6,455	6,801	7,135	7,456	7,766	8,065	8,353
59	5,363	5,751	6,125	6,486	6,834	7,169	7,492	7,803	8,103	8,392
87° 0′	5,389	5,779	6,155	6,517	6,867	7,203	7,529	7,840	8,141	8,431

Segue Tavola I.

H / z	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
87° 0′	0,585	1,149	1,693	2,217	2,722	3,208	3,677	4,129	4,565	4,985
1	0,589	1,156	1,702	2,228	2,736	3,225	3,696	4,150	4,588	5,010
2	0,592	1,162	1,711	2,241	2,751	3,242	3,715	4,172	4,611	5,035
3	0,595	1,168	1,720	2,253	2,765	3,259	3,735	4,193	4,635	5,061
4	0,598	1,175	1,730	2,265	2,780	3,276	3,754	4,215	4,659	5,087
5	0,602	1,182	1,740	2,277	2,795	3,293	3,774	4,237	4,683	5,113
6	0,605	1,188	1,749	2,290	2,810	3,311	3,794	4,259	4,707	5,139
7	0,609	1,195	1,759	2,302	2,826	3,329	3,815	4,282	4,732	5,166
8	0,612	1,202	1,769	2,315	2,841	3,347	3,835	4,305	4,757	5,193
9	0,616	1,208	1,779	2,328	2,857	3,366	3,856	4,328	4,782	5,220
10	0,619	1,215	1,789	2,341	2,873	3,384	3,877	4,351	4,808	5,247
11	0,623	1,222	1,799	2,354	2,889	3,403	3,898	4,374	4,833	5,275
12	0,627	1,229	1,809	2,367	2,905	3,422	3,919	4,398	4,859	5,303
13	0,631	1,237	1,820	2,381	2,921	3,441	3,941	4,422	4,885	5,331
14	0,634	1,244	1,830	2,394	2,937	3,460	3,962	4,446	4,912	5,360
15	0,638	1,251	1,841	2,408	2,954	3,479	3,984	4,471	4,938	5,389
16	0,642	1,259	1,852	2,422	2,971	3,499	4,007	4,495	4,965	5,418
17	0,646	1,266	1,863	2,436	2,988	3,519	4,029	4,520	4,993	5,447
18	0,649	1,274	1,874	2,451	3,005	3,539	4,052	4,546	5,020	5,477
19	0,653	1,281	1,885	2,465	3,023	3,559	4,075	4,571	5,048	5,507
20	0,657	1,289	1,896	2,480	3,041	3,580	4,098	4,597	5,076	5,538
21	0,662	1,297	1,908	2,494	3,058	3,601	4,122	4,623	5,105	5,568
22	0,666	1,305	1,919	2,509	3,077	3,622	4,145	4,649	5,134	5,599
23	0,670	1,313	1,931	2,524	3,095	3,643	4,170	4,675	5,163	5,631
24	0,674	1,321	1,943	2,540	3,113	3,664	4,194	4,703	5,192	5,662
25	0,678	1,330	1,955	2,555	3,132	3,686	4,218	4,730	5,222	5,694
26	0,683	1,338	1,967	2,571	3,151	3,708	4,243	4,758	5,252	5,727
27	0,687	1,347	1,979	2,587	3,170	3,730	4,268	4,785	5,282	5,759
28	0,691	1,355	1,992	2,602	3,189	3,752	4,294	4,813	5,313	5,792
29	0,696	1,364	2,004	2,619	3,209	3,775	4,319	4,841	5,344	5,826
30	0,701	1,372	2,017	2,635	3,229	3,798	4,345	4,870	5,375	5,859
31	0,705	1,381	2,030	2,652	3,249	3,821	4,371	4,900	5,407	5,894
32	0,710	1,390	2,043	2,669	3,269	3,845	4,398	4,929	5,439	5,928
33	0,715	1,400	2,056	2,686	3,289	3,869	4,425	4,959	5,471	5,963
34	0,719	1,409	2,070	2,703	3,310	3,893	4,452	4,989	5,504	5,998
35	0,724	1,418	2,083	2,720	3,331	3,918	4,480	5,019	5,537	6,034
36	0,729	1,428	2,097	2,738	3,353	3,942	4,508	5,050	5,571	6,070
37	0,734	1,437	2,111	2,756	3,374	3,967	4,536	5,081	5,604	6,107
38	0,739	1,447	2,125	2,774	3,396	3,992	4,564	5,113	5,639	6,143
39	0,744	1,457	2,139	2,792	3,418	4,018	4,593	5,144	5,674	6,181
40	0,750	1,467	2,154	2,811	3,441	4,044	4,622	5,177	5,709	6,219
41	0,755	1,477	2,168	2,830	3,463	4,070	4,652	5,210	5,744	6,257
42	0,760	1,487	2,183	2,840	3,486	4,097	4,682	5,243	5,780	6,295
43	0,766	1,498	2,198	2,869	3,510	4,124	4,712	5,276	5,816	6,334
44	0,771	1,508	2,213	2,888	3,533	4,151	4,743	5,310	5,853	6,374
45	0,777	1,519	2,229	2,907	3,557	4,178	4,774	5,344	5,890	6,414
46	0,782	1,530	2,244	2,927	3,581	4,206	4,805	5,378	5,928	6,454
47	0,788	1,541	2,260	2,948	3,606	4,235	4,837	5,414	5,966	6,495
48	0,794	1,552	2,276	2,969	3,630	4,263	4,869	5,449	6,005	6,536
49	0,800	1,564	2,293	2,990	3,656	4,293	4,902	5,485	6,044	6,578
50	0,806	1,575	2,309	3,011	3,681	4,322	4,935	5,522	6,083	6,621
51	0,812	1,587	2,326	3,032	3,707	4,352	4,968	5,558	6,123	6,664
52	0,818	1,599	2,343	3,054	3,733	4,382	5,002	5,595	6,163	6,707
53	0,825	1,611	2,361	3,076	3,759	4,412	5,036	5,633	6,204	6,751
54	0,831	1,623	2,378	3,098	3,786	4,443	5,071	5,671	6,246	6,795
55	0,838	1,636	2,396	3,121	3,814	4,475	5,106	5,710	6,288	6,840
56	0,844	1,648	2,414	3,144	3,841	4,507	5,142	5,749	6,330	6,886
57	0,851	1,661	2,432	3,168	3,869	4,539	5,178	5,789	6,374	6,932
58	0,658	1,674	2,451	3,191	3,898	4,572	5,215	5,830	6,417	6,979
59	0,865	1,687	2,469	3,216	3,927	4,605	5,252	5,870	6,461	7,026
88° 0′	0,872	1,700	2,489	3,240	3,956	4,638	5,290	5,911	6,506	7,074

H / z	2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
87° 0′	5,389	5,779	6,155	6,517	6,867	7,203	7,527	7,840	8,141	8,431
1	5,416	5,808	6,186	6,549	6,900	7,238	7,563	7,877	8,179	8,470
2	5,443	5,837	6,216	6,581	6,933	7,273	7,600	7,914	8,218	8,510
3	5,471	5,866	6,247	6,614	6,967	7,308	7,636	7,952	8,257	8,550
4	5,499	5,895	6,278	6,646	7,001	7,343	7,673	7,990	8,296	8,590
5	5,527	5,925	6,309	6,679	7,036	7,379	7,710	8,029	8,335	8,631
6	5,555	5,955	6,341	6,712	7,071	7,415	7,747	8,067	8,375	8,672
7	5,583	5,986	6,373	6,746	7,106	7,452	7,785	8,106	8,416	8,714
8	5,612	6,016	6,405	6,780	7,141	7,489	7,824	8,146	8,457	8,756
9	5,641	6,047	6,438	6,814	7,177	7,526	7,862	8,186	8,498	8,798
10	5,671	6,078	6,471	6,849	7,213	7,564	7,901	8,226	8,539	8,840
11	5,700	6,110	6,504	6,884	7,249	7,602	7,940	8,267	8,581	8,883
12	5,730	6,142	6,538	6,919	7,286	7,640	7,980	8,308	8,623	8,927
13	5,760	6,174	6,572	6,954	7,323	7,678	8,020	8,349	8,665	8,970
14	5,791	6,206	6,606	7,090	7,361	7,717	8,060	8,390	8,708	9,014
15	5,822	6,239	6,640	7,127	7,399	7,756	8,101	8,432	8,752	9,059
16	5,853	6,272	6,675	7,063	7,437	7,796	8,142	8,475	8,796	9,104
17	5,885	6,306	6,711	7,100	7,475	7,836	8,184	8,518	8,840	9,149
18	5,917	6,339	6,746	7,138	7,514	7,877	8,216	8,561	8,884	9,195
19	5,949	6,373	6,782	7,175	7,554	7,918	8,258	8,605	8,929	9,241
20	5,981	6,408	6,818	7,213	7,593	7,959	8,311	8,649	8,975	9,288
21	6,014	6,443	6,855	7,252	7,633	8,000	8,354	8,694	9,020	9,335
22	6,047	6,478	6,892	7,291	7,674	8,043	8,397	8,739	9,066	9,382
23	6,081	6,513	6,929	7,330	7,715	8,085	8,441	8,784	9,113	9,430
24	6,115	6,549	6,967	7,370	7,756	8,128	8,486	8,830	9,160	9,479
25	6,149	6,586	7,006	7,410	7,798	8,171	8,530	8,876	9,208	9,528
26	6,183	6,622	7,044	7,450	7,840	8,215	8,576	8,923	9,256	9,577
27	6,218	6,659	7,083	7,491	7,882	8,259	8,621	8,970	9,304	9,626
28	6,253	6,696	7,122	7,532	7,925	8,304	8,667	9,017	9,353	9,677
29	6,289	6,734	7,162	7,573	7,969	8,349	8,714	9,065	9,402	9,727
30	6,325	6,772	7,202	7,615	8,012	8,394	8,761	9,113	9,452	9,778
31	6,361	6,811	7,243	7,658	8,076	8,440	8,808	9,162	9,503	9,830
32	6,398	6,850	7,284	7,701	8,101	8,486	8,856	9,212	9,554	9,882
33	6,436	6,889	7,325	7,744	8,146	8,533	8,905	9,262	9,605	9,935
34	6,473	6,929	7,367	7,788	8,192	8,581	8,954	9,312	9,657	9,988
35	6,511	6,970	7,410	7,832	8,238	8,628	9,003	9,363	9,709	10,041
36	6,550	7,010	7,452	7,877	8,285	8,677	9,053	9,414	9,762	10,095
37	6,589	7,051	7,496	7,922	8,332	8,725	9,103	9,466	9,815	10,150
38	6,628	7,093	7,539	7,968	8,379	8,774	9,154	9,519	9,869	10,205
39	6,668	7,135	7,583	8,014	8,427	8,824	9,206	9,572	9,923	10,261
40	6,708	7,177	7,628	8,061	8,476	8,875	9,258	9,625	9,978	10,317
41	6,749	7,220	7,673	8,108	8,525	8,926	9,310	9,679	10,034	10,374
42	6,790	7,264	7,719	8,156	8,575	8,977	9,363	9,734	10,090	10,432
43	6,831	7,308	7,765	8,204	8,625	9,029	9,417	9,789	10,146	10,490
44	6,873	7,352	7,812	8,252	8,675	9,081	9,471	9,845	10,203	10,548
45	6,916	7,397	7,859	8,302	8,726	9,134	9,525	9,901	10,261	10,607
46	6,959	7,442	7,906	8,351	8,778	9,187	9,580	9,958	10,319	10,667
47	7,002	7,488	7,954	8,402	8,830	9,241	9,636	10,015	10,378	10,727
48	7,046	7,535	8,003	8,453	8,883	9,296	9,693	10,073	10,438	10,788
49	7,091	7,582	8,053	8,504	8,936	9,352	9,750	10,132	10,498	10,850
50	7,136	7,630	8,103	8,556	8,991	9,408	9,808	10,191	10,559	10,912
51	7,182	7,678	8,153	8,608	9,045	9,464	9,866	10,251	10,620	10,975
52	7,228	7,726	8,204	8,661	9,100	9,521	9,924	10,311	10,682	11,038
53	7,274	7,775	8,255	8,715	9,156	9,579	9,984	10,372	10,745	11,102
54	7,321	7,825	8,307	8,769	9,212	9,637	10,044	10,434	10,808	11,167
55	7,369	7,875	8,360	8,824	9,269	9,696	10,105	10,496	10,872	11,232
56	7,418	7,926	8,413	8,880	9,327	9,755	10,166	10,560	10,937	11,298
57	7,467	7,978	8,467	8,936	9,386	9,816	10,228	10,623	11,002	11,365
58	7,516	8,030	8,522	8,993	9,445	9,877	10,291	10,688	11,068	11,433
59	7,566	8,083	8,577	9,051	9,504	9,938	10,354	10,753	11,135	11,501
88° 0′	7,617	8,136	8,633	9,109	9,564	10,000	10,418	10,818	11,202	11,570

Segue Tavola I.

H / z	100m	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
88° 0′	0,354	0,700	1,041	1,374	1,700	2,021	2,334	2,642	2,944	3,240
1	0,357	0,706	1,049	1,385	1,714	2,037	2,353	2,663	2,967	3,265
2	0,360	0,712	1,058	1,396	1,728	2,053	2,371	2,683	2,990	3,290
3	0,363	0,718	1,067	1,408	1,742	2,069	2,390	2,705	3,013	3,315
4	0,366	0,724	1,075	1,419	1,756	2,086	2,409	2,726	3,037	3,341
5	0,369	0,731	1,084	1,431	1,770	2,103	2,429	2,748	3,061	3,367
6	0,372	0,737	1,094	1,443	1,785	2,120	2,449	2,770	3,085	3,394
7	0,376	0,743	1,103	1,455	1,800	2,138	2,469	2,792	3,110	3,421
8	0,379	0,750	1,113	1,468	1,815	2,156	2,489	2,815	3,135	3,448
9	0,382	0,756	1,122	1,480	1,831	2,174	2,510	2,839	3,161	3,476
10	0,386	0,763	1,132	1,493	1,846	2,192	2,531	2,862	3,187	3,505
11	0,389	0,770	1,142	1,506	1,862	2,211	2,552	2,886	3,213	3,534
12	0,393	0,777	1,152	1,519	1,879	2,230	2,574	2,911	3,240	3,563
13	0,397	0,784	1,163	1,533	1,895	2,249	2,596	2,935	3,267	3,593
14	0.400	0,791	1,173	1,547	1,912	2,269	2,619	2,961	3,295	3,623
15	0,404	0,798	1,184	1,561	1,929	2,289	2.641	2,986	3,323	3,653
16	0,408	0,806	1,195	1,575	1,946	2,310	2,665	3,012	3,352	3,684
17	0,412	0,814	1,206	1,589	1,964	2,330	2,688	3,039	3,381	3,716
18	0,416	0,821	1,217	1,604	1,982	2,351	2,712	3,065	3,411	3,748
19	0,420	0,829	1.229	1,619	2,000	2,373	2,737	3,093	3,441	3,781
20	0,424	0,837	1,241	1,635	2,019	2,395	2,762	3,121	3,471	3,814
21	0,428	0,845	1,253	1,650	2,038	2,417	2,787	3,149	3,502	3,848
22	0,433	0,854	1,265	1,666	2,058	2,440	2,813	3,178	3,534	3,882
23	0,437	0,862	1,277	1,682	2,077	2,463	2,839	3,207	3,566	3,917
24	0,441	0,871	1,290	1,699	2,097	2,486	2,866	3,237	3,599	3,953
25	0,446	0,880	1.303	1,715	2,118	2,510	2,893	3,267	3,632	3,989
26	0,450	0,889	1.316	1,732	2,139	2,534	2,921	3,298	3,666	4,026
27	0,455	0,898	1,330	1,750	2,160	2,559	2,949	3,329	3,700	4,063
28	0,460	0,908	1,344	1,768	2,182	2,585	2,978	3,361	3,735	4,101
29	0,465	0,917	1,358	1,786	2,204	2,610	3,007	3,394	3,771	4,140
30	0,470	0,927	1,372	1,805	2,226	2,637	3,037	3,427	3,808	4,179
31	0,475	0,937	1,386	1,824	2,249	2,663	3,067	3,461	3,845	4,219
32	0,481	0,947	1,401	1,843	2,272	2,691	3,098	3,495	3,882	4,260
33	0,486	0,958	1,417	1,863	2,296	2,719	3,130	3,530	3,921	4,301
34	0,491	0,969	1,432	1,883	2,321	2,747	3,162	3,566	3,960	4,344
35	0,497	0,980	1,448	1,903	2,346	2,776	3,195	3,602	4,000	4,387
36	0,503	0,991	1,464	1,924	2,371	2,805	3,228	3,639	4,040	4,431
37	0,509	1,002	1,481	1,945	2,397	2,835	3,262	3,677	4,082	4,475
38	0.515	1,014	1.498	1,967	2,423	2,866	3,297	3,715	4,124	4,521
39	0,521	1,026	1,515	1,990	2,450	2,898	3,332	3,755	4 167	4,567
40	0,528	1,038	1,533	2,013	2,478	2,930	3,369	3,795	4,210	4,614
41	0,534	1,051	1,551	2,036	2,506	2,962	3,406	3,836	4 255	4,663
42	0,541	1,064	1,570	2,060	2,535	2.996	3,443	3,878	4,301	4,712
43	0,548	1,077	1,589	2,084	2,564	3,030	3,482	3,921	4,347	4,762
44	0,555	1,090	1,608	2,109	2,594	3,065	3,521	3,964	4,394	4,813
45	0,562	1,104	1,628	2,135	2,625	3,101	3,561	4,008	4,443	4,865
46	0,569	1,118	1,648	2,161	2.657	3,137	3,602	4,054	4,492	4,918
47	0,577	1,133	1,669	2,188	2.690	3,174	3,644	4,100	4,542	4,972
48	0,585	1,148	1,691	2,215	2,724	3,212	3,687	4,147	4,594	5,027
49	0,593	1,163	1,713	2,243	2,757	3,251	3,731	4,195	4,646	5,083
50	0.601	1,179	1,735	2,272	2,790	3,291	3,775	4,245	4,699	5,141
51	0,609	1,195	1,758	2.301	2,825	3,331	3,821	4,295	4,754	5,199
52	0,618	1,211	1,782	2,331	2,862	3,373	3,862	4,346	4,810	5,259
53	0,627	1,228	1,806	2,362	2,899	3,416	3,915	4,399	4,867	5,320
54	0,636	1,246	1,831	2,394	2,937	3,459	3,964	4,452	4,925	5,382
55	0,645	1,264	1,857	2,427	2,975	3,504	4,014	4,507	4,984	5,446
56	0.655	1,282	1,883	2,460	3,015	3,550	4,066	4,563	5,045	5,511
57	0,665	1,301	1,910	2,494	3,056	3,597	4,118	4,621	5,107	5,577
58	0,675	1,321	1,938	2,529	3,098	3,645	4,171	4,680	5,171	5,645
59	0,686	1,341	1,967	2,566	3,141	3,694	4,226	4,740	5,235	5,714
89°0′	0,697	1,362	1,996	2,603	3,185	3,744	4,282	4.801	5,302	5,785

H / z	1100m	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
88° 0'	3,580	3,815	4,095	4,369	4,638	4,902	5,162	5,416	5,666	5,912
1	3,557	3,844	4,125	4,401	4,672	4,938	5,199	5,455	5,706	5,953
2	3,584	3,873	4,156	4,434	4,707	4,974	5,237	5,494	5,747	5,996
3	3,612	3,902	4,187	4,467	4,742	5,011	5,275	5,534	5,789	6,039
4	3,640	3,932	4,219	4,501	4,777	5,048	5,314	5,575	5,831	6,082
5	3,668	3,963	4,252	4,535	4,813	5,086	5,353	5,616	5,873	6,126
6	3,697	3,994	4,285	4,570	4,850	5,124	5,393	5,658	5,916	6,171
7	3,726	4,025	4,318	4,605	4,887	5,163	5,434	5,700	5,960	6,216
8	3,756	4,057	4,352	4,641	4,924	5,202	5,475	5,742	6,005	6,262
9	3,786	4,089	4,386	4,677	4,962	5,242	5,516	5,786	6,050	6,309
10	3,816	4,121	4,430	4,714	5,001	5,283	5,559	5,830	6,095	6,356
11	3,847	4,155	4,456	4,751	5,040	5,324	5,602	5,874	6,141	6,403
12	3,879	4,188	4,492	4,789	5,080	5,365	5,645	5,919	6,188	6,452
13	3,911	4,222	4,528	4,827	5,120	5,407	5,689	5,965	6,236	6,501
14	3,943	4,257	4,565	4,866	5,161	5,450	5,734	6,012	6,284	6,551
15	3,976	4,292	4,602	4,906	5,203	5,494	5,779	6,059	6,333	6,601
16	4,010	4,328	4,640	4,916	5,245	5,538	5,825	6,107	6,382	6,653
17	4,044	4,365	4,679	4,987	5,288	5,583	5 872	6,155	6,433	6,705
18	4,079	4,402	4,718	5,028	5,331	5,628	5,919	6,204	6,484	6,757
19	4,114	4,439	4,758	5,070	5,375	5,674	5,967	6,254	6,535	6,811
20	4,149	4,477	4,799	5,113	5,420	5,721	6,016	6,305	6,588	6,865
21	4,186	4,516	4,840	5,156	5,466	5,769	6,066	6,356	6,641	6,920
22	4,223	4,556	4,881	5,200	5,512	5,817	6,116	6,408	6,695	6,976
23	4,260	4,596	4,924	5,245	5,559	5,866	6,167	6,461	6,750	7,032
24	4,298	4,636	4,967	5,290	5,607	5,916	6,219	6,515	6,806	7,090
25	4,337	4,678	5,011	5,336	5,655	5,967	6,272	6,570	6,862	7,148
26	4,377	4,720	5,055	5,383	5,704	6,018	6,325	6,625	6,919	7,207
27	4,417	4,763	5,101	5,431	5,754	6,070	6,379	6,681	6,977	7,267
28	4,458	4,806	5,147	5,479	5,805	6,123	6,434	6,739	7,036	7,328
29	4,499	4,850	5,193	5,529	5,857	6,177	6,490	6,797	7,096	7,390
30	4,541	4,895	5,241	5,579	5,909	6,232	6,547	6,855	7,157	7,452
31	4,584	4,941	5,289	5,630	5,962	6,287	6,604	6,915	7,219	7,516
32	4,628	4,988	5,339	5,681	6,016	6,343	6,663	6,976	7,282	7,581
33	4,673	5,035	5,389	5,734	6,071	6,401	6,723	7,038	7,345	7,647
34	4,718	5,083	5,440	5,787	6,127	6,459	6,783	7,100	7,410	7,713
35	4,764	5,132	5,491	5,842	6,184	6,518	6,845	7,164	7,476	7,781
36	4,811	5,182	5,544	5,897	6,242	6,579	6,907	7,229	7,543	7,849
37	4,859	5,233	5,598	5,954	6,301	6,640	6,971	7,294	7,610	7,919
38	4,908	5,285	5,652	6,011	6,361	6,702	7,036	7,361	7,679	7,990
39	4,957	5,337	5,708	6,069	6,421	6,765	7,101	7,429	7,749	8,062
40	5,008	5,391	5,764	6,128	6,483	6,830	7,168	7,498	7,820	8,135
41	5,059	5,445	5,822	6,189	6,546	6,895	7,236	7,568	7,893	8,210
42	5,112	5,501	5,880	6,250	6,610	6,962	7,305	7,639	7,966	8,285
43	5,165	5,558	5,940	6,312	6,675	7,029	7,375	7,712	8,041	8,362
44	5,219	5,615	6,001	6,376	6,742	7 098	7,446	7,785	8,117	8,440
45	5,275	5,674	6,063	6,441	6,809	7,168	7,519	7,860	8,194	8,519
46	5,332	5,734	6,126	6,507	6,878	7,240	7,592	7,936	8,272	8,599
47	5,389	5,795	6,190	6,574	6,948	7,312	7,667	8,014	8,351	8,681
48	5,448	5,857	6,255	6,642	7,019	7,386	7,744	8,092	8,432	8,764
49	5,508	5,920	6,321	6,712	7,091	7,461	7,821	8,172	8,515	8,848
50	5,569	5,985	6,389	6,783	7,165	7,537	7,900	8,254	8,598	8,934
51	5,631	6,051	6,458	6,855	7,240	7,615	7,981	8,337	8,683	9,021
52	5,695	6,117	6,529	6,928	7,317	7,694	8,062	8,421	8,770	9,110
53	5,760	6,186	6,601	7,003	7,394	7,775	8,146	8,506	8,858	9,200
54	5,826	6,256	6,674	7,079	7,474	7,857	8,230	8,593	8,947	9,292
55	5,893	6,327	6,748	7,157	7,554	7,940	8,316	8,682	9,038	9,385
56	5,962	6,400	6,824	7,236	7,637	8,026	8,404	8,772	9,131	9,480
57	6,033	6,474	6,902	7,317	7,720	8,112	8,493	8,864	9,225	9,576
58	6,104	6,549	6,981	7,399	7,806	8,200	8,584	8,957	9,321	9,674
59	6,178	6,626	7,061	7,483	7,893	8,290	8,677	9,052	9,418	9,774
89° 0'	6,253	6,705	7,143	7,569	7,981	8,382	8,771	9,149	9,517	9,875

Segue Tavola I.

H / z	2100m	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000
88° 0′	6,152	6,389	6,621	6,850	7,074	7,294	7,510	7,722	7,931	8,136
1	6,196	6,434	6,667	6,897	7,122	7,343	7,561	7,774	7,984	8,190
2	6,240	6,479	6,714	6,944	7,171	7,393	7,612	7,827	8,037	8,245
3	6,284	6,524	6,761	6,993	7,221	7,444	7,664	7,880	8,092	8,300
4	6,329	6,571	6,809	7,042	7,271	7,496	7,717	7,934	8,147	8,356
5	6,374	6,618	6,857	7,092	7,322	7,548	7,770	7,988	8,202	8,413
6	6,420	6,665	6,906	7,142	7,373	7,601	7,824	8,043	8,259	8,470
7	6,467	6,713	6,955	7,193	7,425	7,654	7,879	8,099	8,316	8,528
8	6,515	6,762	7,006	7,244	7,478	7,708	7,934	8,156	8,373	8,587
9	6,563	6,812	7,057	7,296	7,532	7,763	7,990	8,213	8,432	8,646
10	6,611	6,862	7,108	7,349	7,586	7,819	8,047	8,271	8,491	8,706
11	6,661	6,913	7,160	7,403	7,641	7,875	8,104	8,329	8,550	8,767
12	6,711	6,964	7,213	7,457	7,697	7,932	8,162	8,389	8,611	8,829
13	6,761	7,016	7,267	7,512	7,753	7,990	8,221	8,449	8,673	8,892
14	6,813	7,069	7,321	7,568	7,810	8,048	8,281	8,510	8,735	8,955
15	6,865	7,123	7,376	7,625	7,868	8,107	8,342	8,572	8,798	9,019
16	6,918	7,177	7,432	7,682	7,927	8,167	8,403	8,634	8,861	9,084
17	6,971	7,232	7,489	7,740	7,986	8,228	8,465	8,698	8,926	9,150
18	7,025	7,288	7,546	7,799	8,047	8,290	8,528	8,762	8,991	9,216
19	7,081	7,345	7,604	7,859	8,108	8,352	8,592	8,827	9,058	9,284
20	7,137	7,403	7,663	7,919	8,170	8,415	8,656	8,893	9,125	9,352
21	7,193	7,461	7,723	7,980	8,232	8,480	8,722	8,960	9,193	9,421
22	7,251	7,520	7,784	8,043	8,296	8,545	8,788	9,027	9,261	9,491
23	7,309	7,580	7,845	8,106	8,360	8,611	8,855	9,096	9,331	9,562
24	7,368	7,641	7,908	8,169	8,426	8,677	8,924	9,165	9,402	9,634
25	7,428	7,702	7,971	8,234	8,493	8,745	8,993	9,236	9,474	9,707
26	7,489	7,765	8,035	8,300	8,559	8,814	9,063	9,307	9,546	9,780
27	7,551	7,828	8,100	8,366	8,627	8,883	9,133	9,379	9,620	9,856
28	7,613	7,893	8,166	8,434	8,696	8,954	9,205	9,452	9,694	9,931
29	7,677	7,958	8,233	8,503	8,767	9,025	9,278	9,527	9,770	10,008
30	7,741	8,024	8,301	8,572	8,838	9,098	9,352	9,602	9,846	10,086
31	7,807	8,091	8,370	8,643	8,910	9,171	9,427	9,678	9,924	10,165
32	7,873	8,160	8,440	8,715	8,983	9,246	9,503	9,755	10,003	10,245
33	7,941	8,229	8,511	8,787	9,057	9,321	9,580	9,834	10,082	10,326
34	8,009	8,299	8,583	8,860	9,132	9,398	9,658	9,913	10,163	10,408
35	8,079	8,370	8,656	8,935	9,208	9,476	9,737	9,994	10,245	10,491
36	8,150	8,443	8,730	9,011	9,286	9,555	9,818	10,076	10,328	10,575
37	8,221	8,517	8,805	9,088	9,364	9,635	9,899	10,159	10,412	10,661
38	8,294	8,591	8,882	9,166	9,444	9,716	9,982	10,243	10,498	10,648
39	8,368	8,667	8,959	9,245	9,524	9,798	10,066	10,328	10,584	10,835
40	8,443	8,744	9,038	9,325	9,606	9,882	10,151	10,414	10,672	10,924
41	8,519	8,822	9,118	9,407	9,690	9,966	10,237	10,502	10,761	11,015
42	8,597	8,901	9,199	9,490	9,774	10,052	10,324	10,591	10,851	11,106
43	8,675	8,982	9,281	9,574	9,860	10,139	10,413	10,681	10,943	11,199
44	8,755	9,063	9,365	9,659	9,947	10,228	10,503	10,772	11,036	11,293
45	8,836	9,146	9,450	9,746	10,035	10,318	10,594	10,865	11,130	11,389
46	8,919	9,231	9,536	9,834	10,124	10,409	10,687	10,959	11,225	11,486
47	9,002	9,316	9,623	9,923	10,215	10,501	10,781	11,054	11,322	11,584
48	9,088	9,403	9,712	10,013	10,308	10,595	10,876	11,151	11,420	11,683
49	9,174	9,492	9,802	10,105	10,401	10,691	10,973	11,250	11,520	11,784
50	9,262	9,582	9,894	10,199	10,496	10,787	11,071	11,349	11,621	11,887
51	9,351	9,673	9,987	10,293	10,593	10,885	11,171	11,450	11,723	11,990
52	9,442	9,766	10,082	10,390	10,691	10,985	11,272	11,553	11,827	12,096
53	9,534	9,860	10,178	10,488	10,790	11,086	11,375	11,657	11,933	12,203
54	9,628	9,955	10,275	10,587	10,891	11,189	11,479	11,763	12,040	12,311
55	9,723	10,053	10,374	10,688	10,994	11,293	11,585	11,870	12,148	12,421
56	9,820	10,152	10,475	10,791	11,098	11,399	11,692	11,979	12,259	12,532
57	9,919	10,252	10,577	10,895	11,204	11,506	11,801	12,089	12,371	12,646
58	10,019	10,354	10,681	11,000	11,312	11,615	11,912	12,201	12,484	12,760
59	10,121	10,458	10,787	11,108	11,421	11,726	12,024	12,315	12,599	12,877
89° 0′	10,224	10,563	10,891	11,217	11,532	11,839	12,138	12,430	12,716	12,995

H / z	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000
88° 0′	8,337	8,535	8,730	8,921	9,109	9,293	9,475	9,653	9,828	10,000
1	8,392	8,591	8,786	8,979	9,168	9,353	9,535	9,714	9,890	10,063
2	8,448	8.648	8,844	9,037	9,227	9,413	9,596	9,776	9,953	10,127
3	8,504	8,705	8,903	9,097	9,287	9,474	9,658	9,839	10,017	10,191
4	8,561	8,763	8,962	9,157	9,348	9,536	9,721	9,903	10,081	10,256
5	8,619	8,822	9,021	9,217	9,410	9,599	9,784	9.967	10,146	10,322
6	8,678	8,881	9,082	9,279	9,472	9,662	9,848	10,032	10,212	10,388
7	8,737	8,942	9,143	9,341	9,535	9,726	9,913	10,097	10,278	10,456
8	8,797	9,003	9,205	9,404	9,599	9,790	9,979	10,164	10,345	10,524
9	8,857	9,064	9,267	9,467	9,663	9,856	10,045	10,231	10,413	10,593
10	8,918	9,126	9,331	9,532	9,728	9,922	10,112	10,299	10,482	10,662
11	8,980	9,190	9,395	9,597	9,794	9,989	10,180	10,367	10,552	10,733
12	9,043	9,254	9,460	9,663	9,861	10,057	10,249	10,437	10,622	10,804
13	9,107	9,318	9,526	9,729	9,929	10,125	10,318	10,508	10,693	10,876
14	9,171	9,384	9,592	9,797	9,997	10,195	10,388	10,579	10,765	10,949
15	9,236	9,450	9,659	9,865	10,067	10,265	10,460	10,651	10,838	11,023
16	9,303	9,517	9,728	9,934	10,137	10,336	10,532	10,724	10,912	11,097
17	9,369	9,585	9,797	10,004	10,208	10,408	10,605	10,797	10,987	11,173
18	9,437	9,654	9,866	10,075	10,280	10,481	10,678	10,872	11,062	11,249
19	9,506	9,723	9,937	10,147	10,353	10,555	10,753	10,948	11,139	11,326
20	9,575	9,794	10,009	10,219	10,426	10,629	10,829	11,024	11,216	11,404
21	9,646	9,865	10,081	10,293	10,501	10,705	10,905	11,101	11,294	11,484
22	9,717	9,938	10,155	10,368	10,576	10,781	10,983	11,180	11.373	11,564
23	9,789	10,011	10,229	10,443	10,652	10,859	11,061	11,259	11,454	11,645
24	9,862	10,085	10,304	10,519	10,730	10,937	11,140	11,339	11,535	11,727
25	9,936	10,160	10,381	10,597	10,809	11,016	11,220	11,420	11,617	11,810
26	10,011	10,237	10,458	10,675	10,888	11,097	11,301	11,503	11,700	11,894
27	10,087	10,314	10,536	10,754	10,968	11,178	11,384	11,586	11.784	11,978
28	10,164	10,392	10,615	10,834	11,049	11,260	11,467	11,670	11,869	12,064
29	10,242	10,471	10,696	10,916	11,132	11,344	11,551	11,755	11,955	12,151
30	10,321	10,551	10,777	10,998	11,215	11,428	11,637	11,842	12,042	12,239
31	10.401	10,632	10,859	11,081	11,300	11,513	11,723	11,929	12,131	12,328
32	10,482	10,715	10,943	11,166	11,385	11,600	11,811	12,017	12,220	12,419
33	10,564	10,798	11,027	11,252	11,472	11,688	11,899	12,107	12,310	12,510
34	10,648	10,882	11,113	11,338	11,560	11.776	11,989	12,198	12.402	12,603
35	10,732	10,968	11,199	11,426	11,649	11,866	12,080	12,289	12,495	12,696
36	10,818	11,055	11,287	11,515	11,739	11,957	12,172	12,382	12,589	12,791
37	10,904	11,143	11,376	11,605	11,830	12,050	12,265	12,477	12,684	12,887
38	10,992	11,232	11,467	11,697	11,922	12.143	12,360	12,572	12,780	12,984
39	11,081	11,322	11,558	11,789	12,016	12,238	12,455	12,669	12,878	13,082
40	11,172	11.414	11,651	11,883	12,111	12,334	12,552	12,766	12,976	13,182
41	11,263	11,507	11,745	11,978	12,207	12,431	12,650	12,865	13.076	13,283
42	11,356	11,601	11,840	12,074	12,304	12,529	12,750	12,966	13,178	13,385
43	11,450	11,696	11,936	12,172	12,403	12,629	12,850	13,067	13,280	13,488
44	11,545	11,792	12,034	12,271	12,503	12,730	12,952	13,170	13,384	13,593
45	11,642	11,890	12,133	12,371	12,604	12,832	13,056	13,275	13,489	13,699
46	11,740	11,990	12,234	12,473	12,707	12,936	13,160	13 380	13,595	13,807
47	11,839	12,090	12,335	12,575	12,811	13,041	13,266	13,487	13 703	13,915
48	11.940	12,192	12,439	12,680	12,916	13,147	13,374	13,595	13,813	14,025
49	12,043	12,296	12,543	12,786	13,023	13,255	13,483	13,705	13,923	14,137
50	12,146	12,401	12,649	12,893	13,131	13,364	13,593	13,816	14,035	14,250
51	12,251	12,507	12,757	13,001	13,241	13,475	13,704	13,929	14,149	14,364
52	12,358	12,615	12,866	13,111	13,352	13,587	13,818	14,043	14,264	14,480
53	12,466	12,724	12,976	13,223	13,465	13,701	13,932	14,159	14,381	14,598
54	12,576	12,835	13,098	13,336	13,579	13,816	14.048	14,276	14,499	14,717
55	12,687	12,947	13,202	13,451	13,694	13,933	14,166	14,395	14,618	14,837
56	12,800	13,061	13,317	13,567	13,812	14,051	14,285	14,515	14,739	14,959
57	12,914	13,177	13,434	13,685	13,931	14,171	14,406	14,637	14,862	15,083
58	13,030	13,294	13,552	13,805	14,051	14,293	14,529	14,760	14,986	15,208
59	13,148	13,413	13,672	13,926	14,174	14,416	14,653	14,885	15,112	15,335
89° 0′	13,267	13,534	13,794	14,049	14,297	14,541	14,779	15,012	15,240	15,463

Segue TAVOLA I.

H / z	4100m	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900	5000
88° 0′	10,170	10,336	10,500	10,660	10,819	10,974	11,127	11,277	11,425	11,570
1	10,233	10,400	10,565	10,726	10,885	11,041	11,194	11,345	11,494	11,640
2	10,298	10,465	10,630	10,793	10,952	11,109	11,263	11,414	11,563	11,710
3	10,368	10,531	10,697	10,860	11,020	11,177	11,332	11,484	11,634	11,781
4	10,429	10,598	10,764	10,928	11,089	11,247	11,402	11,555	11,705	11,852
5	10,495	10,665	10,832	10,997	11,158	11,317	11,473	11,626	11,777	11,925
6	10,562	10,733	10,901	11,066	11,228	11,388	11,544	11,698	11,849	11,998
7	10,630	10,802	10,971	11,136	11,299	11,459	11,616	11,771	11,923	12,072
8	10,699	10,872	11,041	11,207	11,371	11,532	11,689	11,845	11,997	12,147
9	10,769	10,942	11,112	11,279	11,443	11,605	11,763	11,919	12,072	12,223
10	10,839	11,013	11,184	11,352	11,517	11,679	11,838	11,994	12,148	12,299
11	10,911	11,085	11,257	11,426	11,591	11,754	11,914	12,071	12,225	12,377
12	10,983	11,158	11,330	11,500	11,666	11,829	11,990	12,148	12,303	12,455
13	11,056	11,232	11,404	11,575	11,742	11,906	12,067	12,225	12,381	12,534
14	11,129	11,306	11,480	11,651	11,818	11,983	12,145	12,304	12,460	12,614
15	11,204	11,381	11,556	11,727	11,896	12,061	12,224	12,384	12,540	12,695
16	11,279	11,457	11,633	11,805	11,974	12,140	12,304	12,464	12,621	12,776
17	11,355	11,534	11,711	11,884	12,053	12,220	12,384	12,545	12,703	12,859
18	11,432	11,612	11,789	11,963	12,134	12,301	12,466	12,627	12,786	12,942
19	11,510	11,691	11,869	12,043	12,215	12,383	12,548	12,710	12,870	13,027
20	11,589	11,771	11,950	12,125	12,297	12,466	12,632	12,795	12,955	13,112
21	11,669	11,852	12,031	12,207	12,880	12,549	12,716	12,880	13,040	13,198
22	11,750	11,933	12,113	12,290	12,464	12,634	12,801	12,966	13,127	13,285
23	11,832	12,016	12,197	12,374	12,548	12,719	12,887	13,052	13,214	13,373
24	11,915	12,100	12,281	12,459	12,634	12,806	12,975	13,140	13,303	13,463
25	11,999	12,184	12,367	12,545	12,721	12,894	13,063	13,229	13,392	13,553
26	12,083	12,270	12,453	12,633	12,809	12,982	13,152	13,319	13,483	13,644
27	12,169	12,356	12,540	12,721	12,898	13,072	13,242	13,410	13,574	13,736
28	12,256	12,444	12,629	12,810	12,988	13,162	13,334	13,502	13,667	13,829
29	12,344	12,533	12,718	12,900	13,079	13,254	13,426	13,595	13,761	13,923
30	12,433	12,622	12,808	12,992	13,171	13,347	13,519	13,689	13,855	14,019
31	12,523	12,713	12,900	13,084	13,264	13,440	13,614	13,784	13,951	14,115
32	12,614	12,805	12,992	13,177	13,358	13,535	13,709	13,880	13,048	14,213
33	12,706	12,898	13,087	13,272	13,453	13,631	13,806	13,978	14,146	14,311
34	12,799	12,992	13,182	13,367	13,550	13,728	13,904	14,076	14,245	14,411
35	12,894	13,088	13,278	13,464	13,647	13,827	14,003	14,176	14,345	14,512
36	12,990	13,184	13,375	13,562	13,746	13,926	14,103	14,277	14,447	14,614
37	13,086	13,282	13,474	13,661	13,846	14,027	14,204	14,379	14,549	14,717
38	13,184	13,381	13,573	13,762	13,947	14,129	14,307	14,482	14,653	14,822
39	13,283	13,481	13,674	13,863	14,049	14,232	14,411	14,586	14,758	14,927
40	13,384	13,582	13,776	13,966	14,153	14,836	14,516	14,692	14,865	15,034
41	13,486	13,684	13,879	14,070	14,258	14,442	14,622	14,799	14,972	15,143
42	13,589	13,788	13,984	14,176	14,364	14,548	14,729	14,907	15,081	15,252
43	13,693	13,893	14,090	14,282	14,471	14,656	14,838	15,016	15,191	15,362
44	13,798	14,000	14,197	14,390	14,580	14,766	14,948	15,127	15,302	15,474
45	13,905	14,107	14,305	14,499	14,690	14,876	15,059	15,239	15,415	15.588
46	14,013	14,216	14,415	14,610	14,801	14,988	15,172	15,352	15,529	15,702
47	14,123	14,327	14,526	14,722	14,914	15,102	15,286	15,467	15,644	15,818
48	14,234	14,439	14,639	14,835	15,028	15,217	15,402	15,583	15,761	15,936
49	14,347	14,552	14,753	14,950	15,143	15,333	15,519	15,701	15,879	16,055
50	14,460	14,666	14,868	15,066	15,260	15,450	15,637	15,820	15,999	16,175
51	14,576	14,782	14,985	15,184	15,378	15,569	15,756	15,940	16,120	16,296
52	14,692	14,900	15,103	15,303	15,498	15,690	15,878	16,062	16,242	16,419
53	14,811	15,019	15,223	15,423	15,620	15,812	16,000	16,185	16,366	16,544
54	14,930	15,140	15,345	15,545	15,742	15,935	16,124	16,310	16,491	16,670
55	15,052	15,262	15,468	15,669	15,867	16,060	16,250	16,436	16,618	16,797
56	15,175	15,385	15,592	15,794	15,993	16,187	16,377	16,564	16,747	16,926
57	15,299	15,511	15,718	15,921	16,120	16,315	16,506	16,693	16,877	17,057
58	15,425	15,637	15,845	16,049	16,249	16,445	16,636	16,824	17,008	17,189
59	15,553	15,766	15,975	16,179	16,380	16,576	16,768	16,957	17,141	17,323
89° 0′	15,682	15,896	16,106	16,311	16,512	16,709	16,902	17,091	17,276	17,458

TAVOLA II.

Variazioni della distanza zenitale apparente lungo la traiettoria dei raggi luminosi dal mare fino a 5000^m^ di altezza. — Detta z la D.Z. app. di un raggio luminoso al mare e z_{H} la D.Z. del

H / z	250^m^	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
°	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
50	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1.1	1,2	1.4
60	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1.3	1.5	1,7	1,9
65	0,2	0,5	0,7	1,0	1,2	1,3	1,7	1,9	2.1	2,4
70	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2.1	2,4	2,7	3.1
71	0,3	0,7	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2
72	0,3	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,1	3,5
73	0,4	0,8	1,1	1,5	1,8	2,2	2,5	2,9	3,3	3,7
74	0,4	0,8	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1	3,5	3,9
75	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,5	2,9	3,3	3,7	4,1
76	0,4	0,9	1,3	1,8	2,2	2,7	3,1	3,6	4,0	4,5
77	0,5	1,0	1,4	1,9	2,4	2,9	3,3	3,8	4,3	4,8
78	0,5	1,0	1,5	2,1	2,6	3,1	3,6	4,2	4,7	5,3
79	0,6	1,1	1,7	2,3	2,8	3,4	4,0	4,6	5,2	5,8
80	0,6	1,3	1,9	2,5	3,1	3,8	4,4	5,1	5,7	6,3
81	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0
82	0,8	1,6	2,3	3,1	3,9	4,7	5,5	6,3	7,1	7,9
83	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,2	6,3	7,2	8,1	9,0
84	1,0	2,1	3,2	4,2	5,2	6,3	7,3	8,4	9,4	10,5
85,0	1,25	2,50	3,74	4,99	6,24	7,49	8,74	9,99	11,24	12,49
85,1	1,27	2,55	3,82	5,10	6,37	7,65	8,92	10,19	11,46	12,74
85,2	1,30	2,60	3,90	5,20	6,50	7,80	9,10	10,40	11,69	12,99
85,3	1,33	2,65	3,98	5,30	6,63	7,96	9,29	10,61	11,93	12,26
85,4	1,36	2,72	4,07	5,42	6,77	8,13	9,48	10,83	12,18	13,53
85,5	1,39	2,78	4,16	5,54	6,92	8,31	9,69	11,07	12,44	13,82
85,6	1,42	2,84	4,25	5,66	7,07	8,49	9,90	11,31	12,71	14,12
85,7	1,45	2,90	4,34	5,79	7,23	8,68	10,12	11,56	12,99	14,43
85,8	1,48	2,97	4,45	5,93	7,40	8,88	10,35	11,82	13,29	14,76
85,9	1,52	3,04	4,56	6,07	7,58	9,09	10,60	12,10	13,60	15,10
86,0	1,56	3,12	4,67	6,22	7,77	9,31	10,85	12,39	13,92	15,46
86,1	1,60	3,20	4,79	6,38	7,96	9,54	11,12	12,69	14,26	15,83
86,2	1,64	3,28	4,91	6,54	8,16	9,78	11,40	13,01	14,61	16,21
86,3	1,69	3,37	5,04	6,71	8,38	10,04	11,69	13,34	14,98	16,62
86,4	1,73	3,46	5,17	6,89	8,60	10,30	12,00	13,69	15,38	17,06
86,5	1,78	3,56	5,32	7,08	8,83	10,58	12,32	14,06	15,79	17,51
86,6	1,83	3,66	5,47	7,28	9,08	10,87	12,66	14,44	16,22	17,99
86,7	1,89	3,77	5,64	7,50	9,35	11,19	13,03	14,86	16,67	18,48
86,8	1,95	3,89	5,81	7,72	9,63	11,53	13,41	15,29	17,15	19,01
86,9	2,01	4,01	5,99	7,97	9,93	11,88	13,81	15 74	17,66	19,57
87,0	2,07	4,13	6,18	8,22	10,24	12,25	14,24	16,22	18,19	20,15
87,1	2,14	4,27	6,39	8,49	10,57	12,64	14,69	16,73	18,76	20,78
87,2	2,22	4,42	6,61	8,78	10,93	13,06	15,18	17,28	19,37	21,44
87,3	2,30	4,58	6,84	9,09	11,31	13,51	15,69	17,86	20,01	22,14
87,4	2,39	4,76	7,10	9,41	11,71	13,99	16,24	18,48	20,69	22,89
87,5	2,49	4,94	7,37	9.77	12,15	14,50	16,82	19,13	21,41	23,68
87,6	2,59	5,14	7,66	10,15	12,61	15,04	17,45	19,83	22,19	24,53
87,7	2,70	5,36	7,98	10,56	13,11	15,63	18,12	20,58	23,02	25,43
87,8	2,82	5,59	8,32	11,01	13,66	16,27	18,85	21,39	23,91	26,40
87,9	2,95	5,84	8,69	11,49	14,25	16,96	19,63	22,26	24,86	27,43
88,0	3,19	6,12	9,10	12,02	14,89	17,71	21,48	24,21	26,90	29,55

raggio medesimo all'altezza H, la tavola fornisce in corrispondenza agli argomenti z ed H il valore $z - z_H$,

H / z	2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
°	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
50	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0	2,2	2,3	2,5	2,6	2,7
60	2,1	2,4	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9
65	2,6	2,9	3,1	3,4	3,6	3,9	4,1	4,4	4,6	4,9
70	3,4	3,7	4,0	4,3	4,6	5,0	5,3	5,6	5,9	6,3
71	3,6	3,9	4,2	4,6	4,9	5,3	5,6	5,9	6,2	6,6
72	3,8	4,2	4,5	4,9	5,2	5,6	5,9	6,3	6,6	7,0
73	4,0	4,4	4,8	5,2	5,5	5,9	6,3	6,7	7,0	7,4
74	4,3	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3	6.7	7,1	7,5	7,9
75	4,6	5,0	5,4	5,9	6,3	6,7	7,2	7,6	8,0	8,5
76	4,9	5,4	5,8	6,3	6,7	7,2	7,7	8,2	8,6	9,1
77	5,3	5,8	6,3	6,8	7,3	7,8	8,3	8,8	9,3	9,8
78	5,8	6,3	6,8	7,4	7,9	8,5	9,0	9,6	10,1	10,7
79	6,3	6,9	7,5	8,1	8,7	9,3	9,8	10,5	11,1	11,7
80	6,9	7,6	8,2	8,9	9,5	10,2	10,8	11,5	12,1	12,8
81	7,7	8,4	9,1	9,8	10,6	11,3	12,0	12,7	13,5	14,2
82	8,7	9,5	10,3	11,1	11,9	12,7	13,5	14,3	15,1	15,9
83	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,2	18,1
84	11,5	12,6	13,6	14,7	15,8	16,9	17,9	19,0	20,0	21,1
85,0	13,74	14,99	16,23	17,48	18,73	19,98	21,22	22,47	23,72	24,97
85,1	14,01	15,28	16,55	17,83	19,10	20,37	21,63	22,90	24,17	25,44
85,2	14,29	15,59	16,88	18,18	19,47	20,77	22,05	23,34	24,63	25,93
85,3	14,58	15,90	17,22	18,54	19,86	21,18	22,49	23,80	25,12	26,44
85,4	14,88	16,23	17,57	18,92	20,26	21,60	22.94	24,28	25,62	26,96
85,5	15,20	16,57	17,94	19,32	20,68	22,05	23,42	24,78	26,15	27,51
85,6	15,53	16,93	18,33	19,73	21,12	22,52	23,91	25,30	26,69	28,08
85,7	15,87	17,30	18,73	20,15	21,57	23,00	24,41	25,83	27,25	28,67
85,8	16,22	17,68	19,14	20,59	22,04	23,50	24,94	26,39	27,84	29,28
85,9	16,59	18,08	19,57	21,06	22,54	24,02	25,50	26,98	28,45	29,91
86,0	16,98	18,50	20,02	21,54	23,06	24,57	26,08	27,58	29,08	30,57
86.1	17,39	18,95	20,50	22,05	23,60	25,14	26,68	28,21	29,74	31,26
86,2	17,81	19,41	21,00	22,59	24,16	25,74	27,31	28,88	30,44	31,99
86,3	18,26	19,89	21,52	23,14	24,76	26,37	27,97	29,57	31,17	32,76
86,4	18,73	20,40	22,06	23,72	25,38	27,02	28,66	29,30	31,93	33.55
86,5	19,22	20,93	22,63	24,33	26,02	27,70	29,38	31,05	32.72	34,38
86,6	19,74	21,49	23,23	24,97	26.70	28,42	30,14	31,85	33,55	35,25
86,7	20,28	22,08	23,86	25,64	27,41	29,17	30,93	32,68	34,42	36,15
86,8	20,86	22,70	24,53	26,35	28,16	29.96	31,76	33,56	35,33	37,10
86,9	21,46	23,35	25,22	27.09	28,95	30,80	32,64	34,47	36,28	38,09
87,0	22,10	24,04	25,96	27,88	29,78	31,68	33,56	35,43	37,29	39,14
87,1	22,78	24.77	26,74	28,71	30,66	32,60	34,53	36,44	38,35	40,24
87,2	23,50	25,54	27,57	29,58	31,58	33,57	35,55	37,51	39,47	41.41
87,3	24,26	26,36	28,44	30,51	32,56	34,60	36,63	38,64	40,64	42,63
87,4	25,06	27,22	29,36	31,49	33,60	35,69	37,77	39,83	41,88	43,91
87,5	25,92	28.14	30,34	32,53	34,69	36,84	38,97	41,08	43,18	45,26
87,6	26,84	29,13	31,39	33,63	35,86	38,06	40,25	42,41	44,56	46,69
87,7	27,81	30,17	32,50	34,80	37,09	39,35	41,60	43,82	46,02	48,20
87,8	28,85	31,28	33,68	36,05	38,40	40,73	43,03	45,31	47,57	49,80
87,9	29,97	32,47	34,94	37,38	39,80	42,19	44,56	46,89	49,21	51,50
88,0	31,17	33,75	36,30	38,82	41,30	43,76	46,19	48,58	50,95	53,30

Segue TAVOLA II.

z / H	88°0′	88°4′	88°8′	88°12′	88°16′	88°20′	88°24′	88°28′
m	′	′	′	′	′	′	′	′
100	1,24	1,29	1,33	1,38	1,43	1,49	1,55	1,62
200	2,47	2,56	2,65	2,75	2,85	2,96	3,08	3,21
300	3,70	3,82	3,96	4,10	4,25	4,41	4,59	4,78
400	4,91	5,08	5,26	5,44	5,64	5,85	6,08	6,33
500	6,12	6,32	6,54	6,77	7,01	7,27	7,55	7,85
600	7,32	7,56	7,81	8,08	8,37	8,68	9,01	9,36
700	8,51	8,78	9,07	9,38	9,71	10,06	10,44	10,85
800	9,68	10,00	10,32	10,67	11,04	11,43	11,86	12,32
900	10,85	11,19	11,56	11,94	12,35	12,79	13,26	13,77
1000	12,01	12,39	12,79	13,20	13,66	14,14	14,65	15,20
1100	13,16	13,57	14,00	14,46	14,95	15,47	16,02	16,61
1200	14,31	14,75	15,21	15,71	16,23	16,79	17,38	18,01
1300	15,45	15,92	16,41	16,94	17,50	18,09	18,73	19,40
1400	16,58	17,08	17,61	18,16	18,76	19,39	20,06	20,77
1500	17,70	18,23	18,79	19,38	20,00	20,67	21,38	22,13
1600	18,81	19,37	19,96	20,59	21,24	21,94	22,69	23,47
1700	19,92	20,50	21,12	21,78	22,47	23,20	23,98	24,80
1800	21,02	21,63	22,28	22,96	23,69	24,45	25,26	26,12
1900	22,11	22,75	23,43	24,14	24,89	25,69	26,53	27,42
2000	23,20	23,87	24,57	25,31	26,09	26,91	27,79	28,71
2100	24,28	24,97	25,70	26,47	27,28	28,13	29,04	29,99
2200	25,36	26,07	26,83	27,62	28,46	29,34	30,28	31,26
2300	26,43	27,17	27,95	28,77	29,63	30,54	31,51	32,52
2400	27,49	28,25	29,06	29,90	30,79	31,74	32,73	33,77
2500	28,55	29,33	30,16	31,03	31,95	32,92	33,93	35,01
2600	29,60	30,40	31,26	32,15	33,10	34,09	35,13	36,24
2700	30,64	31,47	32,35	33,27	34,24	35,25	36,32	37,45
2800	31,68	32,53	33,43	34,38	35,37	36,41	37,50	38,66
2900	32,71	33,59	34,51	35,48	36,49	37,56	38,68	39,86
3000	33,74	34,64	35,58	36,57	37,61	38,70	39,85	41,05
3100	34,77	35,69	36,65	37,66	38,72	39,83	41,00	42,23
3200	35,79	36,73	37,71	38,74	39,82	40,96	42,15	43,40
3300	36,80	37,76	38,76	39,82	40,92	42,08	43,29	44,57
3400	37,81	38,79	39,81	40,89	42,01	43,19	44,42	45,73
3500	38,81	39,81	40,86	41,95	43,09	44,29	45,55	46,87
3600	39,81	40,83	41,89	43,00	44,17	45,39	46,67	48,01
3700	40,80	41,84	42,92	44,05	45,24	46,48	47,78	49,14
3800	41,79	42,85	43,94	45,10	46,30	47,56	48,88	50,29
3900	42,77	43,84	44,96	46,14	47,36	48,64	49,98	51,39
4000	43,75	44,84	45,98	47,17	48,41	49,71	51,07	52,50
4100	44,72	45,83	46,99	48,20	49,46	50,78	52,16	53,60
4200	45,69	46,82	47,99	49,22	50,50	51,84	53,23	54,70
4300	46,66	47,80	48,99	50,24	51,54	52,89	54,31	55,79
4400	47,62	48,78	49,99	51,25	52,57	53,94	55,37	56,87
4500	48,58	49,75	50,98	52,26	53,59	54,98	56,43	57,95
4600	49,53	50,72	51,97	53,26	54,61	56,02	57,48	59,02
4700	50,48	51,69	52,95	54,26	55,63	57,05	58,53	60,08
4800	51,42	52,65	53,93	55,25	56,64	58,08	59,57	61,14
4900	52,36	53,61	54,90	56,24	57,64	59,10	60,61	62,20
5000	53,30	54,56	55,97	57,22	58,64	60,11	61,64	63,25

z / H	88°32′	88°36′	88°40′	88°44′	88°48′	88°52′	88°56′	89°0′
m	′	′	′	′	′	′	′	′
100	1,69	1,77	1,85	1,95	2,06	2,17	2,30	2,45
200	3,35	3,50	3,67	3,86	4,06	4,28	4,54	4,81
300	4,98	5,21	5,45	5,72	6,02	6,34	6,70	7,10
400	6,59	6,89	7,20	7,55	7,93	8,34	8,80	9,31
500	8,18	8,54	8,92	9,34	9,80	10,30	10,85	11,46
600	9,75	10,16	10,61	11,10	11,63	12,21	12,85	13,55
700	11,29	11,76	12,27	12,82	13,43	14,08	14,80	15,59
800	12,81	13,34	13,90	14,52	15,19	15,91	16,71	17,58
900	14,30	14,89	15,51	16,19	16,92	17,71	18,57	19,52
1000	15,78	16,42	17,10	17,83	18,62	19,47	20,40	21,42
1100	17,25	17,93	18,66	19,44	20,29	21,20	22,20	23,27
1200	18,70	19,42	20,20	21,03	21,93	22,91	23,96	25,09
1300	20,12	20,89	21,72	22,60	23,55	24,58	25,68	26,87
1400	21,53	22,35	23,22	24,15	25,15	26,22	27,38	28,62
1500	22,93	23,79	24,70	25,67	26,72	27,84	29,05	30,34
1600	24,31	25,21	26,16	27,17	28,27	29,44	30,69	32,04
1700	25,68	26,61	27,60	28,66	29,80	31,01	32,31	33,70
1800	27,03	28,00	29,03	30,13	31,31	32,56	33,90	35,33
1900	28,37	29,37	30,44	31,58	32,80	34,09	35,47	36,94
2000	29,70	30,73	31,84	33,01	34,27	35,60	37,02	38,53
2100	31,01	32,08	33,22	34,43	35,72	37,09	38,54	40,10
2200	32,31	33,42	34,59	35,83	37,15	38,56	40,05	41,65
2300	33,60	34,74	35,94	37,22	38,57	40,01	41,54	43,17
2400	34,88	36,05	37,28	38,59	39,97	41,45	43,01	44,67
2500	36,14	37,34	38,61	39,94	41,36	42,87	44,46	46,15
2600	37,39	38,62	39,92	41,29	42,74	44,27	45,90	47,61
2700	38,64	39,90	41,22	42,62	44,10	45,66	47,32	49,06
2800	39,88	41,16	42,51	43,94	45,45	47,04	48,72	50,49
2900	41,10	42,41	43,79	45,24	46,78	48,40	50,11	51,91
3000	42,31	43,65	45,06	46,54	48,10	49,74	51,48	53,31
3100	43,52	44,88	46,31	47,82	49,40	51,07	52,84	54,70
3200	44,72	46,10	48,55	49,09	50,70	52,39	54,18	56,07
3300	45,90	47,31	48,79	50,35	51,98	53,70	55,51	57,42
3400	47,08	48,51	50,02	51,60	53,25	55,00	56,83	58,76
3500	48,25	49,70	51,23	52,83	54,51	56,28	58,14	60,09
3600	49,41	50,88	52,43	54,06	55,76	57,56	59,44	61,40
3700	50,57	52,06	53,63	55,28	57,01	58,82	60,72	62,71
3800	51,71	53,23	54,82	56,49	58,24	60,07	61,99	64,00
3900	52,85	54,39	56,00	57,69	59,46	61,31	63,25	65,29
4000	53,98	55,54	57,17	58,88	60,67	62,54	64,50	66,56
4100	55,11	56,68	58,33	60,06	61,87	63,76	65,74	67,82
4200	56,22	57,82	59,48	61,23	63,06	64,97	66,97	69,07
4300	57,33	58,95	60,63	62,40	64,24	66,17	68,19	70,31
4400	58,43	60,07	61,77	63,56	65,41	67,36	69,40	71,53
4500	59,53	61,18	62,90	64,70	66,58	68,55	70,60	72,75
4600	60,62	62,28	64,02	65,84	67,74	69,72	71,79	73,96
4700	61,70	63,38	65,14	66,98	68,89	70,89	72,98	75,16
4800	62,77	64,47	66,25	68,11	70,03	72,05	74,16	76,35
4900	63,84	65,56	67,35	69,22	71,17	73,20	75,32	77,53
5000	64,90	66,64	68,44	70,33	72,30	74,34	76,48	78,70

TAV

Coefficiente (a) del termine di 1° ordine per la rettificazione

H / z	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250
0°	0,0011	22	32	42	51	59	67	74	81
10	0,0011	22	32	42	51	60	68	75	83
20	0,0012	23	34	44	54	63	71	79	87
30	0,0013	25	36	47	58	68	77	86	94
40	0,0014	28	41	54	66	77	87	97	106
44	0,0015	30	44	57	70	82	93	104	113
48	0,0017	33	48	62	75	88	100	111	122
52	0,0018	35	52	67	82	96	109	121	132
56	0,0020	39	57	74	90	105	119	133	145
60	0,0023	44	64	83	101	118	134	149	163
64	0,0026	50	73	94	114	134	153	170	186
68	0,0030	58	85	111	135	157	178	199	218
70	0,0033	64	93	121	147	172	196	218	239
71	0,0034	67	98	127	155	181	205	228	250
72	0,0036	70	103	134	163	190	216	241	264
73	0,0039	75	109	141	172	201	228	254	278
74	0,0041	79	115	150	183	213	242	270	295
75	0,0043	84	123	160	195	227	258	287	314
76	0,0046	90	132	171	208	243	276	307	336
77	0,0050	97	142	184	224	262	297	330	361
78	0,0054	105	153	199	242	283	322	358	392
79	0,0058	114	167	217	264	308	350	390	427
80,0	0,0064	125	183	238	290	339	385	428	469
80,1	0,0065	126	185	240	293	342	389	432	473
80,2	0,0066	128	187	243	296	346	393	437	478
80,3	0,0067	129	189	245	299	349	396	441	483
80,4	0,0067	130	191	248	302	353	401	446	488
80,5	0,0067	131	193	250	305	356	405	450	493
80,6	0,0068	133	195	253	308	360	410	455	498
80,7	0,0069	135	197	255	311	364	414	460	503
80,8	0,0070	136	199	258	315	368	418	465	509
80,9	0,0071	138	201	261	318	372	422	470	514
81,0	0,0071	139	203	264	322	376	427	475	520
81,1	0,0072	141	206	267	325	380	432	480	525
81,2	0,0073	142	208	270	329	384	436	486	532
81,3	0,0074	144	210	273	333	388	441	491	538
81,4	0,0075	146	213	277	337	393	446	497	544
81,5	0,0075	147	215	280	340	397	451	502	550
81,6	0,0076	149	218	283	344	402	457	508	557
81,7	0,0077	151	221	286	348	407	462	514	563

temperatura (t_0) nella forma: $\Delta t_0 F(z, H) = -a\tau + b\tau^2$ ($\tau = t_0 : 10°$).

H / z	2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
°	0,0094	100	105	110	115	119	123	127	130	133
0	0,0096	102	107	112	117	121	125	129	132	135
0	0,0101	107	112	117	122	127	131	135	139	142
0	0,0109	116	122	127	133	138	142	146	150	154
0	0,0123	131	138	144	150	156	161	165	170	174
4	0,0131	139	147	154	160	166	172	177	181	185
8	0,0141	150	158	165	172	178	184	190	195	199
2	0,0153	163	171	179	187	194	200	206	211	216
6	0,0168	179	189	198	206	213	220	227	233	238
0	0,0188	200	211	221	230	239	247	254	260	266
4	0,0215	228	240	252	262	272	281	290	297	304
8	0,0252	267	281	295	308	319	329	339	347	355
0	0,0276	293	309	323	336	349	361	371	380	389
1	0,0289	307	324	339	353	366	378	389	399	408
2	0,0305	324	341	357	372	386	399	410	420	429
3	0,0322	342	360	377	393	408	421	433	444	454
4	0,0342	363	383	401	417	432	446	459	471	482
5	0,0364	386	407	426	444	460	475	489	502	513
6	0,0390	413	435	456	475	493	509	523	536	549
7	0,0419	444	468	491	511	530	547	563	578	591
8	0,0453	481	507	531	553	573	592	609	625	639
9	0,0493	524	552	578	602	625	645	663	680	696
0,0	0,0542	575	606	635	662	686	708	729	747	764
0,1	0,0548	581	612	641	668	692	715	736	755	772
0,2	0,0553	587	618	647	674	699	722	743	762	780
0,3	0,0559	593	625	654	681	706	730	751	770	788
0,4	0,0564	599	631	661	688	714	738	759	778	796
0,5	0,0570	605	638	668	696	721	745	767	786	804
0,6	0,0576	611	644	675	703	729	753	775	795	812
0,7	0,0582	617	651	682	711	737	761	783	803	821
0,8	0,0588	624	658	689	718	745	769	791	811	830
0,9	0,0595	631	665	696	726	753	777	799	820	839
1,0	0,0601	638	672	704	734	761	785	808	829	848
1,1	0,0608	645	680	712	742	769	794	817	839	857
1,2	0,0615	652	687	720	750	778	803	826	848	867
1,3	0,0621	659	695	728	759	787	812	835	857	876
31,4	0,0629	667	703	736	767	796	822	845	867	886
31,5	0,0636	675	711	745	776	805	831	855	877	896
31,6	0,0644	683	720	754	785	814	841	865	887	907
31,7	0,0651	691	728	763	794	823	851	875	898	918

H / z	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250
81°,8	0,0078	153	224	290	353	412	468	521	570
81,9	0,0080	155	227	293	357	417	474	527	577
82,0	0,0081	157	230	297	361	422	480	534	584
82,1	0,0081	158	232	301	366	427	485	540	591
82,2	0,0082	160	235	305	371	433	492	547	599
82,3	0,0083	162	238	309	376	439	498	554	606
82,4	0,0084	164	241	313	381	445	505	561	614
82,5	0,0085	166	243	317	386	451	511	568	622
82,6	0,0087	169	247	321	391	457	518	576	631
82,7	0,0088	171	250	325	396	463	525	584	639
82,8	0,0089	174	254	330	402	469	533	592	648
82,9	0,0090	176	257	334	407	475	540	600	657
83,0	0,0092	179	261	339	413	482	548	609	666
83,1	0,0093	181	265	344	419	489	556	618	676
83,2	0,0094	184	269	349	425	496	564	627	686
83,3	0,0096	187	273	354	431	503	572	636	696
83,4	0,0098	190	277	360	438	511	581	645	706
83,5	0,0099	193	281	365	445	519	590	655	717
83,6	0,0101	196	285	371	451	527	598	665	728
83,7	0,0102	199	291	377	458	535	607	675	739
83,8	0,0104	202	295	383	466	544	617	686	751
83,9	0,0105	205	300	389	474	553	627	697	763
84,0	0,0107	209	305	395	481	562	638	709	776
84,1	0,0109	212	310	402	489	571	648	721	789
84,2	0,0111	216	315	409	498	581	659	733	802
84,3	0,0113	220	321	416	506	591	671	746	816
84,4	0,0115	224	327	424	515	601	682	759	831
84,5	0,0117	228	333	431	524	612	694	772	845
84,6	0,0119	232	339	439	534	623	707	786	860
84,7	0,0121	236	345	447	544	634	720	801	876
84,8	0,0124	241	352	456	554	646	734	816	893
84,9	0,0126	245	358	464	564	659	748	832	911
85,0	0,0128	250	365	473	575	672	763	848	928
85,1	0,0131	255	372	483	587	686	779	865	947
85,2	0,0133	260	380	493	600	700	794	883	967
85,3	0,0136	265	387	503	612	715	811	901	986
85,4	0,0139	271	396	514	625	730	828	920	1006
85,5	0,0142	277	405	525	639	746	846	940	1028
85,6	0,0145	283	414	537	653	762	864	960	1050
85,7	0,0149	290	423	549	668	779	883	981	1073

OLA III*a*.

	2750m	3000	3000	3500	3750	4000	4250	4500	4750	500
,8	0,0659	700	737	772	804	833	861	886	909	929
,7	0,0667	708	746	781	814	843	871	897	920	940
1,0	0,0675	717	755	791	824	854	882	908	931	952
1,1	0,0684	726	765	801	834	865	893	919	943	964
1,2	0,0692	735	774	811	845	876	904	930	955	976
1,3	0,0701	744	784	821	856	887	916	942	967	989
1,4	0,0711	754	795	832	867	899	928	955	980	1002
1,5	0,0720	764	806	843	878	910	940	967	992	1015
1,6	0,0730	774	816	854	889	922	952	980	1005	1028
2,7	0,0740	785	827	866	901	935	965	993	1019	1042
2,8	0,0750	796	839	878	914	948	979	1007	1033	1056
2,9	0,0760	807	850	890	927	961	992	1021	1047	1070
3,0	0,0771	818	862	902	940	974	1006	1035	1062	1085
3,1	6,0782	829	874	915	953	988	1020	1050	1077	1100
3,2	0,0793	841	886	928	966	1002	1035	1065	1092	1116
3,3	0,0804	853	899	942	981	1017	1050	1080	1107	1132
3,4	0,0816	866	913	956	996	1032	1066	1096	1124	1149
3,5	0.0829	879	926	970	1011	1048	1082	1112	1141	1166
3,6	0,0841	893	940	985	1026	1064	1098	1129	1158	1184
3.7	0,0855	907	955	1000	1042	1080	1115	1147	1176	1203
3,8	0,0868	921	970	1016	1059	1097	1133	1165	1195	1222
3,9	0,0882	936	986	1033	1076	1115	1151	1184	1214	1242
4,0	0,0897	952	1003	1050	1093	1133	1170	1204	1234	1262
4,1	0,0913	968	1019	1067	1111	1152	1190	1224	1255	1283
4,2	0,0928	984	1036	1085	1130	1171	1210	1244	1276	1305
4,3	0,0944	1001	1054	1104	1150	1192	1231	1266	1298	1328
4,4	0,0961	1019	1073	1124	1170	1213	1252	1288	1321	1351
4,5	0,0978	1037	1093	1144	1191	1235	1275	1311	1345	1375
4,6	0,0995	1056	1113	1165	1213	1257	1298	1335	1369	1400
4,7	0,1013	1075	1133	1186	1235	1280	1322	1360	1394	1425
4,8	0.1032	1095	1154	1208	1258	1304	1346	1385	1420	1451
4,9	0,1052	1116	1176	1231	1282	1328	1371	1411	1447	1478
5,0	0,1072	1137	1198	1254	1306	1353	1397	1437	1474	1507
5,1	0,1094	1160	1221	1278	1331	1380	1425	1466	1503	1537
5,2	0,1117	1184	1246	1304	1358	1408	1454	1496	1534	1568
5,3	0,1140	1209	1272	1331	1386	1437	1484	1526	1565	1600
5,4	0,1164	1234	1299	1359	1415	1467	1515	1558	1597	1633
5,5	0,1188	1260	1326	1388	1445	1498	1547	1591	1631	1668
5,6	0,1214	1288	1356	1419	1477	1531	1581	1626	1667	1704
5,7	0,1241	1317	1387	1451	1510	1565	1616	1662	1704	1742

H / z	250m	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250
85°,8	0,0153	297	433	562	683	797	904	1004	1098
85,9	0,0156	304	444	576	700	817	926	1029	1126
86,0	0,0160	312	455	590	717	837	950	1055	1154
86,1	0,0164	320	467	605	735	858	974	1082	1183
86,2	0,0168	328	479	621	754	880	998	1109	1213
86,3	0,0172	337	491	636	774	903	1024	1138	1245
86,4	0,0177	346	504	653	795	928	1052	1169	1278
86,5	0,0183	356	518	672	817	954	1082	1201	1313
86,6	0,0188	366	533	692	841	981	1113	1235	1350
86,7	0,0194	377	550	713	866	1010	1145	1271	1389
86,8	0,0200	389	567	735	893	1041	1179	1309	1431
86,9	0,0207	402	585	758	921	1074	1216	1350	1475
87,0	0,0214	415	604	782	950	1108	1255	1393	1522
87,1	0,0221	429	624	808	982	1145	1297	1439	1571
87,2	0,0228	444	646	837	1016	1184	1342	1488	1624
87,3	0,0237	460	670	867	1052	1226	1389	1540	1681
87,4	0,0246	478	695	899	1091	1271	1439	1596	1743
87,5	0,0256	497	722	934	1033	1319	1493	1656	1808
87,6	0,0266	517	752	972	1178	1370	1551	1721	1878
87,7	0,0278	539	784	1013	1226	1426	1614	1789	1952
87,8	0,0290	562	818	1057	1279	1487	1682	1864	2033
87,9	0,0303	588	855	1105	1337	1554	1757	1946	2122
88,0	0,0318	617	896	1157	1400	1627	1838	2035	2217
88 4′	0,0329	638	926	1195	1446	1679	1896	2098	2285
8	0,0342	660	957	1235	1494	1734	1958	2165	2358
12	0,0354	684	991	1278	1545	1793	2023	2236	2434
16	0,0367	709	1027	1324	1599	1855	2092	2312	2515
20	0,0381	736	1066	1373	1658	1922	2167	2393	2603
24	0,0397	765	1108	1426	1721	1993	2246	2479	2695
28	0,0414	797	1153	1482	1788	2069	2330	2571	2793
32	0,0432	832	1202	1543	1859	2151	2421	2669	2898
36	0,0452	870	1255	1610	1937	2239	2518	2775	3011
40	0,0474	911	1313	1682	2022	2335	2623	2888	3131
44	0,0499	956	1375	1760	2114	2438	2736	3010	3261
48	0,0525	1005	1444	1845	2213	2549	2857	3140	3399
52	0,0554	1059	1519	1938	2321	2670	2989	3281	3548
56	0,0586	1119	1602	2040	2439	2802	3133	3434	3710
89 0	0,0622	1187	1691	2150	2567	2945	3288	3600	3885

)LA III*a*.

2750m	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000
0,1270	1347	1418	1484	1545	1601	1653	1700	1743	1782
0,1300	1379	1452	1519	1582	1639	1692	1740	1784	1824
0,1332	1413	1487	1556	1620	1679	1733	1782	1827	1868
0,1366	1448	1524	1595	1660	1720	1775	1825	1872	1914
0,1400	1484	1562	1635	1702	1763	1819	1871	1919	1962
0,1436	1522	1602	1677	1745	1808	1866	1919	1968	2012
0,1475	1563	1645	1721	1791	1856	1916	1970	2020	2065
0,1515	1606	1690	1768	1840	1906	1968	2023	2074	2120
0 1558	1651	1737	1817	1891	1959	2022	2079	2131	2178
0,1603	1698	1787	1869	1945	2015	2079	2138	2191	2240
0,1650	1748	1839	1924	2002	2074	2140	2200	2255	2305
0,1700	1801	1895	1982	2062	2136	2204	2266	2322	2373
0,1754	1858	1955	2044	2126	2202	2372	2335	2393	2445
0,1810	1918	2018	2110	2195	2273	2344	2409	2468	2522
0,1871	1982	2085	2180	2268	2348	2421	2488	2548	2603
0,1936	2050	2156	2254	2344	2427	2503	2572	2634	2690
0,2006	2128	2232	2333	2426	2511	2590	2661	2725	2783
0,2080	2201	2314	2418	2514	2601	2683	2756	2822	2882
0,2159	2285	2401	2509	2608	2698	2781	2857	2926	2988
0,2245	2375	2495	2606	2708	2801	2887	2965	3036	3001
0,2336	2471	2595	2710	2815	2912	3000	3081	3155	3221
0,2436	2575	2703	2822	2932	3032	3123	3206	3282	3350
0,2543	2688	2821	2944	3057	3161	3255	3341	3419	3490
0,2620	2768	2905	3031	3147	3253	3349	3437	3517	3589
0,2701	2853	2998	3122	3241	3349	3448	3538	3620	3694
0,2787	2943	3087	3219	3340	3451	3553	3645	3728	3804
0,2878	3038	3186	3321	3445	3559	3663	3757	3842	3919
0.2975	3139	3290	3429	3556	3673	3779	3875	3962	4041
0,3077	3246	3402	3544	3674	3793	3901	4000	4089	4170
0,3187	3360	3519	3665	3799	3921	4032	4133	4224	4306
0,3303	3481	3644	3794	3931	4056	4170	4273	4366	4450
0,3427	3610	3778	3931	4072	4200	4316	4421	4516	4602
0,3559	3747	3920	4077	4221	4352	4471	4578	4676	4764
0,3701	3894	4071	4233	4380	4514	4635	4745	4845	4935
0,3853	4052	4233	4398	4549	4686	4810	4923	5025	5117
0,4016	4220	4406	4575	4730	4870	4997	5112	5216	5310
0,4191	4400	4591	4764	4923	5066	5196	5313	5419	5515
0,4379	4593	4789	4967	5129	5275	5408	5528	5636	5733

TAVOLA III*b*.

Coefficiente *b* del termine di 2° ordine per la rettificazione dipendente dalla temperatura (t_0) nella forma: $\Delta_{t_0} F(z, H) = -a\tau + b\tau^2$. ($\tau = t_0 : 10°$).

H / z	500m	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
0°	0,0001	1	2	2	3	3	3	3	3	3
40	0,0001	2	3	3	4	4	4	4	4	5
60	0,0002	3	4	5	6	6	6	7	7	7
70	0,0002	4	6	7	8	9	10	10	10	10
80	0,0004	8	11	14	16	18	19	20	20	20
82	0,0006	10	14	18	20	22	24	25	25	25
84	0,0008	14	19	23	27	30	32	33	34	34
85	0,0009	16	23	28	32	35	38	39	40	41
86,0	0,0011	21	29	35	40	45	48	50	51	52
86,2	0,0012	22	30	37	43	47	50	52	54	54
86,4	0,0012	23	32	39	45	49	53	55	57	57
86,6	0,0013	24	34	41	48	52	56	59	60	61
86,8	0,0014	26	36	44	51	56	60	63	64	65
87,0	0,0015	28	38	47	54	60	64	67	69	70
87,2	0,0016	30	41	50	58	64	69	72	74	75
87,4	0,0017	32	44	54	63	69	74	78	80	81
87,6	0,0018	35	48	59	68	75	80	84	87	88
87,8	0,0020	38	52	64	74	82	88	92	95	97
88,0	0,0022	41	58	71	82	90	97	101	105	107
88,1	0,0023	43	61	75	86	95	102	106	110	113
88,2	0,0025	46	64	79	91	100	107	111	116	119
88,3	0,0026	49	68	83	96	106	113	118	123	126
88,4	0,0028	52	72	88	102	112	120	126	130	133
88,5	0,0030	55	77	94	108	119	128	134	139	141
88,6	0,0032	59	82	100	116	127	136	143	148	150
88,7	0,0034	64	88	107	124	136	145	153	158	160
88,8	0,0037	69	95	116	133	146	156	164	169	172
88,9	0,0041	75	103	126	144	158	169	177	182	185
89,0	0,0045	83	112	137	156	171	182	191	197	200

TAVOLA IV.

La tavola fornisce coll'argomento M (massa d'aria attraversata dai raggi già rettificata per la temperatura) l'incremento ΔM di M, che corrisponde all'aumento di 10^{mm} nella pressione.

M	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,0000	0013	0026	0039	0053	0066	0079	0092	0105	0119
1	0,0132	0145	0158	0171	0184	0197	0211	0224	0237	0250
2	0,0263	0276	0289	0303	0316	0329	0342	0355	0368	0382
3	0,0395	0408	0421	0434	0447	0461	0474	0487	0500	0513
4	0,0526	0539	0553	0566	0579	0592	0605	0618	0632	0645
5	0,0658	0671	0684	0697	0711	0724	0737	0750	0763	0776
6	0,0790	0803	0816	0829	0842	0855	0868	0882	0895	0908
7	0,0921	0934	0947	0961	0974	0987	1000	1013	1026	1039
8	0,1053	1066	1079	1092	1105	1118	1132	1145	1158	1171
9	0,1184	1197	1211	1224	1237	1250	1263	1276	1289	1303
10	0,1316	1329	1342	1355	1368	1382	1395	1408	1421	1434
11	0,1447	1461	1474	1487	1500	1513	1526	1539	1553	1566
12	0,1579	1592	1605	1618	1632	1645	1658	1671	1684	1697
13	0,1711	1724	1737	1750	1763	1776	1790	1803	1816	1829
14	0,1842	1855	1868	1882	1895	1908	1921	1934	1947	1961
15	0,1974	1987	2000	2013	2026	2039	2053	2066	2079	2092
16	0,2105	2119	2132	2145	2158	2171	2184	2197	2211	2224
17	0,2237	2250	2263	2276	2289	2303	2316	2329	2342	2355
18	0,2368	2382	2395	2408	2421	2434	2447	2461	2474	2487
19	0,2500	2513	2526	2539	2553	2566	2579	2592	2605	2618
20	0,2632	2645	2658	2671	2684	2697	2711	2724	2737	2750
21	0,2763	2776	2790	2803	2816	2829	2842	2855	2868	2882
22	0,2895	2908	2921	2934	2947	2961	2974	2987	3000	3013
23	0,3026	3039	3053	3066	3079	3092	3105	3119	3132	3145
24	0,3158	3171	3184	3197	3211	3224	3237	3250	3263	3276
25	0,3289	3303	3316	3329	3342	3355	3368	3382	3395	3408
26	0,3421	3434	3447	3461	3474	3487	3500	3513	3526	3539
27	0,3553	3566	3579	3592	3605	3618	3632	3645	3658	3671

TAVOLA V.

Masse d'aria F(z) attraversate dai raggi luminosi dal mare fino al limite dell'atmosfera.

z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)	
0°	1,000	0	34°	1,205	15	60°,8	2,044	6	64°,2	2,290	8
1	1,000	1	35	1,220	15	60,9	2,050	6	64,3	2,298	8
2	1,001	1	36	1,235	16	61,0	2,056	6	64,4	2,306	8
3	1,002	0	37	1,251	16	61,1	2,062	7	64,5	2,314	8
4	1 002	2	38	1,267	18	61,2	2,069	7	64,6	2,322	8
5	1,004	1	39	1,285	19	61,3	2,076	7	64,7	2,330	9
6	1,005	2	40	1,304	20	61,4	2,083	6	64,8	2,339	9
7	1,007	3	41	1,324	20	61,5	2,089	7	64,9	2,348	9
8	1,010	2	42	1,344	22	61,6	2,096	6	65,0	2,357	8
9	1,012	3	43	1 366	23	61,7	2,102	7	65,1	2,465	9
10	1,015	3	44	1,389	24	61,8	2,109	7	65,2	2,374	9
11	1,018	4	45	1,413	25	61,9	2,116	7	65,3	2,383	9
12	1,022	4	46	1,438	26	62,0	2,123	7	65,4	2,392	9
13	1,026	4	47	1,464	28	62,1	2,130	7	65,5	2,401	9
14	1,030	5	48	1,492	30	62,2	2,137	7	65,6	2,410	9
15	1,035	5	49	1,522	31	62,3	2,144	7	65,7	2,419	9
16	1,040	6	50	1,553	33	62,4	2,151	7	65,8	2,428	9
17	1,046	6	51	1,586	35	62,5	2,158	7	65,9	2,437	10
18	1,052	6	52	1,621	37	62,6	2,165	7	66,0	2,447	9
19	1,058	6	53	1,658	40	62,7	2,172	8	66,1	2,456	10
20	1,064	7	54	1,698	42	62,8	2,180	7	66,2	2,466	10
21	1,071	7	55	1,740	44	62,9	2,187	8	66,3	2,576	10
22	1,078	8	56	1,784	47	63,0	2,195	8	66,4	2,486	10
23	1,086	8	57	1,831	51	63,1	2,203	8	66,5	2,496	10
24	1,094	9	58	1,882	55	63,2	2,211	7	66,6	2,506	10
25	1,103	9	59	1,937	58	63,3	2,218	8	66,7	2,516	10
26	1,112	10	60	1,995	6	63,4	2,226	8	66,8	2,526	10
27	1,122	10	60,1	2,001	6	63,5	2,234	8	66,9	2,536	10
28	1,132	11	60,2	2,007	6	63,6	2,242	8	67,0	2,546	10
29	1,143	11	60,3	2,013	6	63,7	2,250	8	67,1	2,556	11
30	1,154	12	60,4	2,019	6	63,8	2,258	8	67,2	2,567	10
31	1,166	12	60,5	2,025	6	63,9	2,266	8	67,3	2,577	11
32	1,178	13	60,6	2,031	6	64,0	2,274	8	67,4	2,588	11
33	1,191	14	60,7	2,037	7	64,1	2,282	8	67,5	2,599	11
34	1,205		60,8	2,044		64,2	2,290		67,6	2,610	

z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)	
67°,6	2,610	11	71°,6	3,142	17	75°,6	3,967	26	79°,6	5,399	49
67,7	2,621	11	71,7	3,159	16	75,7	3,993	27	79,7	5,448	50
67,8	2,632	11	71,8	3,175	17	75,8	4,020	27	79,8	5,498	51
67,9	2,643	11	71,9	3,192	17	75,9	4,047	28	79,9	5,549	51
68,0	2,654	11	72,0	3,209	17	76,0	4,075	28	80,0	5,600	52
68,1	2,665	12	72,1	3,226	17	76,1	4,103	28	80,1	5,652	53
68,2	2,677	11	72,2	3,243	17	76,2	4,131	28	80,2	5,705	55
68,3	2,688	12	72,3	3,260	18	76,3	4,159	29	80,3	5,760	56
68,4	2,700	12	72,4	3,278	18	76,4	4,188	30	80,4	5,816	57
68,5	2,712	12	72,5	3,296	18	76,5	4,218	30	80,5	5,873	59
68,6	2,724	12	72,6	3,314	18	76,6	4,248	30	80,6	5,932	60
68,7	2,736	12	72,7	3,332	18	76,7	4,278	31	80,7	5,992	61
68,8	2,748	12	72,8	3,340	19	76,8	4,309	31	80,8	6,053	61
68,9	2,760	13	72,9	3,369	19	76,9	4,340	32	80,9	6,114	63
69,0	2,773	12	73,0	3,388	19	77,0	4,372	32	81,0	6,177	64
69,1	2,785	13	73,1	3,407	19	77,1	4,404	32	81,1	6,241	65
69,2	2,798	13	73,2	3,426	19	77,2	4,436	33	81,2	6,306	67
69,3	2,811	13	73,3	3,445	20	77,3	4,469	34	81,3	6,373	69
69,4	2,824	13	73,4	3,465	20	77,4	4,503	34	81,4	6,442	70
69,5	2,837	13	73,5	3,485	20	77,5	4,537	35	81,5	6,512	71
69,6	2,850	13	73,6	3,505	21	77,6	4,572	35	81,6	6,583	73
69,7	2,863	14	73,7	3,526	20	77,7	4,607	36	81,7	6,656	74
69,8	2,877	13	73,8	3,546	21	77,8	4,643	36	81,8	6,730	76
69,9	2,880	14	73,9	3,567	21	77,9	4,679	37	81,9	6,806	78
70,0	2,904	14	74,0	3,588	22	78,0	4,716	37	82,0	6,884	80
70,1	2,918	14	74,1	3,610	22	78,1	4,753	39	82,1	6,964	81
70,2	2,932	14	74,2	3,632	22	78,2	4,792	39	82,2	7,045	83
70,3	2,946	14	74,3	3,654	22	78,3	4,831	39	82,3	7,128	85
70,4	2,960	15	74,4	3,676	23	78,4	4,870	40	82,4	7,213	87
70,5	2,975	14	74,5	3,699	23	78,5	4,910	40	82,5	7,300	89
70,6	2,989	15	74,6	3,722	23	78,6	4,950	42	82,6	7,389	92
70,7	3,004	15	74,7	3,745	23	78,7	4,992	42	82,7	7,481	93
70,8	3,019	15	74,8	3,768	24	78,8	5,034	43	82,8	7,574	96
70,9	3,034	15	74,9	3,792	24	78,9	5,077	43	82,9	7,670	98
71,0	3,049	15	75,0	3,816	24	79,0	5,120	44	83,0	7,768	100
71,1	3,064	15	75,1	3,840	25	79,1	5,164	46	83,1	7,869	103
71,2	3,079	16	75,2	3,865	25	79,2	5,210	46	83,2	7,972	106
71,3	3,095	15	75,3	3,890	25	79,3	5,256	47	83,3	8,078	108
71,4	3,110	16	75,4	3,915	26	79,4	5,303	48	83,4	8,186	112
71, 5	3,126	16	75,5	3,941	26	79,5	5,331	48	83,5	8,298	114
71,6	3,142		75,6	3,967		79,6	5,399		83,6	8,412	

Segue TAVOLA V.

z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)	
83° 6'	8,412	117	84° 36'	9,744	26	85° 16'	10,876	32	85° 56'	12,280	40
7	8,529	121	37	9,770	26	17	10,908	31	57	12,320	39
8	8,650	123	38	9,796	26	18	10,939	32	58	12,359	40
9	8,773	127	39	9,822	26	19	10,971	32	59	12,399	40
84 0	8,900	22	40	9,848	26	20	11,003	32	86 0	12,439	41
1	8,922	22	41	9,874	26	21	11,035	33	1	12,480	40
2	8,944	22	42	9,900	26	22	11,068	32	2	12,520	41
3	8,966	22	43	9,926	27	23	11,100	33	3	12,561	41
4	8,988	22	44	9,953	26	24	11,133	33	4	12,602	41
5	9,010	22	45	9,979	27	25	11,166	33	5	12,643	42
6	9,032	22	46	10,006	27	26	11,199	33	6	12,685	42
7	9,054	22	47	10,033	27	27	11,232	34	7	12,727	42
8	9,076	22	48	10,060	27	28	11,266	33	8	12,769	42
9	9,098	23	49	10,087	27	29	11,299	34	9	12,811	43
10	9,121	23	50	10,114	28	30	11,333	34	10	12,854	43
11	9,143	23	51	10,142	27	31	11,367	34	11	12,897	43
12	9,166	23	52	10,169	28	32	11,401	34	12	12,940	43
13	9,189	23	53	10,179	28	33	11,435	35	13	12,983	44
14	9,212	23	54	10,225	28	34	11,470	35	14	13,027	44
15	9,235	23	55	10,253	28	35	11,505	35	15	13,071	44
16	9,258	23	56	10,281	29	36	11,540	35	16	13,115	45
17	9,281	23	57	10,310	28	37	11,575	35	17	13,160	44
18	9,304	24	58	10,338	29	38	11,610	35	18	13,234	45
19	9,328	23	59	10,367	28	39	11,645	36	19	13,249	45
20	9,351	24	85 0	10,395	29	40	11,681	36	20	13,294	46
21	9,375	24	1	10,424	29	41	11,717	36	21	13,340	46
22	9,399	24	2	10,453	30	42	11,753	37	22	13,386	46
23	9,423	24	5	10,483	29	43	11,790	36	23	13,432	46
24	9,447	24	4	10,512	30	44	11,826	37	24	13,478	47
25	9,471	24	5	10,542	29	45	11,863	37	25	13,525	47
26	9,495	25	6	10,571	30	46	11,900	37	26	13,572	47
27	9,520	24	7	10,601	30	47	11,937	37	27	13,619	48
28	9,544	25	8	10,631	30	48	11,974	38	28	13,667	48
29	9,569	24	9	10,661	30	49	12,012	38	29	13,715	48
30	9,593	25	10	10,691	31	50	12,050	38	30	13,763	49
31	9,618	25	11	10,722	30	51	12,088	38	31	13,812	48
32	9,643	25	12	10,752	31	52	12,126	38	32	13,860	49
33	9,668	26	13	10,783	31	53	12,164	38	33	13,909	50
34	9,694	25	14	10,814	31	44	12,202	39	34	13,959	50
35	9,719	25	15	10,845	31	55	12,241	39	35	14,009	50
36	9,744		16	10,876		56	12,280		36	14,059	

z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)		z	F(z)	
86°36'	14,059	50	87°12'	16,102	64	87°48'	18,736	84	88°24'	22,219	112
37	14,109	51	13	16,166	65	49	18,820	85	25	22,331	114
38	14,160	51	14	16,231	65	50	18,905	85	26	22,445	114
39	14,211	51	15	16,296	66	51	18,990	86	27	22,559	115
40	14,262	52	16	16,362	66	52	19,076	86	28	22,674	116
41	14,314	52	17	16,428	66	53	19,162	87	29	22,790	118
42	14,366	53	18	16,494	67	54	19,249	88	30	22,908	118
43	14,419	54	19	16,561	68	55	19,337	89	31	23,026	120
44	14,471	53	20	16,629	68	56	19,426	89	32	23,146	120
45	14,524	54	21	16,697	68	57	19,515	90	33	23,266	121
46	14,578	55	22	16,765	69	58	19,605	91	34	23,387	123
47	14,432	53	23	16,834	69	59	19,696	91	35	23,510	123
48	14,686	54	24	16,903	70	88 0	19,787	92	36	23,633	125
49	14,740	53	25	16,973	71	1	19,879	93	37	23,758	126
50	14,805	54	26	17,044	71	2	19,971	94	38	23,884	127
51	14,860	56	27	17,115	72	3	20,065	95	39	24,011	128
52	14,906	56	28	17,187	72	4	20,160	95	40	24,139	129
53	14,962	56	29	17,259	72	5	20,255	96	41	24,268	130
54	15,018	57	30	17,331	73	6	20,351	97	42	24,398	131
55	15,075	57	31	17,404	74	7	20,448	97	43	24,529	133
56	15,132	58	32	17,478	74	8	20,545	98	44	24,662	134
57	15,190	58	33	17,552	75	9	20,643	99	45	24,796	137
58	15,248	58	34	17,627	75	10	20,742	100	46	24,931	137
59	15,306	59	35	17,702	76	11	20,842	101	47	25,068	137
87 0	15,365	59	36	17.778	77	12	20,943	102	48	25,205	138
1	15,424	59	37	17,855	77	13	21,045	102	49	25,343	140
2	15,483	60	38	17,932	78	14	21,147	102	50	25,483	142
3	15,543	60	39	18,010	78	15	21,250	105	51	25,625	142
4	15,603	61	40	18,088	79	16	21,355	105	52	25,767	144
5	15,664	61	41	18,167	80	17	21,460	106	53	25,911	146
6	15,725	62	42	18,247	80	18	21,566	106	54	26,057	146
7	15,787	62	43	18,327	81	19	21,672	107	55	26,203	148
8	15,849	63	44	18,408	81	20	21,779	109	56	26,351	150
9	15,912	63	45	18,489	82	21	21,888	109	57	26,501	151
10	15,975	63	46	18,571	82	22	21,997	111	58	26,652	153
11	16,038	64	47	18,653	83	23	22.108	111	59	26,805	154
12	16,102		48	18,736		24	22,219		89 0	26,959	

TAVOLA VI.

Rettificazione dipendente dalla temperatura per le masse d'aria F(*z*) attraversate dai raggi luminosi al mare (*t*). La rettificazione è data in millesimi di un'atmosfera.

t / *z*	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	*t* / *z*	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°
	+	+	−	−	−		+	+	−	−	−
78°,0	8	4	4	7	10	81°,5	22	11	10	21	31
1	8	4	4	7	10	6	23	11	10	21	31
2	8	4	4	8	11	7	23	11	11	23	33
3	8	4	4	8	11	8	24	12	11	23	34
4	8	4	4	8	11	9	25	12	12	24	35
5	8	4	4	8	12	82.0	25	12	12	25	36
6	9	4	4	8	12	1	25	12	12	26	38
7	9	4	5	9	13	2	26	13	12	26	39
8	9	5	5	9	13	3	27	14	13	28	40
9	10	5	5	9	14	4	28	14	14	29	42
79,0	10	5	5	10	14	5	30	15	14	30	43
1	10	5	5	10	14	6	31	16	14	30	44
2	10	5	5	10	15	7	32	16	15	32	46
3	10	5	5	10	15	8	33	17	15	32	47
4	10	5	5	10	15	9	34	17	16	34	49
5	10	5	6	11	16	83,0	36	18	17	35	51
6	11	6	6	11	17	1	37	18	17	36	53
7	12	6	6	11	17	2	38	19	18	37	54
8	12	6	6	12	18	3	40	20	19	39	57
9	12	6	7	13	19	4	42	21	20	40	59
80,0	13	6	7	14	20	5	44	22	21	42	62
1	13	6	7	14	20	6	46	23	22	44	64
2	14	7	7	14	20	7	48	24	23	45	66
3	14	7	7	14	21	8	50	25	24	47	69
4	15	7	7	14	21	9	52	26	25	49	72
5	16	8	7	14	21	84 0	54	27	26	51	76
6	16	8	8	15	23	1	54	27	26	51	76
7	16	8	8	16	24	2	54	27	26	51	76
8	17	8	9	17	25	3	54	27	26	51	77
9	18	9	9	17	26	4	54	27	26	52	78
81,0	18	9	9	18	27	5	55	27	26	52	78
1	19	9	9	18	27	6	56	28	27	53	79
2	20	10	9	19	28	7	56	28	27	53	79
3	21	10	10	20	29	8	56	28	27	53	79
4	21	10	10	21	31	9	56	28	27	53	79

dal mare fino al limite dell'atmosfera: argomenti la distanza zenitale apparente (z) e la temperatura

t / z	— 20°	— 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	t / z	— 20°	— 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°
	+	+	—	—	—		+	+	—	—	—
84° 10′	56	28	27	54	80	84° 45′	74	37	35	70	105
11	57	29	27	54	80	46	74	37	36	71	106
12	58	29	28	55	82	47	74	37	36	71	106
13	58	29	28	55	82	48	75	37	36	72	107
14	58	29	28	55	82	49	75	37	36	72	107
15	58	29	28	55	82	50	76	38	36	72	108
16	58	29	28	56	83	51	76	38	37	74	110
17	59	29	28	56	84	52	77	39	37	74	110
18	60	30	29	57	85	53	78	39	37	74	111
19	60	30	29	57	86	54	78	39	38	75	112
20	61	30	29	58	86	55	78	39	38	75	112
21	61	30	29	58	87	56	79	39	38	76	113
22	61	30	29	58	87	57	79	39	39	77	115
23	62	31	30	59	88	58	80	40	39	77	115
24	63	31	30	60	89	59	80	40	40	79	117
25	63	31	30	60	89	85 0	82	41	40	79	118
26	64	32	30	60	90	1	82	41	40	79	118
27	64	32	31	61	91	2	83	41	40	79	118
28	65	32	31	62	92	3	83	41	40	80	119
29	65	32	32	63	93	4	84	42	40	80	120
30	66	33	32	63	94	5	84	42	41	81	121
31	66	33	32	63	94	6	85	42	41	81	121
32	67	33	32	64	95	7	85	42	41	82	122
33	68	34	32	64	95	8	86	42	41	83	124
34	68	34	33	65	97	9	87	43	42	84	125
35	68	34	33	66	98	10	88	43	42	84	125
36	69	34	33	66	98	11	88	43	43	85	127
37	69	34	33	66	99	12	89	44	43	85	127
38	70	35	34	67	100	13	89	44	43	86	128
39	70	35	34	67	100	14	90	44	44	87	129
40	71	35	34	67	100	15	91	45	44	88	130
41	72	36	34	68	101	16	92	45	44	88	131
42	72	36	35	69	102	17	92	45	45	89	132
43	72	36	35	69	103	18	94	46	45	89	132
44	73	36	35	70	104	19	94	46	46	90	134

Segue Tavola VI.

t / z	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	t / z	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°
	+	+	−	−	−		+	+	−	−	−
85°20′	95	46	46	91	135	86°1′	135	67	66	130	193
21	96	47	46	92	136	2	137	68	66	131	194
22	96	47	47	93	138	3	138	68	66	132	196
23	98	48	47	94	139	4	139	69	67	133	197
24	99	49	48	95	141	5	141	70	67	134	198
25	100	49	49	96	142	6	142	70	68	135	200
26	101	49	49	97	143	7	142	70	68	136	202
27	102	50	49	97	144	8	144	71	69	137	203
28	102	50	50	98	146	9	146	72	69	138	205
29	104	51	50	99	147	10	147	72	70	139	207
30	104	51	51	100	148	11	148	73	71	141	209
31	104	51	51	101	150	12	150	74	72	142	210
32	105	51	52	102	151	13	151	74	72	143	212
33	106	52	52	102	152	14	152	75	73	144	214
34	107	53	52	103	153	15	153	75	74	145	215
35	108	53	53	104	155	16	155	76	74	146	216
36	109	54	53	105	156	17	156	77	75	148	219
37	111	54	54	106	158	18	158	78	76	149	220
38	111	55	54	107	159	19	159	78	76	150	222
39	112	56	54	108	160	20	161	79	77	151	223
40	113	56	55	109	162	21	162	80	78	153	226
41	113	56	55	110	164	22	163	80	79	154	228
42	115	57	56	111	165	23	165	81	80	156	230
43	115	57	57	113	167	24	167	82	80	157	232
44	117	58	57	113	168	25	168	83	81	159	234
45	118	58	58	114	170	26	169	83	82	160	236
46	119	59	58	115	171	27	171	84	82	161	238
47	120	59	59	116	173	28	173	85	83	163	241
48	121	60	59	117	174	29	174	86	84	165	244
49	122	61	60	119	176	30	176	87	84	166	246
50	123	61	60	120	178	31	178	88	85	168	248
51	124	62	61	121	180	32	180	89	85	168	249
52	125	62	61	122	181	33	182	90	86	170	252
53	126	62	62	123	182	34	183	90	87	172	255
54	128	63	62	123	183	35	185	91	88	174	258
55	129	64	63	124	185	36	186	92	89	176	261
56	131	65	63	125	186	37	188	93	90	178	263
57	131	65	64	127	188	38	190	94	91	180	266
58	133	66	64	127	189	39	191	94	92	181	268
59	134	66	65	128	191	40	193	95	92	182	270
86 0	135	67	65	129	192	41	195	96	93	184	273

Segue TAVOLA VI.

$\frac{t}{z}$	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	$\frac{t}{z}$	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°
	+	+	−	−	−		+	+	−	−	−
86°42′	197	97	94	186	275	87°23′	299	146	140	276	407
43	199	98	95	188	278	24	303	148	142	279	411
44	201	99	96	189	280	25	307	151	143	281	414
45	203	100	97	191	283	26	310	152	144	284	418
46	205	101	98	193	286	27	313	153	146	287	422
47	207	102	99	195	288	28	316	154	148	290	426
48	209	103	100	197	291	29	319	156	149	293	431
49	211	104	101	198	293	30	323	158	151	296	435
50	213	105	102	200	296	31	326	159	152	298	438
51	215	106	103	202	298	32	329	161	154	301	443
52	217	107	104	204	301	33	333	163	156	305	447
53	219	108	105	206	304	34	336	164	158	308	452
54	222	109	106	208	307	35	340	166	159	311	457
55	224	110	107	210	310	36	344	168	161	314	462
56	226	111	107	211	312	37	346	169	162	317	466
57	228	112	109	214	315	38	350	171	163	320	471
58	230	113	110	216	318	39	354	173	165	324	477
59	233	115	111	218	321	40	358	175	167	328	482
87 0	236	116	112	220	324	41	362	177	169	332	488
1	238	117	113	222	326	42	366	179	171	336	494
2	240	118	114	224	329	43	370	181	173	339	498
3	242	119	115	226	332	44	374	183	175	343	504
4	245	120	116	228	335	45	379	185	177	347	510
5	247	121	118	231	339	46	383	187	179	351	515
6	251	123	119	233	343	47	388	190	181	355	521
7	253	124	120	235	346	48	393	192	184	359	527
8	256	126	121	237	349	49	397	194	186	363	532
9	259	127	122	240	353	50	401	196	188	367	538
10	261	128	123	242	356	51	406	198	190	371	544
11	264	130	124	244	360	52	410	200	192	375	549
12	267	131	126	248	365	53	415	202	194	379	555
13	269	132	127	250	368	54	420	205	196	383	561
14	272	133	128	252	371	55	424	207	198	387	566
15	275	135	129	254	374	56	428	209	201	392	573
16	277	136	131	257	378	57	434	212	203	396	579
17	280	137	132	260	382	58	439	215	205	400	585
18	284	139	134	263	386	59	444	217	207	405	592
19	286	140	135	265	390	88 0	450	220	210	409	598
20	289	141	136	268	394	1	454	222	212	413	604
21	293	143	138	271	398	2	460	225	214	417	610
22	296	145	139	273	402	3	466	228	217	422	617

Segue Tavola VI.

$\frac{t}{z}$	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	$\frac{t}{z}$	− 20°	− 10°	+ 10°	+ 20°	+ 30°
	+	+	−	−	−		+	+	−	−	−
88° 4′	471	230	219	427	625	88° 33′	664	323	307	597	873
5	477	233	221	431	632	34	672	327	310	604	883
6	483	236	224	437	640	35	680	331	314	612	895
7	488	238	226	442	647	36	689	335	318	620	906
8	494	241	229	446	653	37	697	339	322	628	917
9	500	244	232	451	660	38	706	343	326	635	927
10	506	247	234	456	667	39	715	348	330	643	938
11	512	250	237	462	675	40	724	352	334	650	949
12	518	253	240	468	684	41	733	356	338	658	960
13	524	256	242	473	692	42	743	361	342	666	972
14	530	259	245	478	699	43	753	366	346	673	983
15	536	262	248	484	707	44	762	370	350	681	994
16	542	265	251	490	716	45	772	375	355	690	1006
17	548	268	254	496	725	46	782	380	359	698	1017
18	555	271	257	502	734	47	792	385	364	707	1029
19	561	274	260	507	742	48	802	390	368	715	1041
20	567	277	263	513	750	49	812	395	372	723	1052
21	574	280	266	519	759	50	823	400	377	732	1065
22	581	283	269	525	767	51	834	405	382	741	1078
23	588	286	273	532	777	52	845	410	387	750	1090
24	596	290	276	538	786	53	856	415	392	759	1103
25	603	294	278	543	794	54	867	420	397	769	1117
26	610	297	282	550	804	55	879	426	402	778	1129
27	617	301	286	557	814	56	891	432	407	787	1142
28	624	304	289	563	823	57	903	438	412	797	1156
29	632	308	292	569	832	58	916	444	417	806	1169
30	640	312	296	577	843	59	928	450	422	817	1184
31	648	316	299	583	852	89 0	941	456	428	827	1198
32	655	319	303	590	863						

TAVOLA VII.

Fornisce per le altezze H da 0^m a 5500^m (di 100^m in 100_m) i valori normali alla latitudine di 45°: *a*) della densità relativa x_H dell'aria (valore normale al mare = 1); *b*) della pressione relativa p_H (valore normale al mare = 1); *c*) della massa relativa λ_H dell'aria sovrastante all'altezza H (valore normale al mare = 8,010898); e inoltre: *d*) i valori della variabile ausiliaria $s = \frac{H}{a+H}$.

N. B. — La massa M_H dell'aria sovrastante all'altezza H (aria contenuta in una colonna verticale della sezione di 1 cm^2) è espressa in grammi (per la latitudine di 45°) da

$$M_H = \lambda_H \times 0{,}1292607.$$

Così per la massa di una tal colonna estesa a tutta l'atmosfera (H = 0) risulta M_0 = kg. 1.03645 contro P_0 = kg. 1.0333, esprimente la pressione sopra 1 cm^2.

H	log. x	Differ.	$1-x$	Differ.	$10^4 s$	Differ.	log. p	Differ.	λ_H	Differ.
0^m	0,000000		0,00000		0,00000		0,000000		8,010898	
		— 4450		1019		+ 15680		— 5439		— 99490
100	9,995550		0,01019		0,15680		9,994561		7,911408	
		— 4460		1012		+ 15680		— 5451		— 98474
200	9,991090		0,02031		0,31360		9,989110		7,812934	
		— 4470		1003		+ 15679		— 5463		— 97467
300	9,986620		0,03034		0,47039		9,983647		7,715467	
		— 4481		995		+ 15679		— 5476		— 96468
400	9,982139		0,04029		0,62718		9,978171		7,618999	
		— 4490		987		+ 15678		— 5488		— 95476
500	9,977649		0,05016		0,78396		9,972683		7,523523	
		— 4501		980		+ 15678		— 5502		— 94493
600	9,973148		0,05996		0,94074		9,967181		7,229030	
		— 4510		971		+ 15677		— 5513		— 93519
700	9,968638		0,06967		1,09751		9,961668		7,335511	
		— 4521		963		+ 15677		— 5526		— 92551
800	9,964117		0,07930		1,25428		9,956142		7,242960	
		— 4532		956		+ 15676		— 5538		— 91591
900	9,959585		0,08886		1,41104		9,950604		7,151369	
		— 4542		948		+ 15676		— 5551		— 90639
1000	9,955043		0,09834		1,56780		9,945053		7,060730	
		— 4552		940		+ 15676		— 5563		— 89696
1100	9.950491		0,10774		1.72456		9,939490		6,971034	
		— 4563		932		+ 15674		— 5577		— 88759
1200	9,945928		0,11706		1,88130		9,933913		6.882275	
		— 4573		925		+ 15675		— 5590		— 87830
1300	9,941355		0,12631		2.03805		9.928323		6,794445	
		— 4584		918		+ 15674		— 5603		— 86909
1400	9,936771		0,13549		2,19479		9,922720		6,707536	
		— 4594		909		+ 15673		— 5615		— 85993
1500	9,932177		0,14458		2,35152		9,917105		6.621543	
		— 4605		903		+ 15673		— 5629		— 85089
1600	9,927572		0,15361		2,50825		9,911476		6,536454	
		— 4616		895		+ 15672		— 5642		— 84191
1700	9,922956		0,16256		2,66497		9,905831		6,452263	
		— 4627		887		+ 15672		— 5655		— 83300
1800	9,918329		0,17143		2,82169		9,900179		6,368963	
		— 4637		880		+ 15671		— 5667		— 82416
1900	9,913692		0,18023		2,97840		9,894512		6,286547	
		— 4649		873		+ 15672		— 5682		— 81540
2000	9,909043		0,18896		3,13512		9,888830		6,205007	
		— 4659		865		+ 15670		— 5695		— 80671
2100	9,904384		0,19761		3,29182		9,883135		6,124336	
		— 4671		859		+ 15670		— 5708		— 79809
2200	9,899713		0,20620		3,44852		9,877427		6,044527	
		— 4681		851		+ 15669		— 5721		— 78954
2300	9,895032		0,21471		3,60521		9,871706		5,965573	
		— 4693		844		+ 15669		— 5736		— 78107
2400	9.890339		0,22315		3,76190		9,865970		5,887466	
		— 4703		836		+ 15668		— 5749		— 77266
2500	9,885636		0,23151		3,91858		9,860221		5,810200	

Segue Tavola VII.

H	log. x	Differ.	$1 - x$	Differ.	$10^4 s$	Differ.	log. p	Differ.	λ_n	Differ.
m										
2500	9,885636	− 4715	0,23151	830	3,91858	+ 15668	9,860221	− 5762	5,810200	− 76433
2600	9,880921	− 4726	0,23981	823	4,07526	+ 15668	9,854459	− 5776	5,733767	− 75607
2700	9,876195	− 4738	0,24804	816	4,23194	+ 15666	9,848683	− 5791	5,658160	− 74788
2800	9,871457	− 4749	0,25620	809	4,38860	+ 15667	9,842892	− 5804	5,583372	− 73975
2900	9,866708	− 4760	0,26429	802	4,54527	+ 15666	9,837088	− 5818	5,509397	− 73170
3000	9,861948	− 4771	0,27231	795	4,70193	+ 15665	9,831270	− 5832	5,436227	− 72371
3100	9,857177	− 4783	0,28026	788	4,85858	+ 15665	9,825438	− 5846	5,363856	− 71579
3200	9,852394	− 4795	0,28814	782	5,01523	+ 15665	9,819592	− 5861	5,292277	− 70795
3300	9,847599	− 4797	0,29596	775	5,17188	+ 15664	9,813731	− 5875	5,221482	− 70016
3400	9,842792	− 4818	0,30371	768	5,32852	+ 15663	9,807856	− 5888	5,151466	− 69245
3500	9,837974	− 4830	0,31139	761	5,48515	+ 15663	9,801968	− 5903	5,082221	− 68480
3600	9,833144	− 4842	0,31900	755	5,64178	+ 15663	9,796065	− 5918	5,013741	− 67721
3700	9,828302	− 4853	0,32655	749	5,79841	+ 15662	9,790147	− 5932	4,946020	− 66970
3800	9,823419	− 4866	0,33404	742	5,95503	+ 15662	9,784215	− 5946	4,879050	− 66225
3900	9,818583	− 4877	0,34146	735	6,11165	+ 15661	9,778269	− 5961	4,812825	− 65486
4000	9,813706	− 4889	0,34881	729	6,26826	+ 15660	9,772308	− 5977	4,747339	− 64753
4100	9,808817	− 4902	0,35610	723	6,42486	+ 15660	9,766331	− 5990	4,682586	− 64028
4200	9,803915	− 4914	0,36333	716	6,58146	+ 15660	9,760341	− 6006	4,618558	− 63309
4300	9,799001	− 4926	0,37049	710	6,73806	+ 15659	9,754335	− 6021	4,555249	− 62595
4400	9,794075	− 4938	0,37759	704	6,89465	+ 15659	9,748314	− 6035	4,492654	− 61888
4500	9,789137	− 4951	0,38463	697	7,05124	+ 15658	9,742279	− 6051	4,430766	− 61188
4600	9,784186	− 4963	0,39160	692	7,20782	+ 15657	9,736228	− 6067	4,369578	− 60493
4700	9,779223	− 4975	0,39852	685	7,36439	+ 15657	9,730161	− 6081	4,309084	− 59806
4800	9,774248	− 4988	0,40537	679	7,52096	+ 15657	9,724080	− 6096	4,249279	− 59123
4900	9,769260	− 5001	0,41216	673	7,67753	+ 15656	9,717984	− 6113	4,190156	− 58447
5000	9,764259	− 5014	0,41889	667	7,83409	+ 15656	9,711871	− 6127	4,131709	− 57777
5100	9,759245	− 5026	0,42556	661	7,99065	+ 15655	9,705744	− 6143	4,073932	− 57113
5200	9,754219	− 5039	0,43217	655	8,14720	+ 15655	9,699601	− 6159	4,016819	− 56455
5300	9,749180	− 5052	0,43872	649	8,30375	+ 15654	9,693442	− 6174	3,960364	− 55803
5400	9,744128	− 5064	0,44521	643	8,46029	+ 15654	9,687268	− 6190	3,904561	− 55157
5500	9,739064		0,45164		8,61683		9,681078		3,849404	

TAVOLA Ix.

Valori delle masse d'aria F(z; C, E) attraversate dai raggi incidenti in Catania colla distanza zenitale z fra le altezze C = 69^m ed E = 2942^m (altezze rispettive dell'Osservatorio astrofisico in Catania e dell'Osservatorio Etneo). Unità di massa la massa di un'atmosfera a 45° di latitudine in condizioni normali di temperatura e pressione.

z	F(z; C, E)		z	F(z; C, E)		z	F(z; C, E)		z	F(z; C, E)		z	F(z; C, E)	
0°	0,307	0	32°	0,362	4	64°	0,701	26	77°,1	1,372	11	80°,3	1,814	18
1	0,307	0	33	0,366	5	65	0,727	28	77,2	1,383	10	80,4	1,832	19
2	0,307	0	34	0,371	4	66	0,755	30	77,3	1,393	11	80,5	1,851	20
3	0,307	0	35	0,375	5	67	0,785	34	77,4	1,404	11	80,6	1,871	19
4	0,307	1	36	0,380	4	68	0,819	37	77,5	1,415	11	80,7	1,890	20
5	0,308	0	37	0,384	5	69	0,856	41	77,6	1,426	12	80,8	1,910	21
6	0,308	1	38	0,389	6	70	0,897	46	77,7	1,438	11	80,9	1,931	21
7	0,309	1	39	0,395	6	71	0,943	50	77,8	1,449	12	81,0	1,952	22
8	0,310	0	40	0,401	6	72	0,993	57	77,9	1,461	12	81,1	1,974	22
9	0,310	1	41	0,407	6	73	1,050	64	78,0	1,473	12	81,2	1,996	22
10	0,311	1	42	0,413	7	74	1,114	71	78,1	1,485	12	81,3	2,018	23
11	0,312	1	43	0,420	7	75,0	1,185	7	78,2	1,497	13	81,4	2,041	24
12	0,313	2	44	0,427	7	75,1	1,192	8	78,3	1,510	13	81,5	2,065	25
13	0,315	1	45	0,434	8	75,2	1,200	8	78,4	1,523	13	81,6	2,090	25
14	0,316	1	46	0,442	8	75,3	1,208	8	78,5	1,536	13	81,7	2,115	25
15	0,317	2	47	0,450	8	75,4	1,216	8	78,6	1,549	14	81,8	2,140	26
16	0,319	1	48	0,458	9	75,5	1,224	8	78,7	1,563	13	81,9	2,166	26
17	0,320	2	49	0,467	9	75,6	1,232	9	78,8	1,576	14	82,0	2,192	27
18	0,322	2	50	0,476	11	75,7	1,241	8	78,9	1,590	14	82,1	2,219	28
19	0,324	2	51	0,487	11	75,8	1,249	9	79,0	1,604	14	82,2	2,247	28
20	0,326	2	52	0,498	11	75,9	1,258	9	79,1	1,618	15	82,3	2,275	29
21	0,328	3	53	0,509	13	76,0	1,267	9	79,2	1,633	15	82,4	2,304	30
22	0,331	2	54	0,522	14	76,1	1,276	9	79,3	1,648	15	82,5	2,334	31
23	0,333	3	55	0,536	14	76,2	1,285	9	79,4	1,663	16	82,6	2,365	31
24	0,336	3	56	0,550	14	76,3	1,294	9	79,5	1,679	16	82,7	2,396	32
25	0,339	3	57	0,564	16	76,4	1,303	10	79,6	1,695	16	82,8	2,428	33
26	0,342	2	58	0,580	16	76,5	1,313	9	79,7	1,711	16	82,9	2,461	34
27	0,344	3	59	0,596	18	76,6	1,322	10	79,8	1,727	17	83,0	2,495	35
28	0,347	3	60	0,614	19	76,7	1,332	10	79,9	1,744	17	83,1	2,530	37
29	0,350	4	61	0,633	21	76,8	1,342	10	80,0	1,761	17	83,2	2,567	37
30	0,354	4	62	0,654	22	76,9	1,352	10	80,1	1,778	18	83,3	2,604	38
31	0,358	4	63	0,676	25	77,0	1,362	10	80,2	1,796	18	83,4	2,642	40
32	0,362		64	0,701		77,1	1,372		80,3	1,814		83,5	2,682	

Segue TAVOLA I E.

z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)	
83°,5	2,682	41	85°25'	3,749	13	86°5'	4,345	18	86°45'	5,159	24	87°25'	6,319	36
6	2,723	42	26	3,762	13	6	4,363	17	46	5,183	24	26	6,355	36
7	2,765	43	27	3,775	13	7	4,380	18	47	5,207	24	27	6,391	36
8	2,808	44	28	3,788	13	8	4,398	17	48	5,231	24	28	6,427	36
9	2,852	46	29	3,801	14	9	4,415	18	49	5,255	25	29	6,463	37
84°0'	2,898	47	30	3,815	13	10	4,433	18	50	5,280	25	30	6,500	38
1	2,945	48	31	3,828	14	11	4,451	18	51	5,315	25	31	6,538	37
2	2,993	50	32	3,842	13	12	4,469	19	52	5,330	26	32	6,575	38
3	3,043	53	33	3,855	14	13	4,488	18	53	5,356	25	33	6,613	39
4	3,096	55	34	3,869	14	14	4,506	19	54	5,381	26	34	6,652	38
5	3,151	57	35	3,883	14	15	4,525	19	55	5,407	26	35	6,690	39
6	3,208	58	36	3,897	13	16	4,544	19	56	5,433	27	36	6,729	40
7	3,266	60	37	3,910	14	17	4,563	19	57	5,460	28	37	6,769	40
8	3,326	62	38	3,924	14	18	4,582	19	58	5,488	27	38	6,809	40
9	3,388	64	39	3,938	15	19	4,601	19	59	5,515	27	39	6,849	41
85 0	3,452	11	40	3,953	14	20	4,620	19	87 0	5,542	28	40	6,890	42
1	3,463	11	41	3,967	15	21	4,639	19	1	5,570	28	41	6,932	43
2	3,474	11	42	3,982	14	22	4,658	20	2	5,598	28	42	6,975	42
3	3,485	11	43	3,996	15	23	4,678	21	3	5,626	29	43	7,017	43
4	3,496	11	44	4,011	15	24	4,699	20	4	5,655	28	44	7,060	43
5	3,507	12	45	4,026	15	25	4,719	20	5	5,683	29	45	7,103	44
6	3,519	11	46	4,041	16	26	4,739	21	6	5,712	29	46	7,147	44
7	3,530	11	47	4,057	15	27	4,760	20	7	5,741	30	47	7,191	45
8	3,541	11	48	4,072	15	28	4,780	20	8	5,771	30	48	7,236	46
9	3,552	12	49	4,087	15	29	4,800	21	9	5,801	30	49	7,282	46
10	3,564	12	50	4,102	15	30	4,821	21	10	5,831	30	50	7,328	46
11	3,576	11	51	4,117	16	31	4,842	21	11	5,861	30	51	7,374	47
12	3,587	12	52	4,133	15	32	4,863	21	12	5,891	31	52	7,421	48
13	3,599	13	53	4,148	16	33	4,884	22	13	5,922	31	53	7,469	48
14	3,612	12	54	4,164	16	34	4,906	22	14	5,953	32	54	7,517	48
15	3,624	13	55	4,180	16	35	4,928	22	15	5,985	32	55	7,565	49
16	3,637	12	56	4,196	16	36	4,950	23	16	6,017	32	56	7,614	50
17	3,649	12	57	4,212	16	37	4,973	23	17	6,049	33	57	7,664	50
18	3,661	13	58	4,228	16	38	4,996	22	18	6,082	33	58	7,714	51
19	3,674	12	59	4,244	17	39	5,018	23	19	6,115	33	59	7,765	51
20	3,686	12	86 0	4,261	17	40	5,041	23	20	6,148	34	88 0	7,816	53
21	3,698	13	1	4,278	16	41	5,064	23	21	6,182	33	1	7,869	53
22	3,711	12	2	4,294	17	42	5,087	23	22	6,215	34	2	7,922	54
23	3,723	13	3	4,311	17	43	5,110	24	23	6,249	35	3	7,976	55
24	3,736	13	4	4,328	17	44	5,134	25	24	6,284	35	4	8,031	55
25	3,749		5	4,345		45	5,159		25	6,319		5	8,086	

Segue Tavola Ia.

z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)		z	F(z;C,E)	
88° 5'	8,086	55	88° 16'	8,734	64	88° 27'	9,483	74	88° 38'	10,350	85	8° 49'	11,360	100
6	8,141	56	17	8,798	65	28	9,557	74	39	10,435	87	50	11,460	101
7	8,197	57	18	8,863	66	29	9,631	75	40	10,522	88	51	11,561	103
8	8,254	58	19	8,929	66	30	9,706	77	41	10·610	89	52	11,664	104
9	8,312	58	20	8,995	67	31	9,783	77	42	10,699	91	53	11,768	106
10	8,370	59	21	9,062	68	32	9,860	79	43	10,790	92	54	11,874	108
11	8,429	60	22	9,130	69	33	9,939	80	44	10,882	93	55	11,982	109
12	8,489	60	23	9,199	69	34	10,019	81	45	10,975	94	56	12,091	110
13	8,549	61	24	9,268	70	35	10,100	82	46	11,069	95	57	12,201	112
14	8,610	62	25	9,338	72	36	10,182	83	47	11,564	97	58	12,313	114
15	8,672	62	26	9,410	73	37	10,265	85	48	11,261	99	59	(12,427	(1) 116
16	8,734		27	9,483		38	10,350		49	11,360		89 0	12,543)	

(1) Gli ultimi due valori sono ottenuti per via di estrapolazione

TAVOLA IIE

$\Delta z = z_E - z_C$ = Correzione da apportare alla distanza zenitale apparente dei raggi in Catania (z_C) per ottenere la distanza zenitale apparente dei raggi stessi all'altezza dell'Etna (z_E).

z_C	Δz		z_C	Δz		z_C	Δz		z_C	Δz		z_C	Δz		z_C	Δz	
50°	− 1′,6	4	76°	− 5′,3	4	85°,1	− 15′,0	3	86°,1	− 18′,6	5	87°,1	− 24′,2	8	88°,1	− 34′,3	15
55	− 2,0	4	77	− 5,7	5	85,2	− 15,3	3	86,2	− 19,1	5	87,2	− 25,0	8	88,2	− 35,8	15
60	− 2,4	4	78	− 6,2	6	85,3	− 15,6	3	86,3	− 19,6	5	87,3	− 25,8	9	88,3	− 37,3	16
65	− 2,8	8	79	− 6,8	7	85,4	− 15,9	4	86,4	− 20,1	5	87,4	− 26,7	9	88,4	− 38,9	18
70	− 3,6	2	80	− 7,5	8	85,5	− 16,3	3	86,5	− 20,6	5	87,5	− 27,6	9	88,5	− 40,7	18
71	− 3,8	3	81	− 8,3	10	85,6	− 16,6	4	86,6	− 21,1	6	87,6	− 28,5	10	88,6	− 42,5	20
72	− 4,1	2	82	− 9,3	13	85,7	− 17,0	4	86,7	− 21,7	6	87,7	− 29,5	11	88,7	− 44,5	22
73	− 4,3	3	83	− 10,6	18	85,8	− 17,4	3	86,8	− 22,3	5	87,8	− 30,6	11	88,8	− 46,7	24
74	− 4,6	3	84	− 12,4	23	85,9	− 17,7	4	86,9	− 22,8	7	87,9	− 31,7	12	88,9	− 49,1	26
75	− 4,9	4	85	− 14,7	3	86,0	− 18,1	5	87,0	− 23,5	7	88,0	− 32,9	15	89,0	− 51 7	

TAVOLA IIIE

Coefficienti a e b per la correzione $\Delta_\tau F(z; C, E)$ dipendente dalla temperatura nella forma:

$$\Delta_\tau F(z; C, E) = a\tau + b\tau^2 \qquad (\tau = t^\circ : 10^\circ).$$

z	a		z	a	
0°	− 0,009	11	87°,0	− 0,179	6
60	− 0,020	8	87,1	− 0,185	6
70	− 0,028	9	87,2	− 0,191	6
75	− 0,037	18	87,3	− 0,197	7
80	− 0,055	6	87,4	− 0,204	7
81	− 0,061	8	87,5	− 0,211	8
82	− 0,069	10	87,6	− 0,219	9
83	− 0,079	12	87,7	− 0,228	10
84	− 0,091	17	87,8	− 0,238	10
85	− 0.108	28	87,9	− 0,248	11
86,0	− 0,136	3	88,0	− 0,259	12
86,1	− 0,139	3	88,1	− 0,271	13
86,2	− 0,142	3	88,2	− 0,284	14
86,3	− 0,145	4	88,3	− 0,298	16
86,4	− 0,149	4	88,4	− 0,314	17
86,5	− 0,153	5	88,5	− 0,331	19
86,6	− 0,158	5	88,6	− 0,350	20
86,7	− 0,163	5	88,7	− 0,370	22
86,8	− 0,168	5	88,8	− 0,392	26
86,9	− 0,173	6	88,9	− 0,418	29
87,0	− 0,179		89,0	− 0,457	

z	b	
70°	+ 0,0008	7
75	+ 0,0015	3
80	+ 0,0018	1
81	+ 0,0019	2
82	+ 0,0021	3
83	+ 0,0024	4
84	+ 0,0028	6
85	+ 0,0034	10
86	+ 0,0044	14
87	+ 0,0058	5
87,2	+ 0,0063	5
87,4	+ 0,0068	5
87,6	+ 0,0073	6
87,8	+ 0,0079	8
88,0	+ 0,0087	10
88,2	+ 0,0097	13
88,4	+ 0,0110	16
88,6	+ 0,0126	20
88,8	+ 0,0146	24
89,0	+ 0,0170	

INDICE

INTRODUZIONE.

CAPITOLO PRIMO.

CAPITOLO SECONDO.

TAVOLA II$_E$

$\Delta z = z_E - z_C$ = Correzione da apportare alla distanza zenitale per ottenere la distanza zenitale apparente dei raggi stessi

z_C	Δz		z_C	Δz		z_C	Δz		z_C	Δz
50°	− 1,6'	4	76°	− 5,3'	4	85,1°	− 15,0'	3	86,1°	− 18,6'
55	− 2,0	4	77	− 5,7	5	85,2	− 15,3	3	86,2	− 19,1
60	− 2,4	4	78	− 6,2	6	85,3	− 15,6	3	86,3	− 19,6
65	− 2,8	8	79	− 6,8	7	85,4	− 15,9	4	86,4	− 20,1
70	− 3,6	2	80	− 7,5	8	85,5	− 16,3	3	86,5	− 20,6
71	− 3,8	3	81	− 8,3	10	85,6	− 16,6	4	86,6	− 21,1
72	− 4,1	2	82	− 9,3	13	85,7	− 17,0	4	86,7	− 21,7
73	− 4,3	3	83	− 10,6	18	85,8	− 17,4	3	86,8	− 22,3
74	− 4,6	3	84	− 12,4	23	85,9	− 17,7	4	86,9	− 22,8
75	− 4,9	4	85	− 14,7	3	86,0	− 18,1	5	87,0	− 23,5

TAVOLA III$_E$

Coefficienti a e b per la correzione $\Delta_\tau F(z; C, E)$ dipendente

$$\Delta_\tau F(z; C, E) = a\tau + b\tau^2$$

z	a		z	a	
0°	− 0,009	11	87,0°	− 0,179	6
60	− 0,020	8	87,1	− 0,185	6
70	− 0,028	9	87,2	− 0,191	6
75	− 0,037	18	87,3	− 0,197	7
80	− 0,055	6	87,4	− 0,204	7
81	− 0,061	8	87,5	− 0,211	8
82	− 0,069	10	87,6	− 0,219	
83	− 0,079	12	87,7	− 0,228	
84	− 0,091	17	87,8	− 0,238	
85	− 0,108	28	87,9	− 0,2[illegible]	
86,0	− 0,136	3	88,0	− 0,[illegible]	
86,1	− 0,139	3	88,1	− [illegible]	
86,2	− 0,142	3	88,2		
86,3	− 0,145	4	88,3		
86,4	− 0,149	4	88,[illegible]		
86,5	− 0,153	5	[illegible]		
86,6	− 0,158	5			
86,7	− 0,163				
86,8	− 0,168				
86,9	− 0,[illegible]				
87,0	−				

RICHE.

CAPITOLO TERZO.

CAPITOLO QUARTO.

APPENDICE.

TAVOLE NUMERICHE.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 4°, 2° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 1°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

9

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCII

Serie Quinta — Volume V — Fascicolo IX.

FERRUCCIO ZAMBONINI

RICERCHE SU ALCUNE ZEOLITI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

RELAZIONE

letta dal Socio G. Strüver (relatore), a nome anche del Corrispondente L. Balbiano, nella seduta del 3 giugno 1905, sulla Memoria del dott. Ferruccio Zambonini, avente per titolo: *Ricerche su alcune zeoliti.*

Il dott. Ferruccio Zambonini presenta per l'inserzione negli *Atti* dell'Accademia la Memoria: *Ricerche su alcune zeoliti*, nella quale egli si propone di portare un contributo sperimentale sul problema da lungo tempo dibattuto, in quale stato si trovi l'acqua contenuta in questi minerali. Premette alle sue esperienze un'ampia e accurata storia della questione e quindi si pone in modo chiaro i quesiti che intende risolvere sperimentalmente. Le esperienze di disidratazione e di riassorbimento dell'acqua istituite sulla heulandite e la thomsonite sono condotte con metodo rigoroso, e i risultati ottenuti permettono all'A. di rettificare alcune conclusioni stabilite da Friedel.

In base al complesso dei fatti osservati da lui direttamente e delle esperienze degli altri chimici che si occuparono dello stesso argomento l'A. discute le diverse deduzioni fatte sulla costituzione delle zeoliti. Conferma le critiche mosse specialmente da Tammann all'ipotesi che le zeoliti siano idrati, ma non divide nemmeno completamente l'opinione che esse si debbano considerare come soluzioni solide, perchè a lui pare che se le zeoliti fossero delle soluzioni solide, si dovrebbe avere nella curva di disidratazione e della velocità di riassorbimento dell'acqua una variazione continua, e non improvvisa come le sue esperienze dimostrano. L'A. espone l'ipotesi che le proprietà dell'acqua della heulandite e della thomsonite trovano una singolare somiglianza in quelle dell'acqua degli idrogeli.

Il lavoro del dott. Zambonini, eseguito con tecnica incriticabile, porta un contributo notevole alla questione che intraprese a trattare, segnandone una nuova fase che studî ulteriori dell'intricato argomento non potranno a meno di prendere in considerazione. Proponiamo perciò che la Memoria venga accolta per la stampa negli *Atti* dell'Accademia.

Ricerche su alcune zeoliti.

Memoria del dott. FERRUCCIO ZAMBONINI.

Il merito di aver richiamato l'attenzione degli studiosi sulle singolari proprietà dell'acqua delle zeoliti spetta verosimilmente a Malaguti e Durocher (1). Era noto da lungo tempo che la laumontite sfiorisce, ma si credeva che ciò avvenisse senza perdita di acqua. Malaguti e Durocher dimostrarono che, invece, essa perde acqua nello sfiorire e che riprende l'acqua emessa per ridivenire trasparente; determinarono, inoltre, la perdita d'acqua a varie temperature.

Qualche anno dopo, il Damour (2) fece conoscere i risultati delle sue numerose e pazienti indagini su quasi tutte le zeoliti allora conosciute (3), alle quali ricerche era stato indotto non soltanto dai lavori di Malaguti e Durocher, ma anche da esperienze personali da lui eseguite sulle resiniti (4) e sulla herschelite (5). I risultati del Damour sono interessantissimi, ed io credo utile riportarli qui testualmente, tanto più che ad essi spesso dovrò riferirmi in seguito.

1° I minerali della famiglia delle zeoliti. eccezione fatta di una sola specie (l'analcime), hanno la proprietà di perdere quantità considerevoli della loro acqua di combinazione e talvolta anche tutta, sia quando si tengono in un'atmosfera completamente secca, sia quando si espongono a temperature comprese tra + 40° ed il rosso nascente.

2° Dopo aver subìto la disidratazione parziale, le zeoliti possono riprendere, mediante la semplice esposizione all'aria libera, tutta l'acqua che esse avevano perduto.

3° La temperatura alla quale l'acqua si svolge varia e non deve oltrepassare certi limiti, secondo ciascuna specie, perchè la proprietà igroscopica del minerale si mantenga inalterata.

4° La facilità con la quale si effettua la disidratazione è, con poche eccezioni, in ragione diretta del numero di equivalenti d'acqua contenuti nel minerale.

(1) *Mémoire sur les causes de l'efflorescence de la laumonite.* Compt. Rend., 1846, XXII, 862. *Recherches sur la laumonite.* Annales des Mines, 1846, IX, 325.

(2) *Recherches sur les propriétés hygroscopiques des minéraux de la famille des zéolithes.* Ann. de Chem. et Phys., 1858 (3a), LIII, 438.

(3) Esse sono: stilbite delle Feroë, armotomo di Scozia, heulandite delle Feroë, brewsterite di Scozia, faujasite della Kaiserstuhl, cabasite d'Islanda, facolite di Scozia, idrolite (gmelinite) dell'isola di Cipro, cristianite della Kaiserstuhl, analcime dell'isola di Cipro, levyna d'Islanda, scolezite d'Islanda, mesotipo d'Alvernia, thomsonite del Mittelgebirge.

(4) *Essais sur quelques quartz résinites.* Annales des Mines, (3a), XVII, 191.

(5) *Analyses de la herschelite* Ann. de Chem., et Phys., 1845, (3a), XIV, 97.

Per moltissimi anni non si è fatto altro, sopra tutto per opera di Jannasch (¹) e di Hersch (²), che determinare nuove perdite d'acqua per le diverse zeoliti, e si è considerata come acqua di cristallizzazione quella che veniva emessa al disotto di una certa temperatura, arbitrariamente fissata, e come acqua di combinazione la restante. Sopratutto Tschermak, Hersch e Clarke seguirono fino all'estremo questo ordine di idee, concludendo i due ultimi con lo stabilire perfino delle formule di costituzione (³). È soltanto pensando alle idee dominanti in questo campo, che si può comprendere come per tanto tempo nessuno si sia accorto di quanto fosse debole la base di questa distinzione, che si fondava sul fissare una temperatura arbitraria qualunque, variabile non solo da autore ad autore, ma anche per i singoli minerali del gruppo

Nel 1896 G. Friedel (⁴) cominciava a far conoscere i suoi notevoli lavori sulle zeoliti, che senza dubbio hanno contribuito non poco a richiamare di nuovo l'attenzione degli studiosi sull'importante questione, alla risoluzione della quale hanno portato molto materiale sperimentale.

Non è certamente facile riassumere qui i risultati fondamentali ai quali egli è giunto, tanto più che, nei suoi diversi lavori, non ha sempre sostenuto le medesime idee. Il Friedel ritiene che la perdita di acqua non distrugge affatto lo stato cristallino, che le proprietà fisiche variano con continuità dal minerale idrato a quello disidratato, infine che, poichè, secondo le sue esperienze, l'acqua delle zeoliti può essere sostituita « par n'importe quelle autre substance gazeuse ou liquide, de nature chimique quelconque et même par des substances solides », quest'acqua non compie alcun ufficio importante nel minerale. Facendo suo un concetto espresso già molti anni prima dal Mallard (v. pag. 365), egli conclude che « elle n'est guère plus combinée que ne l'est un liquide à une éponge, elle n'est certainement pas sous forme d'oxhydriles, ni même combinée comme l'eau des hydrates salins ». Quest'acqua speciale viene da lui chiamata « acqua zeolitica ».

Il Friedel con le sue esperienze crede di aver stabilito che la perdita d'acqua « ad una data temperatura non è limitata che dalla tensione del vapore nell'aria umida », cosicchè sembrerebbe dovesse essere possibile disidratare completamente una zeolite ad una temperatura qualunque, purchè vi fosse mantenuta per un tempo sufficiente, in corrente di aria perfettamente secca. Il Friedel, infatti, a proposito di alcune esperienze sull'analcime dice: « On voit que dans l'air sec, la perte croît sans limite, au contraire de ce qui se produit dans l'air humide ». La proporzione d'acqua svolta ad ogni temperatura dipende dalla grandezza dei frammenti: gli equilibri si raggiungono con grande lentezza. Mentre il Damour aveva stabilito che al di là di una certa temperatura, variabile da specie a specie, l'acqua perduta non può più essere com-

(¹) Numerosi lavori stampati nel Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w.

(²) *Der Wassergehalt der Zeolithe.* Inaug.-Dissert. Zürich, 1887.

(³) Clarke ha pubblicato una completa teoria sulla costituzione delle zeoliti (*Die Konstitution der Zeolithe.* Zeitschr. für anorg. Chemie, 1894, VII, 266), ma essa ha perduto ogni importanza dopo i lavori di Friedel e di Tammann.

(⁴) *Sur les zéolithes et la substitution de diverses substances à l'eau qu'elles contiennent.* Compt. Rend., 1896, CXXII, 948 e 1006; *Nouveaux essais sur les zéolithes.* Bull. Soc. franç. de minér., 1896, XIX, nn. 1, 4, 8; XXII, pag. 5 et livr. de juin 1899.

pletamente riassorbita, il Friedel avrebbe trovato che soltanto la fusione fa perdere la « proprietà igroscopica »: finchè esiste il reticolato cristallino, anche una zeolite completamente disidratata può riprendere tutta la sua acqua. Secondo il Friedel « le mode de dissociation est celui d'un système *homogène* et non celui d'un système hétérogène. Il n'y a donc pas, après élimination partielle de l'eau des molécules intactes à côté de molécules entièrement décomposées comme cela a lieu dans le cas des sels ou dans le cas du carbonate de chaux, mais bien une masse homogène dans laquelle la proportion d'eau est moindre partout ».

Nel 1898, cioè durante le esperienze di Friedel, Tammann (1) pubblicava le sue ricerche sulla tensione di vapore delle zeoliti. Dalle sue misure risultò che la tensione di vapore alla temperatura ordinaria varia con continuità insieme alla composizione, e stabilì con una elegante dimostrazione, che altrettanto deve avvenire al crescere della temperatura. Le zeoliti sono, perciò, secondo Tammann, soluzioni solide.

Anche A. Hamberg (2) si occupò della questione, senza però eseguire esperienze: egli ritenne impropri i termini di acqua di cristallizzazione e di acqua di composizione e preferibile quello di acqua disciolta o diluta, perchè anch' egli fu di avviso che l'acqua fosse da considerarsi come disciolta nel cristallo in una soluzione solida. Alle stesse conclusioni giunse il Rinne (3), in un lavoro di cui si parlerà a proposito della heulandite.

Era questo lo stato della questione, quando, verso la fine del 1900, cominciai ad occuparmi dello studio chimico delle zeoliti delle leucititi dei dintorni di Roma (4).

Fin da allora mi ripromisi anch' io di eseguire delle esperienze, per portare un contributo, sia pure tenuissimo, a queste ricerche così interessanti, ma solamente al principio del 1904 mi fu possibile iniziarle, grazie alla cortesia con la quale il prof. Montemartini ha messo a mia disposizione i mezzi necessari, con una bontà della quale gli sono veramente grato.

Il desiderio di occuparmi anch' io dell'argomento era naturale, se si pensa che molte delle conclusioni del Friedel non mi sembravano giustificate. La possibilità di sostituire all'acqua delle zeoliti l'ammoniaca, l'alcool ecc. non mi pareva allora, così come non mi sembra anche adesso, sufficiente per dire che quest'acqua si trova in condizioni non diverse da quelle di un liquido che imbeve una spugna, e non allo stato di acqua di cristallizzazione o di combinazione.

È noto che l'alcool può sostituire l'acqua di cristallizzazione: per non dilungarmi citerò soltanto il cloruro di calcio, che cristallizza con sei molecole d'acqua, ma anche con quattro di alcool e che è in grado di unirsi pure ad altri prodotti organici

(1) *Ueber die Dampfspannung von krystallisierten Hydraten, deren Dampfspannung sich kontinuerlich mit der Zusammensetzung ändert.* Zeitschr. phys. Chemie, 1898, XXVII, 323.

(2) Svensk kemisk Tidschrift., 1900, 103.

(3) *Beitrag zur Kenntniss der Natur der Krystallwassers.* Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. 1899, I, 1.

(4) *Kurzer Beitrag zur chemischen Kenntniss einiger Zeolithe der Umgegend Roms.* Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. 1902, II, 63.

(alcool metilico, acetone ecc.) secondo rapporti definiti ([1]), il cloruro di zinco, di cui si conoscono cristalli con una molecola di acqua ed altri con una di alcool di cristallizzazione ([2]), il nitrato di magnesio ([3]), il cloruro di magnesio, che può cristallizzare con sei molecole d'acqua ovvero con sei di alcool metilico od etilico, ecc.

Nè è meno noto, passando a fenomeni più complessi, che, in composti chimici stabilissimi e ben definiti, l'ammoniaca e l'acqua possono sostituirsi molecola per molecola: basterà che io ricordi i sali metallammoniacali, così genialmente interpretati dal Werner ([4]), il quale ritiene che l'ammoniaca può essere sostituita non soltanto dall'acqua, ma anche da solfuri, alcooli, etere, ossido di carbonio, etilene, i quali hanno un ufficio variabile con la loro natura, ma fondamentalmente del tutto analogo. E B. Kuriloff ([5]) in un accurato lavoro sulla dissociazione dei sistemi che si formano mediante l'assorbimento dell'ammoniaca da parte dei sali, ha trovato che l'ammoniaca stessa si comporta esattamente come l'acqua nei sali idrati.

Ed anche per la sostituzione di composti solidi all'acqua, ammesse giuste le esperienze di Friedel, non ci sarebbe molto da sorprenderci, se si pensa che nei minerali del gruppo sodalite-haüynite il cloruro di sodio ed i solfati di sodio e calcio, hanno, secondo un gran numero di studiosi, una funzione simile a quella dell'acqua di cristallizzazione, e che le belle e numerose esperienze di St. J. Thugutt ([6]), proseguite recentemente da Z. Weyberg ([7]), parlano molto a favore di questo modo di vedere.

Nè la possibilità di far riprendere alle zeoliti l'acqua perduta, nè il fatto che alcune di esse, mantenute in un'atmosfera umida, aumentano di peso, costituiscono delle differenze dagli idrati, per parecchi dei quali è noto accadere altrettanto. I cristalli di acido ossalico anidro, esposti all'aria, perdono la trasparenza ed assorbono esattamente due molecole d'acqua ([8]); il cloruro di bario cristallizzato, lasciato da Lescoeur ([9]) per due mesi sotto una campana umida, aumentò in modo continuo di peso. Così pure è stato già osservato in varî sali idrati quanto Friedel ha notato sull'influenza che la velocità della corrente d'aria esercita sulla disidratazione. Zeidler ([10]), per es., ha trovato che sulla disidratazione del gesso ha grande importanza il fatto che il riscaldamento avvenga in corrente d'aria o in aria immobile; il cloruro di bario perde la sua acqua a 100° ma in corrente d'aria già a 76° ([11]) ecc.

([1]) Michaelis, *Ausführliches Lehrbuch der anorganischen Chemie*, II, 538.

([2]) Ibidem, III, 778.

([3]) Ibidem, III, 741.

([4]) *Beitrag zur Konstitution anorganischer Verbind.* Zeitschr. für anorg. Ch., 1893, III, 267.

([5]) Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, 1896 (8), I, 1-71. Di questo lavoro ho letto soltanto il largo sunto che, su dati dell'autore, ne ha fatto F. W. Küster, nei suoi *Fortschritte der physikalischen Chemie während des Jahres 1896*. Zeitschr. für anorg. Chemie, 1897, XV, 344.

([6]) *Mineralchemische Studien*. Zeitschr. für anorg. Chemie, 1892, II, 65 e 113.

([7]) *Zur Kenntniss der Sodalithreihe*. Centralbl. für Min. Geol. Pal., 1904, 727.

([8]) A. Villiers, *Sur l'acide oxalique cristallisé*. Comp. Rend., 1880. XC, 821; H. Lescoeur, *Recherches sur la dissociation des hydrates salins et dee composés analogues*. Ann. de Chem. et Phys., 1890 (6), XIX, 56,

([9]) *Sur les hydrates du chlorure de baryum*. Comp. Rend., 1887, CIV, 1511.

([10]) *Muspratt's Chemie*, 1889, II, 361.

([11]) Michaelis, *Ausführliches Lehrbuch der anorganischen Chemie*, III, 660.

Due fatti sono tali, secondo il mio modo di vedere, da distinguere nettamente le zeoliti dai sali idrati, e cioè:

1° che la curva di disidratazione in funzione della temperatura è continua;

2° che la perdita di peso ad una data temperatura dipende dalla tensione del vapor d'acqua esistente nell'ambiente in cui avviene la disidratazione.

Questi due fatti, però, conducono ad una conclusione ben diversa da quella a cui giunse il Friedel. Se davvero fosse possibile far crescere la perdita d'acqua ad una certa temperatura « sans limite » nell'aria mantenuta secca, allora si avrebbe il caso di una dissociazione. Non potrebbe mai trattarsi di un *sistema omogeneo*, come dice il Friedel, perchè i sistemi omogenei sono i monofasici, mentre nel caso delle zeoliti, ammettendo anche le conclusioni di Friedel, si avrebbe « une masse homogène dans laquelle la proportion d'eau est moindre partout », che sta però in equilibrio con una fase gassosa: si tratta, quindi, di un sistema eterogeneo. E se due sole sono le fasi, si ha che fare con una soluzione solida e non con un composto od un idrato, perchè in questo caso le fasi dovrebbero essere tre. Le zeoliti sarebbero allora analoghe all' « idruro » di palladio.

Io ho cercato di stabilire in modo certo i seguenti punti, che hanno una grande importanza, secondo me, perchè dalla loro conoscenza è possibile dedurre qualche conclusione non del tutto infondata sulla costituzione delle zeoliti:

1° La perdita di peso nel vuoto su acido solforico cresce senza limite? Dalle esperienze fin qui eseguite è difficile trarre qualsiasi deduzione: anche da quelle di Rinne sulla heulandite, prolungate per molto tempo, non risulta chiaro se si raggiunge un equilibrio o se invece la perdita di peso cresce fino a disidratazione completa, sia pur lentissimamente.

2° La tensione del vapor d'acqua dell'ambiente in cui avviene la disidratazione ad una data temperatura quale influenza ha sulla perdita di peso?

3° Le zeoliti riscaldate al di sotto del punto di fusione possono riprendere l'acqua emessa? Le esperienze di Damour e di Friedel sono, come si è visto, del tutto contradditorie.

4° Una serie di successive disidratazioni parziali e la durata del riscaldamento influiscono sulle proprietà assorbenti?

5° Disidratando le zeoliti per azione del calore è noto che le proprietà ottiche variano: togliendo la stessa quantità di acqua mediante l'azione del vuoto su acido solforico e del calore si ottengono le stesse variazioni?

Su questi due ultimi punti mancano del tutto le esperienze.

Le mie ricerche sono state eseguite sulla heulandite: alcuni risultati furono controllati sulla thomsonite, la cui composizione chimica è molto diversa da quella della heulandite.

*
* *

Sull'acqua della heulandite esistono ricerche di Damour, di Jannasch, di Hersch e di Rinne. Le perdite d'acqua determinate dai tre primi autori sono, per le stesse

temperature, abbastanza discordanti, benchè l'acqua totale sia poco diversa, come risulta dal seguente specchietto:

	100°	150°	190°	195°
Damour, Feroë	2.10	8.70	12.30	—
Jannasch, Berufjord . . .	3.33 (1)	5.97 (2)	—	—
Hersch, Djupivogur. . . .	2.64	6.14 (3)	—	7.47

	200°	250°	300°	340-350°	rosso
Damour, Feroë	—	—	—	—	15.80
Jannasch, Berufjord . . .	8.05	8.89	12.66	13.45	16.82
Hersch, Djupivogur. . . .	—	10.97	12.06 (4)	—	16.34

Secondo Damour l'acqua emessa a 190° non è ripresa che molto lentamente, tenendo la zeolite all'aria: dopo due mesi la perdita è ridotta a 2,10 %.

Le esperienze più complete sulla heulandite sono dovute a Rinne (loc. cit.). Tenendo il minerale in essiccatore su H_2SO_4 (senza vuoto), si ha equilibrio quando la perdita ha raggiunto 4,17 % (dopo 701 ore); nel vuoto nemmeno dopo 400 ore era raggiunto un vero equilibrio, benchè ormai la perdita di peso non crescesse che con estrema lentezza. Il Rinne, tenendo la heulandite nel vuoto a 100°, non riuscì a raggiungere l'equilibrio. Determinò poi la perdita di peso in stufe ad aria fino alla temperatura di 515°, senza ottenere ancora la completa disidratazione, e notò che riscaldando in ambiente più ricco di vapor d'acqua, la perdita di peso è minore (s'intende ad uguale temperatura). Egli osservò che ad ogni temperatura corrisponde un equilibrio, che si raggiunge molto rapidamente. Il Rinne non studiò, però, la ripresa dell'acqua, nè misurò l'influenza della tensione di vapore dell'ambiente sulla disidratazione.

La heuladite da me studiata proveniva dal Teigarhorn ed era costituita da un unico pezzo assai puro, confusamente cristallizzato, del peso di 110 grammi: da alcuni punti della massa cristallina spuntavano fuori anche parecchi grossi cristalli con le forme solite }010{, }001{, }110{, }101}, }$\bar{1}$01{ e, raramente, }021{ (orientazione di Des Cloizeaux). Il colore di tutto il campione era bianco puro, ad eccezione di pochi punti della superficie lievemente colorati in roseo dall'ossido di ferro, e che, naturalmente, furono eliminati. Dal campione si tolsero circa 20 gr., da adoperarsi per possibili esperienze da eseguire su cristalli intieri, il resto fu tutto pestato. Dopo una prima polverizzazione grossolana, si procedette ad una ulteriore di 2 grammi per volta nel mortaio d'agata: la polvere ottenuta veniva setacciata. Si ottenne, così, un campione del tutto uniforme. La polvere era perfettamente bianca.

(1) 100°-110°.
(2) 150°-160°.
(3) 145°.
(4) 290°.

Ho creduto non inutile determinare esattamente la composizione del materiale su cui dovevo sperimentare. Ho avuto i seguenti risultati:

SiO_2	58.49	0.968	
Al_2O_3 (1)	15.74	0.154	
CaO	6.48	0.116	0.151
SrO	0.53	0.005	
Na_2O	1.62	0.026	
K_2O	0.35	0.004	
H_2O	16.60	0.921	
	99.81		

Questa mia analisi è pressochè identica a quella eseguita da H. Biltz [2], il quale ebbe i risultati che seguono:

SiO_2	58.43	0.967	
Al_2O_3	16.44	0.161	
CaO	7.00	0.125	0.153
SrO	0.35	0.003	
Na_2O	1.40	0.023	
K_2O	0.21	0.002	
H_2O	16.45	0.913	
	100.28		

Da queste due analisi si ricavano i seguenti rapporti:

	SiO_2	:	Al_2O_3	:	RO	:	H_2O
Zambonini	6.41	:	1.02	:	1	:	6.10
Biltz	6.32	:	1.06	:	1	:	5.97

che danno per la silice un valore notevolmente superiore a quello richiesto dalla formula $CaAl_2Si_6O_{16}, 5H_2O$ o $6H_2O$, generalmente ammessa. La formula che si ricaverebbe da ambedue le analisi sarebbe $R_2Al_4Si_{13}O_{34}.12H_2O$.

Ho cominciato con lo studiare l'azione dell'acqua sulla heulandite del Teigarhorn, essendomi accorto che l'acqua la decompone energicamente. Facendo bollire pochi minuti in una provetta una piccolissima quantità di polvere con un po' d'acqua ed aggiungendo una goccia di fenolftaleina, si hà una colorazione rosea abbastanza intensa [3].

(1) Con tracce minime di Fe_2O_3. Ho constatato che nella heulandite del Teigarhorn il titanio manca completamente. Perfino la sensibilissima reazione dell'acqua ossigenata, eseguita su parecchi grammi di sostanza, dette risultato negativo.

(2) In P. Jannasch, *Ueber das Vorkommen von Strontian in Heulandit.* Berichte der deutsch. chem. Gesell., 1887, XX, 348.

(3) Non ignoro che il vetro è intaccato abbastanza fortemente dall'acqua, e conosco le esperienze di F. Kohlrausch, dalle quali risulta che tenendo dell'acqua in certi vetri anche per brevissimo tempo, l'acqua stessa diviene abbastanza impura, così da far variare considerevolmente la sua conducibilità elettrica. Ho perciò eseguito una prova in bianco, con la medesima provetta, riscaldando per lo stesso tempo, ma non ho ottenuto il minimo accenno di colorazione.

Ho eseguito due esperienze, facendo bollire a ricadere in un pallone di vetro di Jena per un certo numero di ore la polvere di heulandite con quantità diverse di acqua, e determinando poi l'alcalinità del liquido con una soluzione titolata di acido acetico, adoperando la fenolftaleina come indicatore. Ecco i risultati:

a) gr. 0,5192 di heulandite si misero in un pallone di vetro di Jena con cc. 160 di acqua distillata e si fece bollire a ricadere per 25 ore. Per far sparire la colorazione rosea prodotta dalla fenolftaleina si impiegarono cc. 1,60 di una soluzione di acido acetico che conteneva gr. 0,007125 di $C_2H_4O_2$ per centimetro cubico, ossia g. 0,0114, corrispondenti a gr. 0,0053 di CaO. Nella sostanza impiegata fra CaO, SrO e Na_2O vi è circa il 9 %, quindi gr. 0,0467; si è dunque decomposto circa $^1/_9$ della sostanza impiegata (11, 3 %),

b) gr. 0,4998 di heulandite si fecero bollire a ricadere per ore 140 con cc. 500 di acqua distillata. Occorsero cc. 5,10 della soluzione di acido acetico suddetta, ossia gr. 0,03634 di acido acetico, equivalenti a gr. 0,01696 di CaO, mentre nella polvere adoperata se ne contenevano (compresi SrO, Na_2O), gr. 0,04498, dal che segue che è stato decomposto circa il 37,7 % del minerale impiegato.

In queste due esperienze risulta chiara non soltanto la forte azione che l'acqua esercita sulla heulandite, ma anche la grande influenza che su di essa esercitano la massa ed il tempo, due fattori che nei fenomeni geologici, benchè spesso trascurati, hanno una importanza grandissima.

Il Damour [1] ha studiato l'azione dell'acqua sulla natrolite, ed ha trovato che il minerale disidratato è molto più fortemente intaccato dell'idrato. Ho voluto ricercare se altrettanto avviene nella heulandite.

c) gr. 0,6482 di heulandite furono disidratati completamente a circa 800°, riducendosi così a gr. 0,5415, e poi furono messi a bollire a ricadere per ore 25 con cc. 200 di acqua distillata. Si impiegarono cc. 0,3 della solita soluzione di $C_2H_4O_2$, ossia gr. 0,002138 di acido acetico, equivalenti a gr. 0,001 CaO, dal che si deduce che fu decomposto appena $^1/_{58}$ del minerale impiegato.

Dunque sulla heulandite disidratata l'acqua esercita un'azione molto meno considerevole che su quella naturale, al contrario di quanto Damour ha constatato accadere nella natrolite.

Quest'azione dell'acqua sulle zeoliti spiega come mai esse, bagnate con acqua e fenolftaleina, dieno una reazione alcalina. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che l'acqua, decomponendole, manda in soluzione quantità maggiori o minori di alcali [2].

(1) *Recherches sur la composition des eaux silicifères de l'Islande*. Annales de Chim. et Phys. (3), XIX, 470.

(2) Basandosi sulla teoria dei ioni, Ostwald (*Die wissenschaftlichen Grundlagen der analytischen Chemie*, pag. 63), ha spiegato come i sali neutri possano dare reazione acida od alcalina, ma per le zeoliti mi pare sia da adottarsi la spiegazione suddetta.

Comportamento della heulandite in aria satura di umidità.

È noto che le zeoliti tenute in aria satura di umidità assorbono acqua. Per la heulandite io ho trovato:

in ore	acqua assorbita
358	0.74 %
556	1.07
3022	1.67
4082	1.57

Dal che risulta che viene assobita dell'acqua fino ad un certo limite. Le lievi oscillazioni intorno a 1,67 % sono causate, probabilmente, dalle piccole variazioni di temperatura dell'ambiente esterno.

Comportamento nel vuoto su H_2SO_4.

L'esperienza fu eseguita tenendo la polvere della heulandite in un crogiolo aperto su H_2SO_4, in un essiccatore nel quale si produceva il vuoto. Si ebbero i seguenti risultati:

Acqua eliminata in	3 ore	. . . .	2.36 %
» » »	5 »	. . . .	2.62
» » »	24 »	. . . .	4.86
» » »	48 »	. . . .	5.25
» » »	72 »	. . . .	5.44
» » »	118 »	. . . .	5.63
» » »	190 »	. . . .	5.86
» » »	310 »	. . . .	6.08
» » »	550 »	. . . .	6.08

Da questi numeri risulta:

1° Dopo circa 310 ore si raggiunge l'equilibrio.

2° L'acqua viene eliminata con grande rapidità nelle prime ore, ma in seguito con grande lentezza, come risulta dalla fig. 1ª.

Müller-Erzbach ha fondato, come è noto, il suo metodo per determinare il numero degli idrati di un sale o di un ossido sul fatto che la velocità di dissociazione rimane costante finchè esistono ancora parti di un idrato superiore, e varia non appena questi è completamente decomposto e comincia la dissociazione di un idrato inferiore. Nelle condizioni in cui io ho sperimentato sulla heulandite la velocità di disidratazione varia invece continuamente, come mostra anche la fig. 1.

Ho voluto vedere come avveniva la ripresa dell'acqua emessa. Della heulandite tenuta per 24 ore nel vuoto, su acido solforico, e che aveva perduto 4.90 %, riprese,

posta in ambiente saturo d'umidità, tutta l'acqua svolta in circa un'ora, ossia in $^1/_{24}$ del tempo impiegato ad emetterla.

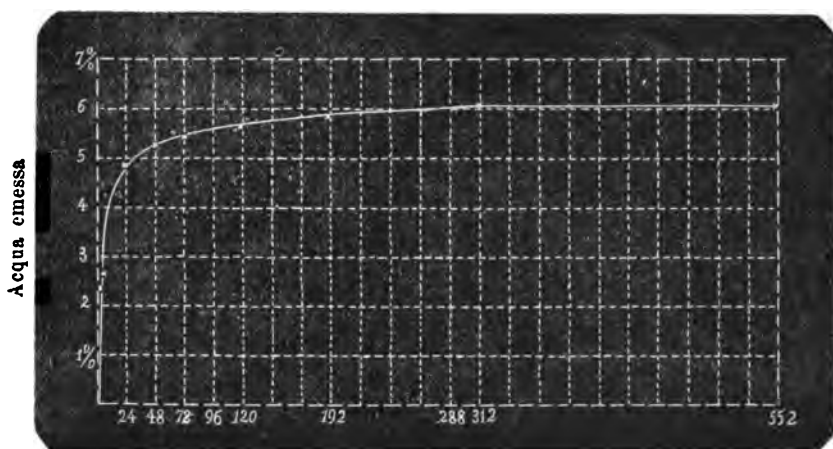



Fig. 1.

Influenza della tensione del vapore d'acqua dell'atmosfera in cui avviene la disidratazione sulla perdita di peso a varie temperature.

Furono eseguite due serie di esperienze: una riscaldando la zeolite a varie temperature in corrente di aria secca, l'altra in corrente di aria umida. Fino a circa 200° si adoperò un bagno di olio di vasellina, per le temperature superiori un bagno di nitrato di sodio e di potassio. Il crogiolo con la zeolite, sostenuto da un opportuno congegno in platino, si poneva in fondo ad un lungo tubo di vetro chiuso ad un'estremità, che si immergeva per un buon tratto nel bagno: questo tubo si chiudeva con un tappo, attraverso al quale passavano due tubetti di vetro, per la corrente d'aria. Quest'ultima era prodotta da un aspiratore, ed in tutte le esperienze ebbe la velocità di 3-4 bolle al secondo.

Per avere l'aria secca la si faceva passare attraverso tre metri di cloruro di calcio ed una bottiglia di lavaggio con H_2SO_4: un'altra bottiglia simile si poneva tra il tubo con la zeolite e l'aspiratore. La corrente umida si otteneva facendo attraversare all'aria diverse bottiglie di lavaggio contenenti acqua.

Le determinazioni eseguite hanno dimostrato che non solo in corrente di aria umida, ma anche in quella di aria secca, ad ogni temperatura corrisponde un equilibrio, il quale, al contrario di quanto Friedel ha constatato per le zeoliti su cui ha sperimentato, si raggiunge molto rapidamente. A 60°-62° la perdita subita in tre ore non aumentava, dopo altre tre ore, che di 0,38 °/₀ per l'esperienza in corrente d'aria umida e di 0,18 °/₀ per quella in aria secca: già a 100° la perdita subita nelle prime tre ore non subiva ulteriori aumenti. Fino alla temperatura di 160° si adoperò sempre la stessa polvere, alla quale si lasciava riprendere l'acqua dopo ogni esperienza: ho fatto ciò, avendo stabilito, con ricerche che verranno ulteriormente riferite, che una

serie anche lunga di successive disidratazioni a 150° non determina traccia di modificazioni, per quel che riguarda l'uscita e la ripresa dell'acqua. Per le temperature superiori a 160° ogni trattamento fu eseguito con una porzione speciale di polvere.

Ecco i risultati ottenuti (la temp. esterna era di 18°-19°):

T	Aria secca	Aria umida
60°- 62°	2.99 %	1.63 %
100-103	4.70	3.02
151	—	5.08
160-165	7.20	—
189-190	8.93	—
230	12.04	—
234	—	8.20
241-244	—	8.80
272	—	11.08
284	—	12.00
303	13.19	—
305-306	—	12.67
369-370	—	13.92
375	14.30	—
410-415	14.80	—
420	—	14.74

Con essi si sono costruite le curve della fig. 2.

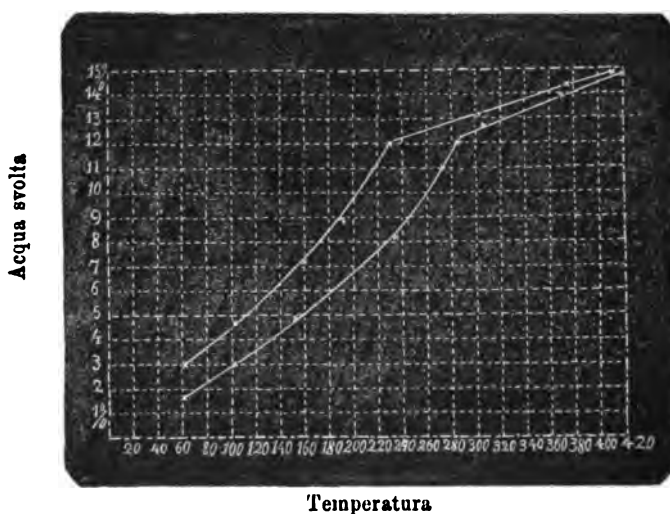



Fig. 2.

Dalle due curve qui sopra disegnate risulta chiaramente che l'influenza della tensione di vapore dell'ambiente sulla disidratazione varia con la temperatura: presenta un massimo fra 230° e 240° (3,80 % di differenza nella perdita d'acqua), e tende

ad eliminarsi verso la temperatura di disidratazione completa e verso quella ordinaria. Il percorso delle due curve è molto simile, soltanto che le caratteristiche di quella in aria secca si ripresentano in quella in aria umida, ma a temperatura più elevata. Ambedue presentano un punto dopo il quale il loro andamento cambia e proseguono pressochè in linea retta, almeno per un notevole intervallo di temperatura (circa 180°).

Per meglio stabilire l'influenza della tensione di vapore dell'ambiente sulla disidratazione, ho studiato anche, sotto questo punto di vista, la thomsonite dei basalti di Table Mt, presso Golden, nel Colorado. Il mio campione era costituito da masserelle cristalline a struttura radiata. Fu polverizzato come la heulandite.

La composizione chimica di questa thomsonite è esattamente conosciuta, grazie alle tre analisi di W. F. Hillebrand (Dana's Mineralogy, pag. 608): per accertare in modo indubbio la purezza del mio materiale ho eseguito la determinazione dell'acqua (13,05 %) e della silice (40,79 %). Le esperienze furono eseguite precisamente come per la heulandite.

Anche nella thomsonite gli equilibri si raggiungono a ciascuna temperatura molto rapidamente: già la perdita subita in tre ore a 114°-115° non aumenta prolungando il riscaldamento.

Ecco i risultati ottenuti [1]:

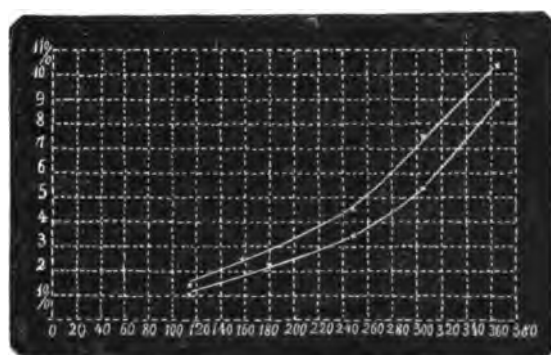
T	Aria secca	Aria umida
114°-115°	1.49	1.12
156-160	2.42	—
180	—	2.25
248	4.47	3.43
305	7.51	5.38
365	10.29	8.86

Temperatura

Fig. 3.

Con questi dati si sono costruite le curve della fig. 3.

[1] La disidrazione della thomsonite fu studiata da Damour e da Hersch. La thomsonite del Mittelgebirge secondo Damour perde in un'ora a 180° 4,10 %, in due ore a 220° 5,20 %, a 280°, ugualmente in due ore, 6,10 %. Hersch per la faroëlite trovò: a 100° 1,61 %, a 150°, 3,68 %, a 195°, 4,84 %, a 240° 5,58 %, a 305° 7,95 %, al rosso 14,98 %; per la mesolite di Hauenstein: a 100° 2,43, a 160° 3,19, a 200° 4,93, a 250° 5,99, a 300° 7,92, al rosso 14,50 %.

Anche nella thomsonite le curve di disidratazione in funzione della temperatura sono molto regolari. L'influenza della tensione del vapor d'acqua dell'ambiente tende anche qui ad annullarsi verso la temperatura ordinaria: fino alle temperature raggiunte, non si nota ancora l'altra diminuzione rapida che si ha nella heulandite man mano che ci si avvicina alla disidratazione completa.

Ho eseguito varie esperienze per stabilire se la grandezza dei frammenti aveva o no influenza sulla perdita di peso ad una certa temperatura. Nel suo primo lavoro (¹). il Friedel asserisce che questa influenza è molto notevole, ma in seguito (²) ne ha grandemente diminuita l'importanza. Da numerose determinazioni che io ho istituito sulla heulandite in polvere fina, in laminette dello spessore di $30\text{-}50/_{100}$ mm. e 2-4 mm. di lunghezza e larghezza e finalmente in lastre uniche del peso di 0,5-0,6 g. mi sono convinto che la grandezza dei frammenti influisce solo sul tempo necessario a raggiungere l'equilibrio, ma, come del resto era prevedibile, non ha alcuna influenza, almeno nei limiti ordinari degli errori di osservazione, sulla quantità totale di acqua svolta ad una determinata temperatura.

L'acqua emessa può essere riassorbita?

Come si è accennato in principio, è questo un quesito molto importante, che durante il lungo periodo di tempo trascorso dalle esperienze di Damour a quelle di Friedel è stato sempre considerato come risolto nel senso che tutte le zeoliti, riscaldate al disopra di una certa temperatura variabile da specie a specie, non possono riassorbire che tutt'al più una parte dell'acqua perduta. Secondo Friedel, invece, essa viene riacquistata tutta, purchè il minerale non sia stato fuso.

Damour eseguiva le sue esperienze tenendo all'aria le zeoliti che erano state sottoposte al riscaldamento, ma è evidente che questo metodo è assai poco preciso, perchè le condizioni igrometriche e di purezza dell'aria, specie nei laboratori, sono soggette a variazioni sensibilissime.

Io ho creduto, perciò, di procedere in modo diverso, collocando i crogiuoli contenenti la heulandite stata riscaldata sull'acqua, sotto una campana. L'esposizione era così fatta ad un'aria satura di vapor d'acqua alla temperatura dell'ambiente, che variò dai 18° ai 20° durante le esperienze. I crogiuoli venivano messi la sera sull'acqua e si pesavano la mattina successiva, dopo 15-16 ore. Una grave difficoltà da superare è quella di impedire il deposito di acqua sulle pareti dei crogioli, che avviene abbastanza facilmente, come ha avuto occasione di notare il van Bemmelen nei suoi studi sulla ripresa dell'acqua da parte di idrogeli disidratati. E per me era tanto più difficile eliminare questo inconveniente, in quanto non avevo a mia disposizione nè camere isolate esposte a tramontana, nè casse imbottite: tuttavia, grazie alle precauzioni prese, soltanto pochissime esperienze furono disturbate così da doverle abbandonare.

La heulandite riscaldata a temperature non superiori a 245° ha sempre riassorbito tutta l'acqua perduta, operando nel modo suddetto, dopo le 15 o 16 ore di

(¹) Compt. rend. 1896, CXXII, 948.

(²) Bull. soc. franç. de minér. 1896, XIX, n. 8.

esposizione all'aria umida. Le cose cambiano bruscamente, quando il riscaldamento avviene ad una temperatura vicina o superiore a 300°.

Gr. 1,5185 di heulandite tenuti per tre ore in corrente di aria secca a 303° subirono una perdita di peso del 13,19 %. Sull'acqua diminuì nel modo seguente:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
14	5.86 %	7.33 %
39	3.06	10.13
64	2.15	11.04
88	1.78	11.41
209	0.92	12.27
591	0.63	12.56
903	0.56	12.63
1071	0.49	12.70
1671	0.32	12.87
2151	0.34	12.85

Sembra aversi, quindi, una perdita di peso definitiva di circa 0,30 % (¹):

Per gr. 1,3180 di heulandite, riscaldati per tre ore a 369° in corrente di aria umida, la perdita di peso si elevò a 13,92 %. L'acqua non fu ripresa che con estrema lentezza, come risulta dalla seguente tabella:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
15	12.62 %	1.30 %
39	12.10	1.82
64	11.84	2.08
185	10.91	3.01
567	10.09	3.83
879	9.56	4.36
1023	9.47	4.45
1623	9.42	4.50
2103	9.26	4.66
2685	8.35	5.57
2949	8.19	5.73
3182	8.03	5.89
3614	7.91	6.01
3926	7.58	6.34
4358	7.15	6.77
4647	6.90	7.02
5679	6.74	7.18
6992	6.06	7.86

(¹) Tutte le volte che dalle pesate sembra raggiunto un equilibrio, io non ho davvero la pretesa di considerarlo come stabile. Potrebbe benissimo accadere che in capo ad un tempo più o meno lungo dell'altra acqua venisse ancora assorbita. Questa riserva è tanto più necessaria, se si pensa che alcuni idrogeli studiati dal van Bemmelen (vedi in seguito), dopo essere rimasti con peso costante uno o due anni hanno poi ricominciato ad assorbire acqua.

Gr. 1,0461 perdettero a 375° in corrente di aria secca il 14,30 %; anche in questo caso l'acqua fu riassorbita con grandissima lentezza:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
14	13.37 %	0.93
38	12.91	1.39
63	12.78	1.52
112	12.38	1.92
233	11.52	2.78
615	10.60	3.70
827	10.49	3.81
1071	10.41	3.89
1671	9.85	4.45
2151	9.67	4.63
2732	9.44	4.86
2997	9.34	4.96
3230	9.19	5.11
3662	9.06	5.24
3979	8.79	5.51
4406	8.48	5.82
4695	8.15	6.15
5295	7.89	6.41
5727	8.08	6.22
6351	8.05	6.25
6759	7.94	6.36
7040	7.77	6.53

Dopo oltre nove mesi in queste due ultime esperienze non si è ancora raggiunto un equilibrio, e l'acqua riassorbita è appena la metà di quella emessa.

A 410°-415° gr. 1,3301 emisero il 14,80 % d'acqua in corrente in aria secca: essa fu ripresa nel modo seguente:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
15	14.01 %	0.79 %
39	13.82	0.98
232	13.36	1 44
1215	13.04	1.76
1503	12.71	2.09
1935	12.21	2.59
2541	12.20	2.60
3166	12.36	2.44
3574	12.35	2.45
3855	12.23	2.57

Gr. 1,6096, che avevano perduto, a 419°-421°, in corrente di aria umida, il 14,74 %, riassorbirono una piccola quantità di acqua.

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
15	13.94 %	0.80 %
39	13.85	0.89
232	13.48	1.26
1191	13.13	1.61
1479	12.99	1.75
2517	12.58	2.16
3142	12.63	2.11
3550	12.79	1.95
3831	12.69	2.05

In questa e nella precedente esperienza sembra ottenersi un vero equilibrio; infatti per un periodo di tempo abbastanza lungo non si sono avute che lievi differenze in vario senso nelle pesate.

Gr. 1.1522 tenuti per sole due ore a 480°-484° in corrente di aria secca subirono una perdita di peso uguale a 15.21 %. Non si ebbe che un riassorbimento minimo, dovuto probabilmente ai fenomeni igroscopici che presentano generalmente le polveri, come risulta dai numeri che seguono.

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
40	14.25 %	0.96 %
382	14.18	1.03
1011	14.37	0.84

Le esperienze surriferite dimostrano in modo indubbio che ad una temperatura prossima a 300° nelle proprietà della heulandite avviene un cambiamento, che si esplica in una brusca e rapida diminuzione della facoltà di riassorbire l'acqua emessa: è anche da notare che quando sopravviene questa modificazione; la curva di disidratazione ha cambiato andamento ed ha subito un'inflessione. Contemporaneamente anche la velocità di riassorbimento dell'acqua subisce una forte diminuzione e va sempre più rapidamente riducendosi man mano che la temperatura si eleva.

Il 12,04 % perduto a 230° in corrente in aria secca viene ripreso in 15 ore (o meno), mentre la heulandite riscaldata a 303° non riassorbe nello stesso tempo che 7,33 %, ossia poco più della metà e se la temperatura ha raggiunto 370° appena 1 %. Al disopra di 400° non viene ripresa, a quanto pare, che una piccola quantità dell'acqua svolta.

Dalle esperienze eseguite a 369° in aria umida e a 375° in aria secca sembra che il fatto che il riscaldamento sia eseguito in corrente di aria secca o di aria umida abbia una notevole influenza sulla velocità di riassorbimento dell'acqua, Mentre, infatti, la quantità di acqua emessa è poco d.versa (13,92 e 14,30 % rispettivamente), pure la heulandite riscaldata in aria secca riacquista la sua acqua, almeno nelle prime set-

temila ore, con una velocità molto minore di quella che lo fu in aria umida: a st'ultima, per esempio, per riprendere 4,4 % di acqua, sono sufficienti 879 ore, all'altra, invece, ne occorrono ben 1671.

Stabilito così che, almeno per la heulandite, esiste una temperatura alla quale la velocità di riassorbimento dell'acqua diminuisce fortemente e sempre più, poi, man mano che la temperatura si innalza, e che è probabile che l'acqua emessa venga ripresa soltanto in parte, quando ancora la disidratazione è solo parziale, ho voluto studiare come si comporta, sotto questo riguardo, la heulandite completamente disidratata. A questo scopo, ho scaldato a 750° circa (1) una certa quantità di heulandite. L'esposizione alla fiamma non durò che un'ora e un quarto. Il crogiolo fu messo sull'acqua e si continuò a pesarlo ad intervalli per oltre sei mesi, senza che si potesse verificare la minima variazione di peso. Esaminando la polvere al microscopio, potei convincermi con tutta certezza, che essa non aveva subìto la più piccola traccia di fusione, e che non mostrava alcun segno di aggregazione.

La conclusione di Friedel che solo la fusione annulla nelle zeoliti la proprietà di riassorbire l'acqua svolta per azione del calore, non è affatto applicabile alla heulandite. Nè lo è di più alla thomsonite (2).

La velocità di riassorbimento dell'acqua è, nella thomsonite, minore che nella heulandite: anche per perdite di peso poco considerevoli le sole 15 ore, sufficienti alla heulandite, non bastano per ridurre a zero le perdite stesse, ma ne occorrono invece circa 40. Fino a 300° l'acqua emessa viene ripresa in questo tempo, ma a 365° il riassorbimento sembra essere soltanto parziale, gr. 1,2998 di thomsonite riscaldati a 365° in corrente di aria secca e che avevano subito una perdita di peso uguale a 10,29 %, tenuti sull'acqua si comportarono così come risulta dalla tabella seguente:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
15	9.49 %	0.80 %
39	9.48	0.81
159	9.36	0.93
424	9.22	1.07
761	9.23	1.06
1097	9.36	0.93

Per gr. 1,0563 che, scaldati a 365° in corrente di aria umida avevano perduto 8,86 %, si ebbe:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
17	8.14 %	0.72 %
89	7.61	1.25
354	7.12	1.74
691	6.98	1.88
1027	7.08	1.78

(1) La temperatura fu determinata con un pirometro Le Chatelier.

(2) Secondo Damour la perdita subita dalla thomsonite in un'ora a 180° (4,10 %) dopo quattro giorni di esposizione all'aria si riduce a 3,80 %; la thomsonite riscaldata a 280° ed esposta all'aria libera non riprende acqua che con estrema lentezza: in capo a 40 giorni si riduce a 1,50 % e non varia ulteriormente.

Si fece ancora una esperienza. Gr. 1.1024 di thomsonite furono scaldati per due sole ore a 420° in corrente di aria umida: si constatò una perdita di peso uguale a 9.26 %. Il comportamento sull'acqua risulta dal seguente specchietto:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
16	9.08	0.18 %
281	9.09	0.17
1727	9.01	0.25

Si può quindi affermare che almeno durante 1727 ore di esposizione all'aria satura di umidità la thomsonite tenuta due ore a 420° non riassorbe affatto acqua. (Il piccolissimo riaumento di peso dipende evidentemente dalle diverse condizioni di pesata e dalla igroscopicità delle polveri).

La thomsonite, si comporta, perciò, coma la heulandite, soltanto che in essa la proprietà di riassorbire l'acqua emessa tende ad annullarsi in un intervallo di temperatura più ristretto. Questi risultati dimostrano anche che la conclusione di Friedel sulla variazione continua delle proprietà delle zeoliti non può applicarsi nè alla heulandite, nè alla thomsonite.

Influenza di una serie di disidratazioni e della durata del riscaldamento sul riassorbimento dell'acqua emessa.

In uno dei suoi ultimi lavori sulle zeoliti, il Friedel [1] ha notato il fatto che la natrolite parzialmente disidratata ed alla quale si è fatta riprendere l'acqua presenta, ove venga nuovamente disidratata, una curva di disidratazione un po' diversa dalla prima. Altre esperienze in proposito mancano e non ne esistono affatto, almeno per quanto mi è noto, sulla seconda parte della questione qui sopra indicata.

Esporrò brevemente i risultati che ho ottenuto. In una prima serie di esperienze, ho riscaldato la polvere di heulandite per 23 giorni di seguito a 155°-160° in una stufa ordinaria ad aria, durante otto ore: tra un trattamento e l'altro si teneva il minerale sull'acqua, nel modo dianzi descritto, durante la notte, allo scopo di far riassorbire l'acqua svolta. Non potei avvertire la minima variazione nè nella quantità di acqua perduta ogni giorno, nè nella velocità con la quale essa veniva ripresa. Devo anzi far notare che, benchè lo stato atmosferico dell'ambiente sia stato soggetto a variazioni abbastanza considerevoli, pure la perdita constatata ogni giorno in capo ad otto ore di riscaldamento oscillò tra 6,06 e 6,24 %, ossia entro limiti compresi fra quelli degli errori di esperienza. Non pare dunque che la heulandite possa servire da sensibile psicrometro, come, secondo Friedel, sarebbe possibile per le zeoliti in genere, e dai miei risultati mi sembra anche di poter dedurre che non è nel giusto Friedel quando dichiara prive di ogni valore le determinazioni di Damour, Jannasch, Hersch, perchè essi non han fatto conoscere lo stato igrometrico dell'atmosfera nella quale eseguirono le loro misure.

[1] Bull. de la soc. franç. de minér., livr. de juin 1899.

Della polvere di heulandite riscaldata per tre ore a 240° in corrente di aria umida, tenuta per le solite 15 o 16 ore sull'acqua, riprese esattamente l'acqua perduta (8,76 %). La tenni allora per altre tre ore a 305°-306°, sempre in corrente di aria umida: la perdita si elevò a 12,67 %. Mediante l'esposizione all'aria satura di umidità, essa diminuì nel modo seguente:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
15	7.92 %	4.75 %
17	7.75	4.92
23	7.02	5.65
38	5.79	6.88
63	4.57	8.10
86	3.78	8.89
110	3.20	9.47
134	2.84	9.83
208	2.44	10.23
329	1.75	10.92
711	1.48	11.19
1023	1.48	11.19
1167	1.50	11.17

Dunque, due disidratazioni parziali successive in corrente di aria umida, una a 240°, l'altra a 305°-306° bastano per produrre due notevolissimi cambiamenti nelle proprietà della heulandite:

1° La velocità con la quale viene riassorbita l'acqua emessa diminuisce fortemente [1].

2° L'acqua svolta viene ripresa, pare, soltanto parzialmente.

In un'altra esperienza si studiò l'influenza combinata di due disidratazioni successive a temperature diverse e del riscaldamento prolungato. Cominciai col riscaldare in una stufa Törner durante 63 ore della polvere di heulandite a 230°-240°: l'ultimo giorno dell'esperienza si tenne alla stessa temperatura un altro crogiolo con heulandite per sole 11 ore. Le diminuzioni di peso furono 7,33 e 7,45 % rispettivamente. Messi sull'acqua, essi riacquistarono esattamente nello stesso tempo (ore 2 ½) il peso primitivo.

La heulandite che era stata riscaldata per 63 ore fu allora tenuta per 61 ore a temperature oscillanti intorno a 290°. Messa sull'acqua, il riassorbimento andò nel modo, seguente (H_2O svolta 11,20 %):

[1] A causa delle due successive disidratazioni, questa velocità diminuisce assai più considerevolmente che nella heulandite scaldata soltanto a 300° per tre ore. Mentre, infatti, nella heulandite trattata per tre ore a 303° in aria secca la perdita di peso si riduce a 1,78 % dopo sole 88 ore, in quella di cui ci occupiamo scende a 1,75 % dopo ben 329 ore.

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
1	10.26 %	0.94 %
2	10.21	0.99
17	8.85	2.35
41	8.36	2.84
65	8.22	2.98
92	7.75	3.45
115	7.08	4.12
143	7.05	4.15
162	6.86	4.34
191	6.76	4.44
235	6.39	4.81
283	6.37	4.83
(1) 2093	3.46	7.74
2381	3.46	7.74
2741	3.46	7.74
3197	3.46	7.74

L'esperimento terminò, perciò, con una perdita di peso, probabilmente definitiva, di 3,46 %.

Un'altra esperienza fu eseguita riscaldando alla stessa temperatura, ma per un tempo variabile, la heulandite. Della polvere di questo minerale fu tenuta a 300°-302° per 11 ore, in corrente di aria secca: un'altra porzione per 53 ore. Le quantità di acqua svolte furono rispettivamente 13,21 e 13,12 %. Dalla tabella seguente risulta come fu ripresa l'acqua, in confronto alla heulandite riscaldata per sole tre ore a 303°:

dopo ore	la perdita si riduce a					
	3 ore		11 ore		53 ore	
15	5.86 %	(7.33 %) (2)	8.32 %	(4.89 %)	10.03 %	(3.09 %)
39	3.06	(10.13)	6.31	(6.90)	8.31	(4.81)
64	2.15	(11.04)	5.11	(8.10)	7.23	(5.89)
88	1.78	(11.41)	4.07	(9.14)	6.48	(6.64)
209	0.92	(12.27)	2.26	(10.95)	4.33	(8.79)
615	0.63 (3)	(12.56)	0.76	(12.45)	3.08	(10.04)
903	0.56	(12.63)	0.76 (5)	(12.45)	1.82 (4)	(11.30)
1049	—	—	—	—	1.69	(11.48)
1071	0.49	(12.70)	—	—	—	—
1362	—	—	—	—	1.69 (5)	(11.43)
1671	0.32	(12.87)	—	—	—	—
1794	—	—	—	—	—	—
2151	0.34	(12.85)	—	—	—	—

(1) Non potei pesare prima essendo rimasto assente da Torino.

(2) I numeri in parentesi rappresentano l'acqua riassorbita.

(3) Ore 591.

(4) Ore 927.

(5) L'esperienza fu a questo punto abbandonata,

Da questi numeri risulta provata all'evidenza l'influenza assai grande che sulla ripresa dell'acqua esercita la durata del riscaldamento, al di sopra, però, di una certa temperatura.

Dalla figura 4 si scorge che le curve ottenute riunendo le perdite di peso che restano dopo l'esposizione all'aria umida per un dato tempo, sono continue e regola-

Ore

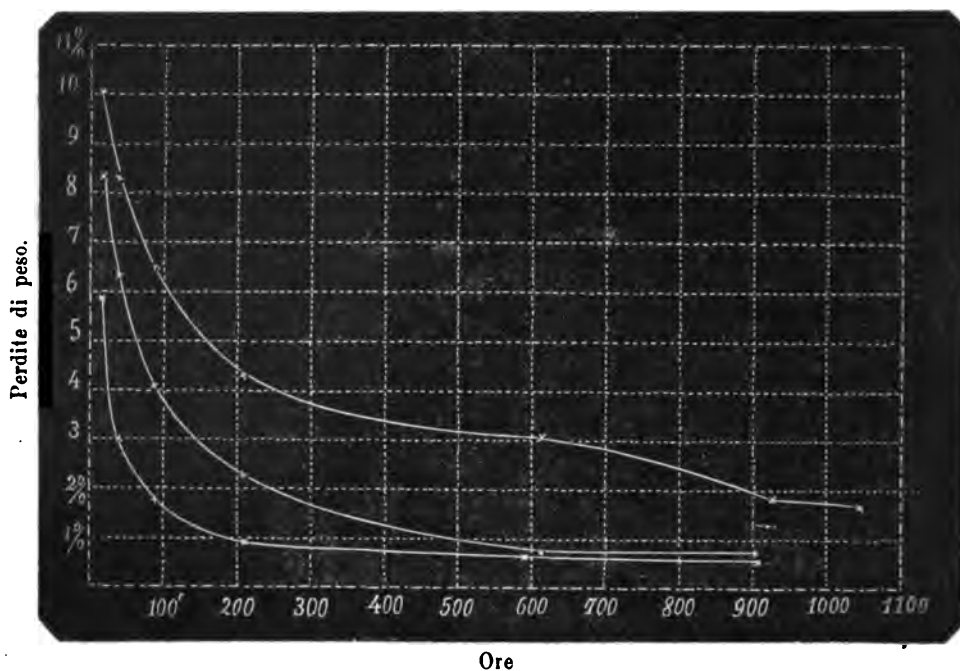



Fig. 4.

rissime, ma di forma diversa, il che induce a credere che il prolungato riscaldamento produce delle vere e proprie modificazioni e non un semplice ritardo nella ripresa dell'acqua, perchè in questo caso le curve avrebbero tutte la stessa forma.

Eseguii ancora una esperienza a 370°. Della polvere di heulandite fu mantenuta per 23 ore a questa temperatura, in corrente di aria secca: l'acqua svolta ammontò a 14,35 % e fu ripresa così come risulta dai numeri che seguono:

dopo ore	la perdita si riduce a	(acqua ripresa)
15	13.63 %	0.72 %
39	23.23	1.12
63	13.11	1.24
112	12.85	1.50
233	12.67	1.68
735	11.99	2.36
1047	11.69	2.66
1479	11.52	2.83
2373	10.01	3.34
2998	10.94	3.41
3406	10.89	3.46
3687 (1)	10.92	3.43

(1) A questo punto, quando sembrava raggiunto un equilibrio, l'esperienza fu interrotta da un incidente.

i quali dimostrano che l'influenza della durata del riscaldamento sulle proprietà assorbenti cresce fortemente man mano che la temperatura aumenta.

Influenza della disidratazione sulle proprietà ottiche della heulandite.

Des Cloizeaux [1] ha eseguite le prime esperienze sulle variazioni che subiscono le proprietà ottiche della heulandite per azione del calore. Mallard [2], che scoprì la divisione in settori in luce parallela delle lamine di sfaldatura, fu il primo a stabilire che le variazioni che si scorgevano durante il riscaldamento erano dovute non alla temperatura, ma all'uscita di parte dell'acqua del minerale, basandosi sul fatto che se le lamine riscaldate venivano lasciate all'aria umida riprendevano il loro aspetto primitivo, il che non accadeva se si immergevano nel balsamo del Canadà, che impediva il riassorbimento dell'acqua.

Il Mallard dalle sue esperienze concluse che « tout se passe, en un mot, comme si le cristal de Heulandite à 2 atomes d'eau était une sorte d'éponge susceptible de s'imbiber d'une quantité d'eau, variable avec la température et l'état hygrométique ambiant et donc le maximum, dans les conditions atmosphériques ordinaires correspondrait à peu près à 3 atomes. L'introduction de cette eau entre les pores du cristal paraît être un fait simplement physique, que ne régissent point les affinités chimiques et du même ordre que celui qui interpose dans les pores des cristaux les diverses matières colorantes auxquelles la plupart des minéraux doivent leur couleur ».

Queste osservazioni del Mallard furono completate da W. Klein [3] e specialmente dal Rinne [4]. Recentemente il Panichi [5] ha studiato l'influenza che sulle proprietà ottiche della heulandite hanno le basse temperature.

Di grande interesse per la costituzione delle zeoliti mi è sembrato il ricercare se il *modo* col quale si toglie una determinata quantità di acqua alla heulandite ha o no influenza sui cambiamenti delle proprietà ottiche. Tenendo per diverse ore a 100° in una stufa ad acqua delle lamine di heulandite delle dimensioni di 2-4 mm. e dello spessore di 20-50/$_{100}$ di millimetro, ho trovato che esse subiscono una perdita di peso di circa 3 %, sensibilmente eguale a quella che si ha tenendole 24 ore nel vuoto su acido solforico.

Per le esperienze a 100° io non ho creduto di seguire il metodo fin qui usato di osservare, cioè, le variazioni delle proprietà ottiche nelle lamine calde. Io ho pensato, invece, di riscaldare le lamine a 100°, lasciarle poi raffreddare in un essiccatore, ed esaminarle solo dopo che avevano riacquistata la temperatura ambiente. Soltanto operando così si è sicuri di osservare le modificazioni dovute all'uscita del-

(1) Manuel de minéralogie, 1862, I, 425. *Nouvelles recherches sur les propriétés optiques des cristaux* etc., 1867, pag. 136.

(2) *De l'action de la chaleur sur la heulandite.* Bull. de la soc. minér. de France, 1882, pag. 255.

(3) Zeitsch. für Kryst. 1884, IX, 38.

(4) *Ueber Faujasit und Heulandit.* Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. 1887, II, 25.

(5) *Influenza della variazione della temperatura e più specialmente dei forti raffreddamenti sul comportamento ottico di alcuni minerali.* Memorie R. Acc. dei Lincei 1902 (5ª), IV, 389.

l'acqua, e non l'effetto complessivo di questa e del calore. Si è anche certi così di aver tolto tutta l'acqua che a quella temperatura e con lo stato igrometrico esistente nell'ambiente si deve svolgere, mentre questa certezza non si può avere quando si riscaldano le lamine sui soliti apparecchi adattati ai microscopi, specialmente se si pensa che per raggiungere l'equilibrio, sopratutto a temperature poco elevate, occorre un certo tempo. Il modo di osservare suddetto mi era, del resto, indispensabile, per ottenere risultati paragonabili con quelli offerti dalle lamine disidratate alla *temperatura ordinaria*, per azione del vuoto su acido solforico.

Esporrò molto brevemente i risultati delle mie osservazioni, non essendo affatto nelle mie intenzioni il portare con esse dei contributi definitivi allo studio delle variazioni delle proprietà ottiche della heulandite in seguito alla disidratazione, ma semplicemente di stabilire qualche fatto, così come gli scarsi mezzi a mia disposizione consentono, che mi sembra importante per la costituzione delle zeoliti.

Tanto per azione del calore a 100°, quanto per quella del vuoto su acido solforico, le lamine di heulandite parallele a }010{ si fessurano, ma in modo assai più considerevole nel secondo caso. Qualche volta, le lamine tenute nel vuoto diventano in alcuni punti pressochè opache. Non ho potuto osservare delle nette relazioni fra la direzione delle fessure che spesso sono abbastanza irregolari e le facce del cristallo. Panichi ha notato che la fessurazione avviene anche in seguito ad un intenso raffreddamento.

I fenomeni presentati dalle lamine di heulandite del Teigarhorn parallele a }010{ in luce polarizzata convergente sono perfettamente simili a quelle di heulanditi di altri giacimenti già studiati. Il piano assiale è, nel settore }001{, poco inclinato sullo spigolo [(001):(010)]: le immagini assiali sono quasi sempre deformatissime ed incomplete, mancano gli anelli intorno alle iperboli, e spesso anche le lemniscate sono ridottissime. Così pure sovente l'immagine non è simmetrica per quel che riguarda le iperboli, che possono essere di forma molto differente.

Riscaldando tali lamine a 100° per un tempo variabile da 4 ad 8 ore ed osservandole dopo raffreddate, si scorge che il piano assiale è diventato più o meno esattamente normale a [(001):(010)] e che l'angolo apparente nell'aria, per la luce bianca, è diminuito di 8° a 16° circa. In tutti i casi, l'immagine assiale soffre sempre la stessa modificazione: oltre ai cambiamenti di colore, le lemniscate vengono più o meno slontanate verso i bordi del campo. Tenendo le lamine sull'acqua, ovvero anche semplicemente all'aria, dopo un tempo maggiore o minore, che io ho trovato variare da 3 a 24 ore, non soltanto a seconda dello spessore, ma sopratutto del tempo durante il quale furono scaldate, tornano *sempre* esattamente nelle condizioni primitive: l'immagine assiale di prima si riottiene con tutte le sue particolarità.

Non ho osservato gli stessi fenomeni disidratando le lamine a freddo, per azione del vuoto su acido solforico durante circa 24 ore. L'immagine assiale diventa nebulosa e poco netta, le iperboli ingrossano. Il piano assiale anche in questo caso tende a divenire normale a [(001):(010)], ma 2E è stato da me trovato in tutte le lamine studiate più grande che prima della disidratazione.

Causa la nebulosità delle iperboli, solo in pochi casi ho potuto eseguire misure un po' precise: da esse ho dedotto che l'incremento dell'angolo assiale apparente varia

tra gli 8° e i 20°. Un'altra notevole differenza tra le lamine scaldate a 100° e quelle disidratate a freddo, consiste in una forte distorsione che subiscono le iperboli in quest'ultimo caso, mentre non l'ho potuta mai osservare nel primo.

Nè meno notevole è la differenza nel tornare allo stato primitivo mediante l'esposizione all'aria satura di umidità. In generale, io ho visto che le lamine state nel vuoto richiedono un tempo maggiore di quello necessario alle lastrine scaldate a 100°. Inoltre mentre queste ultime tornano sempre nelle condizioni primitive, spesso nelle prime si riottiene il valore primitivo di 2E, ma l'immagine resta meno netta ed i colori rimangono diversi.

E veniamo al comportamento in luce polarizzata parallela. È noto che le lamine di sfaldatura non superficiali presentano, in luce parallela, una divisione in tanti settori, quante sono le facce del cristallo: per azione del calore i settori sparirebbero e la lamina diverrebbe unica. Riporterò qui per esteso soltanto i risultati ottenuti in alcune delle lamine studiate.

Lamine scaldate a 100°.

L a m i n a 1. — Quando lo spigolo [(001):(010)] è parallelo alla sezione principale del polarizzatore, presenta la divisione in settori che risulta dalla fig. 5. Tutti i settori presentano estinzioni estremamente ondulose, e, ad eccezione di quello cen-

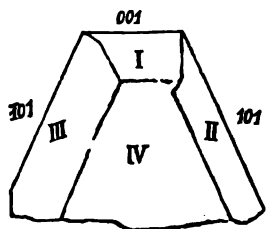



Fig. 5.

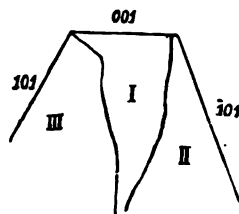



Fig 6.

trale, struttura zonata. Riscaldando questa lamina per 5 ore a 100° ed esaminandola nella stessa posizione di prima dopo il raffreddamento, è facile scorgere come nella divisione in settori non sia intervenuto nessun cambiamento: i diversi settori, però, hanno perduto la loro struttura finemente zonata e sono diventati più uniformi. La lamina non si estingue tutta contemporaneamente: quando il settore (001) è estinto, è specialmente il settore (101) che rimane illuminato.

L a m i n a 2 (vedi fig. 6). — Tutti e tre i settori presentano zonatura ed estinzioni che sfumano da una zona all'altra. In I una direzione di estinzione coincide presso a poco con [100]. Dopo 3 ore a 100°, la divisione in settori resta del tutto inalterata: I si estingue a circa 20° dallo spigolo [(001):(010)], ma gli altri settori non si estinguono contemporaneamente. La struttura zonata dei settori è scomparsa, ed è diventata molto irregolare. Dopo 20 ore di esposizione all'aria umida, la

lamina è ritornata esattamente nelle condizioni primitive; si hanno le stesse zonature, colori di polarizzazione ecc.

Lamina 3 (fig. 7). — All'infuori del settore III, le estinzioni sono estremamente ondulose. Dopo il riscaldamento, la divisione in settori è un po' meno conservata, ma sempre assai netta: le estinzioni sono rimaste molto indecise. Dopo 20 ore sull'acqua, anche questa lamina ha ripreso perfettamente l'aspetto primitivo.

Lamine disidratate nel vuoto su H_2SO_4.

Lamina 1 (fig. 8). — I settori I e II hanno struttura zonata, III, invece, è unico. In I una direzione di estinzione forma con [(001):(010)] un angolo di 5°

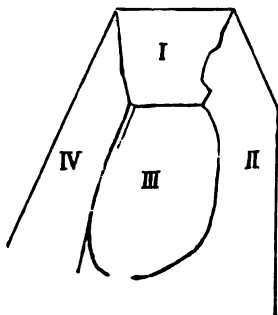



Fig. 7.

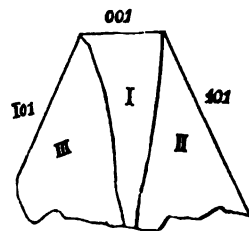



Fig. 8.

verso III; in questo si ha estinzione a 1°-2° da [(010):(Ī01)]: questi due settori hanno estinzione assai netta. Dopo 20 ore nel vuoto, si osservano residui della divisione in settori, specialmente per quel che riguarda I e III: II non è più chiaramente distinto.

Il confine tra i settori I e III sembra essere più inclinato di prima sullo spigolo [100]. Tutta la lamina estingue contemporaneamente: una direzione di estinzione forma un angolo di circa 17° con [100], verso lo spigolo [10Ī]. Anche dopo 24 ore di permanenza sull'acqua non ritorna nello stato primitivo altro che per quel che riguarda la divisione in settori. In I si ha estinzione non più a 5° da [100], ma a 0°-½°: in III l'estinzione è un po' ondulosa, a 4°-5° da [(010);(Ī01)]. Dopo 15 giorni di esposizione all'aria non si notò alcun ulteriore cambiamento.

Lamina 2 (fig. 9). — Dei tre settori solo II ha estinzione netta: in I una direzione di estinzione forma un angolo di circa 21° con [100] verso III. Dopo 22 ore nel vuoto non si ha più distinzione in settori; restano soltanto tracce di III. Tutta la lamina estingue contemporaneamente: una direzione di estinzione fa con [100] un angolo di 4° verso III. Tenendo la lamina 6 ore sull'acqua, non si ha ancora ritorno alle condizioni primitive, vi ritorna, però, dopo altre 18 ore.

Lamina 3 (fig. 10). — In nessun settore si poterono misurare estinzioni, tanto erano sfumate ed ondulose. In I si distinguono tre zone, delle quali la mediana ha estinzione parallela rispetto a [100] e le altre due poco inclinata. Nel settore II si

hanno due zone di diversa grandezza, delle quali, nella posizione suddetta, la più grande dà colori di polarizzazione violetti e la più sottile bianchi. Il settore III presenta colore bleu-chiaro, con qua e là macchie rosso sangue scuro. Finalmente IV mostra ugualmente due zone, una con colore di polarizzazione celeste-chiaro, l'altra giallo-arancione.

Dopo l'azione del vuoto su H_2SO_4 la divisione in settori non esiste più chiara: I è scomparso: molto ridotti e assai male accennati esistono residui di quelli di (101) e ($\bar{1}01$). Rispetto allo spigolo [100] una direzione di estinzione forma un angolo di 21 $^1/_2$°, ed in questa posizione si estingue tutta la lamina: l'estinzione è nettissima, non più ondulosa come prima della permanenze nel vuoto.

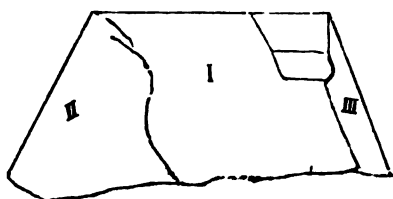



Fig. 9.

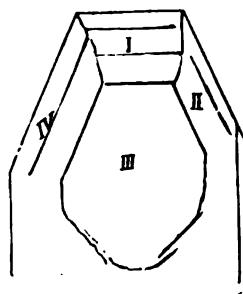



Fig. 10.

Tenuto sull'acqua, il cristallo non ritornò esattamente nelle condizioni di prima. Sono ritornati i settori, ma in quello di (001) sono ora due le zone con estinzione parallela rispetto a [100]: in IV le due zone non sono più separate da una retta, parallela allo spigolo [(010):($\bar{1}01$)], ma invece da una spezzata: le due zone del settore II dànno una colore bianco, l'altra bleu, infine il settore centrale III si compone di zone variamente commiste, le quali presentano colori di polarizzazione giallo-chiaro o terreo, e soltanto pochissime violetto.

Da tutte queste esperienze mi sembra chiara risulti la notevole influenza che ha il *modo* col quale si esercita la disidratazione non soltanto sulla variazione delle proprietà ottiche in luce parallela, ma anche sul ritorno allo stato primitivo.

Dalle esperienze da me eseguite sulla heulandite e la thomsonite e che mi riserbo di proseguire, risulta quanto segue:

1° Nel vuoto, su acido solforico, queste zeoliti emettono una quantità limitata di acqua, che viene ripresa con grandissima velocità mediante l'esposizione all'aria umida.

2° Per azione del calore ad una data temperatura ed in corrente di aria secca svolgono una quantità determinata di acqua: in corrente di aria umida la quantità d'acqua perduta è minore.

3° L'acqua emessa fino ad una determinata temperatura viene rapidamente ripresa, al disopra di questa temperatura la velocità di riassorbimento diminuisce fortemente, annullandosi probabilmente prima ancora della disidratazione completa.

4° Oltre una certa temperatura la durata del riscaldamento esercita una grande influenza sul riassorbimento dell'acqua.

5° Una serie di successive disidratazioni parziali a temperature poco elevate non sembra influire sull'emissione e la ripresa dell'acqua: il contrario accade se la temperatura è vicina o superiore a quella alla quale corrisponde la diminuzione della velocità di riassorbimento.

6° Il modo col quale si toglie una determinata quantità di acqua alla heulandite influisce sulle modificazioni delle proprietè ottiche.

Cerchiamo di vedere se dalle mie esperienze e da quanto anche da altri si è con sicurezza stabilito, è possibile trarre qualche deduzione fondata sulla costituzione delle zeoliti. Ciò è certamente tutt'altro che facile, specialmente se si pensa all'opinione fortemente radicata ed universalmente diffusa, che, nonostante i lavori di questi ultimi anni, tuttora considera le zeoliti come idrati chimici definiti.

Le ricerche, tra gli altri, di Debray [1], di Lescoeur [2], quelle brillanti e fondamentali di Andreae [3] hanno chiaramente stabilito il comportamento degli « idrati » durante la disidratazione. Da quanto Tammann, Friedel e Rinne hanno osservato, risulta evidente che le zeoliti si conducono in modo completamente diverso, e le mie esperienze confermano pienamente la loro conclusione, che le zeoliti non sono « idrati ». È innegabile che le zeoliti da me studiate presentano delle analogie notevoli cogli « idrati »: così, per esempio, il fatto che ad una data temperatura cambia l'andamento della curva di disidratazione, presenta una grande analogia coi punti di trasformazione degli idrati. Ma la semplice considerazione che non è l'uscita di una determinata quantità di acqua, ma l'azione di una certa temperatura, quella che modifica le proprietà delle zeoliti, basta per dimostrare che l'analogia è solamente apparente. Un'altra proprietà ben stabilita nella heulandite, quella, cioè, che la permanenza prolungata ad una certa temperatura produce un rallentamento più considerevole nel riassorbimento dell'acqua trova somiglianza nel comportamento di alcuni idrati: secondo Potilitzin [4], infatti, il gesso, disidratato completamente a 95°-350° dà luogo, a seconda della durata del riscaldamento, alla formazione di due modificazioni di solfato di calcio anidro: una, α, che addiziona facilmente acqua, mentre la modificazione β si unisce solo difficilmente all'acqua e non indurisce. Bisogna però notare che questo fenomeno avviene nel gesso riscaldato al disopra della temperatura di disidratazione, mentre nella heulandite si osserva quando ancora la disidratazione è soltanto parziale.

Molto più in accordo col comportamento delle zeoliti è il modo di vedere di Tammann, di Rinne e di Hamberg, secondo i quali le zeoliti apparterrebbero alle

(1) *Recherches sur la dissociation.* Compt. Rend., 1868, LXVI, 194; 1874, LXXIX, 890.

(2) *Recherches sur la dissociation des hydrates salins et des composés analogues.* Ann. de Chim. et Phys. [6], XVI, XIX, XXI, XXV, XXVIII, [7], II, IV, VII, IX.

(3) Zeitschr. für phys. Chemie, 1891, VII, 241.

(4) Journal de la Soc. phys. chim. russe, XVII, 265; Recensione nella Zeitschr. für anorg. Chemie, 1896, XII, 284.

« soluzioni solide ». Il fatto che la curva di disidratazione in funzione della temperatura è continua, e la disidratazione stessa non dipende soltanto dalla temperatura, ma anche dalla concentrazione della fase gassosa sono in buon accordo con la teoria delle soluzioni solide. Altrettanto è da dire per la variazione continua delle proprietà ottiche, che fu applicata a queste idee da Tammann e da van' t Hoff [1] e più recentemente da J. Traube [2]. Non è però da tacere che Mallard, Klein e Rinne eseguirono le loro esperienze sulla heulandite fino a temperature relativamente poco elevate, e d'altronde non è giusto quanto il Traube afferma, che, cioè, « lässt sich aus gewissen Zeolithen das Wasser in beliebigen Mengen verdampfen unter stetiger Verminderung des Dampfdruckes, ohne dass jene Silikate ihre physikalische Beschaffenheit und ihr Aussehen ändern ». Sta di fatto che le cose si passano realmente in tutt'altro modo: per quanta cura si abbia nel riscaldamento anche a basse temperature, le lamine diventano notevolmente fessurate, e, a temperatura più elevata, opache: in alcune zeoliti basta togliere una quantità anche piccola di acqua per rendere i cristalli opachi, come Tammann ha osservato nell'okenite.

Analoghi alle zeoliti, se queste fossero realmente soluzioni solide, sarebbero, p. es. i così detti sodioammonio e potassioammonio, studiati accuratamente dal Joannis [3] l' « idruro » di palladio, ristudiato recentemente da Krakau [4] e da Hoitsema [5], ed il platinocianuro di magnesio, che, secondo Buxhoevden e Tammann [6], presenta cristalli trasparenti ed omogenei di composizione $PtCy_4\,Mg + 6{,}25$ a $6{,}80\,H_2O$. La variabilità di composizione delle zeoliti, accompagnata spesso da una notevole costanza di forma cristallina e di habitus, fa pensare, che realmente possa esistere una analogia fra la costituzione di questi minerali e quella del platinocianuro di magnesio, s' intende per quel che riguarda l'acqua. Alcune zeoliti presentano, infatti, una composizione espressa da un silicato unito a quantità variabile di acqua. Un esempio istruttivo è fornito dalla pseudophillipsite delle leucititi romane da me descritta [7]: quattro analisi eseguite su materiale di località diversa dettero i seguenti risultati:

(1) *Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie*. Zweites Heft. Braunschweig, 1899, pag. 140.

(2) Grundriss der physikalischen Chemie. Stuttgart, 1904, pag. 221.

(3) *Combinaisons du potassium et du sodium avec le gaz ammoniac*. Compt. rend., 1889, CIX, 900, pag. 965 e discussione con H. W. Bakhuis Roozeboom.

(4) Prot. de la société phys. chim. russe, 1894, 398. Ho letto il largo sunto nella Zeitsch. für anorg. Chemie, 1895, VIII, 395.

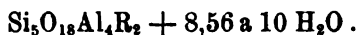
(5) *Palladium und Wasserstoff*. Zeitsch. phys. Chemie, 1895, XVII, 1.

(6) *Die Hydrate des Magnesiumplatincyanürs und deren Löslichkeit*. Zeitsch. für anorg. Chemie, 1897, XV, 319.

(7) *Kurzer Beitrag zur chemischen Kenntniss einiger Zeolithe der Umgegend Roms*. Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. 1902, II, 76. Alcune lievi differenze fra i rapporti sopra riportati e quelli pubblicati nel 1902 sono dovuti all'aver adoperato qui i pesi atomici internazionali pel 1905, ed allora, invece, quelli del Dana.

	RO	Al_2O_3	SiO_2	H_2O
I	1.02	1	2.50	4.57
II	0.97	1	2.58	5.00
III	1	1	2.51	4.28
IV	1	1.05	2.56	4.49

dai quali si deduce la formula

$$Si_5O_{18}Al_4R_2 + 8{,}56 \text{ a } 10\ H_2O\,.$$

Ad un primo esame tutto sembra dunque in perfetto accordo con la concezione di Tammann, ma diversamente mi sembra che vadano le cose quando si considerano tutti i fatti da me osservati. Uno di fondamentale importanza è il repentino cambiamento, ad una certa temperatura, del percorso della curva di disidratazione e della velocità di riassorbimento dell'acqua.

Se le zeoliti fossero delle soluzioni solide, a me pare che si dovrebbe avere una variazione continua e non improvvisa, come quella che io ho trovato, di questa velocità e dell'andamento della curva di disidratazione. Così pure non si comprende come mai le proprietà ottiche debbano cambiare in modo un po' diverso a seconda che una quantità sensibilmente uguale di acqua viene tolta alla temperatura ordinaria o a 100°.

A me sembra che le proprietà dell'acqua della heulandite e della thomsonite trovano una singolare somiglianza in quelle dell'acqua degli idrogeli, studiati così profondamente dal van Bemmelen (1), secondo il quale, appunto, anche questi composti si differenzierebbero dalle soluzioni solide. Anche in essi lo stato di idratazione dipende dalla temperatura e dalla concentrazione della fase gassosa; nella curva di disidratazione si ha un punto al disopra del quale il fenomeno non è più reversibile e ad esso corrisponde un cambiamento nel percorso della curva stessa, che si avvicina ad una linea retta, ed un intorbidamento; un prolungato riscaldamento diminuisce o annulla la proprietà di riassorbire l'acqua svolta. Perfetta è la analogia, nè lo è meno per i fatti osservati da Friedel e che riguardano l'assorbimento di altre sostanze in luogo dell'acqua. Friedel ha scoperto che all'acqua delle zeoliti potevano essere sostituite le sostanze le più diverse: Rinne (2) ha preparato la cabasite con solfuro di carbonio, CO_2, alcool ecc. di « cristallizzazione ».

(1) *Die absorption. Das Wasser in den Kolloïden, besonders in dem Gel der Kieselsäure.* Zeitsch. für anorg. Chemie, 1897, XIII, 233-356. II. Abhandlung. *Bie Bildung der Gels und ihre Struktur.* Ibidem, 1898, XVII, 36. III. Abhandlung, pagg. 98-146. IV. Abhandlung. *Die Isotherme des kolloïdalen Eisenoxyds bei 15°.* Ibidem 1899, XX, 185-211 e numerosi altri lavori, tra i quali citerò ancora: *Die Absorptionsverbindungen.* Landwirtsch Vers. Stat. 1888, XXV, 69-136 e *Der Teiungskoeffizient bei Absorptionen aus Lösungen durch feste Stoffe.* Zeitsch. phys. Chemie, XVIII, pag. 331.

(2) *Chabasit mit Krystallwasser, Krystallschwefelkohlenstoff, Krystallkohlensäure, Krystallalkohol,* etc. Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w., 1897, II, 28.

Se noi osserviamo quanto accade negli idrogeli, vediamo che Graham ([1]) ha trasformato un idrogelo di silice in alcoolgelo, solfogelo, glicerogelo e acetogelo (i due ultimi furono preparati anche dal van Bemmelen). Ferd. Cohn ([2]) si è servito della proproprietà che ha il tabascir di assorbire fortemente delle sostanze dalle loro soluzioni per preparare artificialmente l'opale, l'idrofane, l'agata, l'onice ecc.

Secondo Friedel, le zeoliti disidratate possono assorbire quantità considerevoli di aria: Cohn ha trovato che il tabascir ne può assorbire un volume eguale al proprio e van Bemmelen dal canto suo ha studiato minutamente la formazione di spazi privi di acqua e l'assorbimento dell'aria nella silice gelatinosa.

Nè quanto Friedel ha osservato in alcune zeoliti, che, cioè, l'acqua svolta può esser sempre ripresa, purchè il minerale non sia stato fuso (ammettendo senz'altro come esatti i suoi risultati), è in contraddizione con le proprietà degli idrogeli. Van Bemmelen dice, infatti, espressamente, che i fenomeni osservati nella silice gelatinosa non si osservano in tutti i geli: così l'ossido ramico gelatinoso non presenta il cambiamento repentino nell'assorbimento dell'acqua e nel percorso della curva di disidratazione. Non vi sarebbe dunque nulla di strano se questo cambiamento repentino in alcune zeoliti realmente mancasse.

Non mi sembra quindi del tutto assurdo supporre per le zeoliti una costituzione « micellare » somigliante a quella dei geli. L'acqua che viene emessa al disotto del punto che segna il cambiamento della curva di disidratazione e delle proprietà assorbenti potrebbe avere qualche analogia coll'acqua extramicellare di van Bemmelen, l'altra con la micellare. La costituzione micellare potrebbe anche spiegare le profonde e veramente incomprensibili variazioni di composizione di alcune zeoliti, poichè potrebbe in esse avvenire qualche cosa di analogo a quanto avviene nei colloidi, che separandosi da una soluzione che contiene disciolte anche altre sostanze, ne assorbono una parte nelle loro micelle. Ammettendo quanto ho esposto, sarebbe possibile spiegare il fatto che uno stesso sperimentatore, studiando l'acqua di una zeolite di due giacimenti diversi, ha trovato, nelle medesime condizioni, curve di disidratazione molto differenti, benchè la composizione fosse sensibilmente la stessa. A somiglianza di quanto accade nei colloidi, potrebbe questo fatto esser determinato da differenti condizioni di formazione.

Non mi pare che il fatto che le zeoliti sono cristallizzate, mentre gli idrogeli sono amorfi, possa costituire un insormontabile ostacolo ad ammettere che l'acqua si trovi nelle zeoliti e negli idrogeli in condizioni simili ([3]). Si ritiene abbastanza generalmente che lo stato cristallino, col quale, secondo Tammann ([4]), si identificherebbe quello solido, sia fondamentalmente diverso dall'amorfo, che costituirebbe un passaggio continuo dallo stato liquido al solido. Ma se si pensa che esistono i li-

([1]) *Sur les propriétés de l'acide silicique et d'autres acides colloïdes.* Ann. de Chim. et phys. 1864, [4], III, 123.

([2]) *Ueber Tabaschir.* Beitrage zur Biologie der Pflanzen, 1889, IV, 365-407.

([3]) S' intende prescindendo da quella parte dell'acqua che nei colloidi si trova meccanicamente interposta, e che, come van Bemmelen ha trovato, si svolge con una velocità uguale a quella di evaporazione dell'acqua libera tenuta nelle stesse condizioni.

([4]) *Ueber die Grenze des festen Zustandes.* Wied. Ann. 1897, LXII, 280.

quidi cristallini (1), che corpi solidi cristallizzati, come lo iodio, hanno una velocità di sublimazione che ubbidisce alle leggi della evaporazione dei liquidi (2), che, come recentemente ha dimostrato A. Speranski (3), le leggi reggenti le soluzioni liquide valgono anche per le miscele isomorfe, che, infine i corpi colloidi possono trasformarsi in cristallini e viceversa (4), e che devono tra essi esistere stadi intermedi (5), non mi sembra soverchio ardimento insistere sulle notevoli somiglianze riscontrate tra le proprietà delle zeoliti e degli idrogeli, per quel che si riferisce all'acqua che contengono.

(1) So bene che Tammann e Quincke (per le citazioni cfr. il bel libro recentissimo di R. Schenk, *Kristallinische Flüssigkeiten und flüssige Krystalle*, 1905, Leipzig), ai quali si aggiunse più recentemente Th. Rotarski (*Ueber die sogenannten flüssigen Kristalle*, Berichte der deutsc. chem. Gesell. 1903, XXXVI, 3159), hanno espresso l'opinione che i cristalli liquidi sieno sospensioni od emulsioni di diversi corpi, ma G. Bredig e G. von Schukowsky (*Prüfung der Natur der flüssigen Krystalle mittels elektrischer Kataphorese*, Berichte der deutsch. chem. Gesell., 1904, XXXVII, 3419), hanno trovato che i cristalli liquidi non mostrano in nessun caso i fenomeni della cataforesi, che presentano per lo più le emulsioni, le sospensioni ed i liquidi colloidali.

(2) H. Arctowski, *Untersuchungen über die Sublimationsspannungen des Jods*. Zeitsch. für anorg. Chemie, 1896, XII, 427.

(3) *Ueber den Dampfdruck der festen Lösungen*. Zeitsch. für phys. Chemie, 1905, LI, 45.

(4) Mi limiterò a citare i lavori di van Bemmelen su questo argomento, pubblicati nel Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. 1888, VII, 63 e 75.

(5) J. Billitzer, *Theorie der Kolloide* II. Zeitsch. phys. Chemie, 1905, LI, 129. L'esistenza di questi stadî intermedi era stata, del resto, ammessa già prima da vari studiosi.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 5°, 2° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 1°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-9°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCII

Serie Quinta — Volume V — Fascicolo X.

ROBERTO ALMAGIA

LA DOTTRINA DELLA MAREA

NELL'ANTICHITÀ CLASSICA E NEL MEDIO EVO

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

RELAZIONE

letta dal Socio G. DALLA VEDOVA, a nome anche del Socio G. SCHIAPARELLI (relatore), nella seduta del 3 giugno 1905, sulla Memoria del sig. ROBERTO ALMAGIÀ, avente per titolo: *La dottrina della marea nell'antichità classica e nel Medio Evo.*

Il lavoro presentato dal sig. Roberto Almagià su *La dottrina della marea nell'antichità classica e nel Medio Evo* è dall'A. stesso qualificato come un *Contributo alla storia della Geografia* e risponde veramente a un tale concetto, e ritrae da questo la sua importanza.

Da gran tempo la storia della Geografia estese le sue ricerche, oltre che al successivo allargarsi delle regioni terracquee riconosciute, oltre che alle idee cosmografiche, anche alle dottrine geofisiche professate in varî tempi; esempî di ciò il Berger per la geografia greca, il Wisotzki per talune questioni di geofisica degli ultimi secoli, ed altri.

Fra queste dottrine geofisiche fatte oggetto di una trattazione storica speciale non s'incontrava ancora la dottrina cui è dedicata la presente monografia. Non mancava veramente qualche tentativo per quanto concerne l'antichità classica; ma la parte del Medio Evo era terreno, si può dire, quasi intieramente inesplorato. Ora il nostro Autore non solo espone e con buon criterio esamina le opinioni professate sul flusso e sul riflusso del mare dai dotti uomini dell'antichità classica, mostrando in qual parte dell'argomento e fino a qual punto essi giungessero a divinare le scoperte dei moderni da Newton in qua; ma con diligenza perseverante ha ricercato le tracce di questa dottrina lungo i secoli del Medio Evo, sfogliando molti e molti volumi d'ingratissima lettura, e con molto discernimento estraendone quanto si affaceva al suo argomento, divenuto per quest'epoca arido e poco seducente, come quello che qui non presenta più la scienza nel suo progresso organico, ma consiste per lo più in una rassegna di opinioni arbitrarie e spesso assurde, di rado interrotta da qualche lampo di genio, e da qualche osservazione giusta e nuova.

Com'è nella natura di un così fatto lavoro, il quale si arresta al tempo in cui lo studio del fenomeno è finalmente collocato con Newton su basi scientifiche, non era da attendersene novità di gran rilievo, tranne forse che apparisce ancora più spic-

cato il contrasto fra gli sforzi delle menti anche più elette in tempi d'immaturo empirismo, e i progressi solidamente avviati dalla concezione Newtoniana.

L'indagine dell'Autore muove dalle conoscenze e dottrine sulla marea professate dai Greci e dai Romani, seguendola poi negli scrittori profani e nella patristica dal III al VII secolo di Cristo, quindi presso i Normanni, i Germani, i popoli Orientali fino alla Scolastica e agli ultimi secoli del Medio Evo, giungendo sino al tempo di Newton.

Trattasi di un lavoro monografico nuovo in massima parte, condotto con sana erudizione, con larga dottrina filologica e naturalistica, con metodo critico rigoroso; che i Commissarî reputano degno, nel suo insieme, di essere accolto negli Atti dell'Accademia.

La dottrina della marea nell'antichità classica e nel Medio Evo. Contributo alla storia della Geografia scientifica.

Memoria del dott. ROBERTO ALMAGIÀ.

« Sacrum quidem Natura Terris circumfudit Oceanum »
SENECA.

« Arcanum . . . Naturae magnum est marinus aestus: de quo facilius quam caussam respuas, non quam admittas, videre possis ».
FROMONDO.

« Et sane tam varia sunt accidentia huius motus tamque admirabilia, ut humanae mentis conatum omnem superatura semper videantur, quaecumque illarum causam sufficientem ac rationem investigare et investigatam explicare voluerit ».
RICCIOLI.

« Nullum fere naturae phaenomenon est, quod doctorum et physicorum ingenia tantopere exercuerit, quodque plures conatus eluserit ».
VARENIO.

INTRODUZIONE.

Nel vasto campo della Fisica del Globo e della Geografia fisica nessun fenomeno forse ha tanto esercitato dai tempi di Newton in qua, le menti degli scienziati, quanto quello, così semplice in apparenza, del ritmico avvicendarsi giornaliero del flusso e riflusso del mare. Da quando fu scoperta quella legge dominatrice dell'universo a cui Newton diede il nome di gravitazione, le indagini sulla marea, portate finalmente su un campo positivo, furono proseguite con sollecitudine ed interesse straordinarî; la storia di tali indagini segna i nomi dei più illustri fisici e matematici, e tuttora ad esse sono rivolti gli ingegni di dotti eminenti; poichè, malgrado tanta attività e tanto progresso nella conoscenza del fenomeno, molte questioni rimangono ancora insolute e una teoria completa non si è fatta peranco strada in modo definitivo. Nè ciò deve maravigliare chi pensi a quali e quante complicazioni dia luogo lo studio profondo di quel fenomeno, le cui leggi, sotto la veste della maggior semplicità, celano difficoltà così grandi che poteron sembrar talora insormontabili.

Ma se ci volgiamo a considerare i lunghi secoli che precedettero la grande scoperta newtoniana, noi vediamo che, anche quando era ignota quella legge, la cui conoscenza soltanto potè permettere uno studio scientifico del fenomeno, le cause della marea furono sempre, sin da tempi antichissimi, una delle questioni che più affaticarono le menti dei dotti, i quali escogitarono, per ricercarle, le più strane, complicate e talora ingegnose teorie. Lo studio di queste teorie e la esposizione delle idee che si professarono nei varî tempi su di un fenomeno che anche oggi non cessa di

tormentare l'ingegno e la mente degli scienziati, non è perciò priva d'interesse e porta un curioso contributo alla storia di quelle che potrebbero chiamarsi le grandi eresie scientifiche (1).

Il fenomeno del flusso e riflusso, noto sin dalla più remota antichità a molti popoli abitatori di spiagge marittime, fu molto presto oggetto di osservazioni e discussioni presso le nazioni civili. Per l'epoca greco-romana, particolarmente dopo che, nell'età alessandrina, la geografia si costituì a scienza organica per opera sopratutto di Eratostene, notizie relative a osservazioni e discussioni sul fenomeno della marea si trovano in tutte, si può dire, le opere geografiche a noi rimaste, ma principalmente in quella che rappresenta il nostro maggiore e quasi unico tesoro di geografia classica: l'opera di Strabone (2); ma esse trovano posto altresì in scritti di maggior ambito, come la *Storia Naturale* di Plinio. Quasi a prova poi dell'interesse che si prestava all'argomento, accenni a tentativi di spiegazioni del grave problema si trovano anche presso molti filosofi e persino presso poeti.

Una prima raccolta di passi di autori antichi relativi a questo argomento fu già fatta dall'Ukert nella sua *Geographie der Griechen und Römer* e accompagnata da qualche commento; e di qua attinge il Forbiger le notizie che si trovano nel primo volume della sua ben nota opera (3). Una Memoria particolare sulle conoscenze dell'antichità sulle maree e fenomeni analoghi, scrisse molti anni fa Th. Martin (4), nome ben noto agli studiosi di storia delle scienze fisiche; ma questa Memoria, come anche gli accenni nelle opere su citate, alquanto incompleti e talora inesatti, risentono molto della mancanza ancora a quei tempi lamentata, di edizioni e di studî critici su molti antichi scrittori di scienza. Oggi il progresso degli studî filologici e storici, come pone a nostra disposizione testi più accurati di moltissimi autori antichi, così facilita di gran lunga il lavoro di ricerca, mentre l'opera ormai classica di Ugo Berger, *Geschichte der wissensch. Erdkunde der Griechen* (5) ci permette di abbracciare, almeno nel suo complesso ed in maniera organica, tutto lo svolgimento delle dottrine classiche nei varî rami della scienza geografica.

(1) Accingendomi a fare un rapido cenno delle fonti generali di cui mi sono servito per questo lavoro, credo inutile ricordare opere di Storia della Geografia come quelle del Vivien de Saint-Martin e del Peschel a tutti note. Mi sia permesso per altro di far menzione del recente lavoro del Günther, *Geschichte der Erdkunde* (Lipsia e Vienna, Deuticke, 1904), utilissimo anche per le copiose indicazioni bibliografiche.

(2) È noto che Strabone ci conserva le dottrine di molti geografi le cui opere andarono purtroppo perdute; si può dire che solo attraverso Strabone ci son noti i lavori di Eratostene, Ipparco, Posidonio etc.

(3) Forbiger, *Handbuch der alten Geographie.* Lipsia, 1842-48, III volumi.

(4) Th. Martin, *Connaissances des anciens sur les marées et les Euripes.* (Mém. de l'Académie imp. des sciences, Caen 1866). Quest'opuscolo è molto raro; io lo ebbi, dopo averlo ricercato invano nelle biblioteche scientifiche d'Italia, dal prof. M. Cermenati, che ne possiede una copia.

(5) H. Berger, *Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen.* IIª Edizione, Lipsia. 1903. Accanto a questa, non merita di essere dimenticata la più vasta opera, di carattere un po' diverso, del Bunbury, *History of ancient Geography* (2 vol, Londra 1879) che più volte citeremo. Un riassunto di quest'ultima opera, ma con molti mutamenti ed aggiunte è il più recente lavoro di H. Tozer, *A history of ancient geography* (Cambridge 1897).

Ben altrimenti stanno purtroppo le cose per l'Evo Medio per un complesso di cagioni che accennerò brevemente.

Il sorgere del Medio Evo, che nella storia della filosofia è caratterizzato dal cadere delle antiche scuole filosofiche e dal costituirsi del Cristianesimo a religione dottrinale e sistematica — opera grandiosa di quel periodo cui si dà il nome di Patristica — nella storia delle Scienze fisiche e naturali, e perciò anche nella storia della Geografia, può dirsi caratterizzato dal dominio che vien prendendo sempre più l'elemento religioso nella speculazione e nell'indagine scientifica, i cui risultati si cerca in ogni modo di subordinare ai postulati della dottrina cristiana. Per molto tempo cessa il lavoro originale di menti scientifiche e vi succede quello di adattamento delle conoscenze trasmesse dall'antichità alle dottrine della nuova religione, lavoro di cui già si vede l'inizio nelle prime esegesi della Bibbia — nella quale sarebbe contenuto in germe tutto ciò che può aver valore per la scienza — e che termina col trionfo della Scolastica, che fa delle dottrine aristoteliche cristianizzate la somma di tutte le conoscenze accessibili alla speculazione umana.

In questo lungo periodo quindi la scienza in generale e anche la scienza geografica in particolare non è più patrimonio di una classe speciale di studiosi, ma diviene una collaborazione a cui partecipano persone di studî e di tendenze molto diverse, ma sopratutto ecclesiastici. Perciò, venendo direttamente all'argomento che ci occupa, le notizie sopra osservazioni o ipotesi riguardanti il fenomeno della marea non vanno più ricercate soltanto in opere geografiche o naturalistiche, ma in libri di qualsiasi argomento; mai come nel Medio Evo si ebbe tanta copia di menti enciclopediche, e teologi e letterati, filosofi e grammatici, cronisti e poeti si sono occupati talora e lungamente di problemi geografici. Alla difficoltà grandissima che ne deriva di raccogliere tutte le notizie e tutti gli accenni che potrebbero interessare, un'altra se ne aggiunge di natura diversa. Dato il carattere che viene assumendo la scienza in questo periodo, le opere di pura geografia sono, specialmente nei primi secoli, oltremodo rare (Cosma Indicopleuste), e in sostituzione di esse si hanno numerose opere di erudizione generale, che sono di solito variopinte compilazioni dei più fantastici autori pagani. I compilatori di tali opere non fanno per lo più che comporre un mosaico di brani di scrittori classici, sfruttando in generale i meno veridici e i più stravaganti, mentre ignorano quasi interamente i più diligenti e accurati [1]. Si rende perciò più che mai necessaria in studî del genere di quello presente, l'indagine delle fonti cui attingono le loro notizie gli scrittori medievali, ma questa indagine è resa molto spesso difficile dal fatto che talora le notizie attinte di seconda o terza mano sono più o meno alterate e la fonte è solo raramente accennata.

Ma nella storia della scienza medioevale un posto cospicuo occupano popoli posti al difuori degli antichi focolari di civiltà: i popoli del settentrione europeo da un lato, i popoli orientali dall'altro; questi ultimi particolarmente, ereditando una parte

[1] Basta, per persuadersene, scorrere ad es. la lista degli autori citati da Dicuil nel suo noto *Liber de mensura orbis terrae* (IX secolo). Egli si richiama 40 volte a Solino, 37 a Plinio, 18 a Isidoro di Siviglia etc.; non cita mai nè Strabone nè Tolomeo. Cfr. Beazley, *The dawn of modern geography*, vol. I, pag. 319.

della scienza greca, la elaborano in modo proprio, e diffondendola sotto veste nuova in Occidente, esercitano un influsso così profondo sugli studiosi occidentali, che non è possibile non tenerne un gran conto in qualunque lavoro di storia delle scienze.

In mezzo a tante e così diverse difficoltà s'indebolisce grandemente il prezioso sussidio degli studî filologici e bibliografici. Molte opere medioevali, anche importanti, sono tuttora pubblicate in edizioni antiche e insufficienti per qualunque riguardo, parecchie sono anche difficilmente reperibili, taluna ormai rarissima; gli studî di filologia medioevale, che ora si risvegliano e risorgono, avranno molto cammino da percorrere, per colmare tante lacune e sovvenire a tante mancanze [1]. Nel campo della storia della geografia manca ancora e mancherà forse per molto tempo un'opera riassuntiva, che permetta di gettare uno sguardo generale su l'intero campo medioevale, mentre le monografie speciali sono ancora in numero abbastanza limitato [2].

È naturale quindi che qualsiasi lavoro abbracciante tutta o gran parte dell'epoca medioevale risulti in alcune parti difettoso e manchevole, per quanta diligenza possa impiegarsi nelle ricerche; e così anche il presente scritto non pretende in nessun modo di essere completo ed offre solamente una storia dello svolgimento graduale dei principali concetti sul fenomeno della marea. Nel tessere questa storia ho cercato — ma non so se con successo sempre — di riabituarmi colla mente allo stato generale delle conoscenze fisiche e astronomiche delle varie epoche, rinunziando, talora con difficoltà, a certe nozioni generali, che, pur essendo frutto di scoperte e studî relativamente recenti, sono ormai così insite in noi, che riesce disagevole spogliarcene; e del pari mi sono sempre studiato di non deviare, per quanto era possibile, dall'oggetto principale delle mie indagini, per non correre il rischio di perdermi in tante altre questioni colle quali spesso si vien complicando il problema della causa della marea [3]. Come termine cronologico delle mie ricerche speciali ho assunto la fine del secolo XV, riserbando ad un ultimo capitolo una rapida scorsa dalla fine del Medio Evo sino all'epoca di Newton.

[1] Cito qui di sfuggita alcune delle grandi raccolte di fonti che pur mi furono di sommo aiuto: il *Corso di Patrologia Greca e Latina* del Migne; i *Monumenta Germaniae Historica* del Pertz; il *Recueil des Historiens des Gaules et de la France* del Bouquet; i *Rerum Britannicarum Medii Aevi Scriptores*; i *Rerum Italicarum Scriptores*, ecc.; inoltre i notissimi repertorî di bibliografia storica del Potthast e dello Chevalier.

[2] La recente opera di C. R. Beazley, *The dawn of modern geography* (I vol., Londra, 1897; II vol., Londra, 1901) offre una buona guida per gli studî di geografia medioevale soltanto fino al secolo X, al quale arriva il primo volume, mentre il secondo contiene soltanto studî parziali su alcuni argomenti di speciale interesse. Notissimo è il lavoro di K. Kretschmer, *Die physische Erdkunde im christlichen Mittelalter* (Penck's Geogr. Abhandl., Vienna, 1889). Parecchi sono i lavori sulla storia della cosmografia e della geografia nel periodo patristico; cito: Letronne, *Les opinions cosmographiques des Pères de l'Eglise* (Revue des deux Mondes, 1834); Günther, *Die kosmographische Anschaungen des Mittelalters* (Deutsche Rundsch. für Geogr. und Statistik, 1882); Marinelli G., *La Geografia e i Padri della Chiesa* (Boll. Soc. Geogr. Ital., 1882); Boffito, *Cosmologia primitiva, classica e patristica* (Mem. della Pontif. Accad. dei Nuovi Lincei, vol. 19 e 20); ma tutte si occupano solo per incidenza di geografia scientifica. Per l'epoca scolastica notevoli gli scritti del Werner che ricorderò a suo tempo.

[3] Nel Medio Evo ad es., il problema della marea ha relazione con numerose questioni di astrologia comune e anche di astrologia medica.

I.

Gli inizi delle conoscenze sulla marea presso i Greci.

Le nostre indagini sulla conoscenza della marea, come ogni altro studio relativo alla geografia scientifica nell'antichità classica, prendono naturalmente le mosse dai Greci, come quelli presso i quali solamente fiorì una scienza geografica; giacchè è cosa universalmente nota che in questo campo i Romani ben poco accrebbero a quello che i Greci già conoscevano e che quelli si limitarono quasi solamente a riprodurre. La marea è fenomeno che interessa i naviganti e gli abitatori delle spiagge marittime; dai Greci quindi, abitanti quasi in mezzo al mare e da lungo dediti alla navigazione, il fenomeno avrebbe dovuto essere ben presto appreso. Senonchè nel Mediterraneo, dove per molto tempo furono limitate le navigazioni dei Greci, la marea, oltre all'essere quasi ovunque di piccolissima entità, è poi straordinariamente irregolare, fino a perdere talora il suo carattere di ritmicità, mascherata anche spesso dalla azione dei venti e delle correnti; quest'ultimo caso si verifica anche nell'Egeo e nel Ponto Eusino (1). A Corfù l'altezza massima della marea raggiunge appena i 6 cm.; sulle coste dell'Italia meridionale e della Sicilia, visitate dai Greci in epoca assai remota, essa è di 4 cm. a Taranto, 9 a Brindisi, 13 a Reggio, 22 a Napoli. In pochi punti delle coste mediterranee l'altezza del flusso è tale da richiamare l'attenzione: all'estremità settentrionale dell'Adriatico (Venezia 48 cm.; Trieste 53 cm.); sulle coste della Siria (Tripoli 40 cm.), su quelle meridionali della Spagna (Malaga 77 cm.) e finalmente sulla costa settentrionale dell'Africa, specialmente nella piccola Sirti, ove si verificano le massime altezze di tutto il Mediterraneo (Sfax m. 1,25; isola Gerba m. 1,83) (2).

Allorchè i progressi della navigazione permisero ai Greci di visitare questi ultimi paesi, ove solamente il fenomeno attira l'attenzione di chi vi dimori anche per breve tempo, essi ne appresero certo l'esistenza e ne tennero il dovuto conto; ma si può dubitare che i Greci abbiano imparato a conoscere nel Mediterraneo l'esistenza della marea. I documenti che a noi rimangono risalgono ad un tempo in cui i naviganti elleni percorrevano tutto il Mediterraneo e all'infuori di esso avevano già cognizioni più o meno esatte sul Mar Rosso; non è però inutile notare che il primo accenno sicuro alla marea, che si trovi nella letteratura greca, si riferisce proprio a questo ultimo mare. È possibile che di qui giungessero ai Greci le prime notizie su quel fenomeno, che poi, col progresso della nautica, essi furono in grado di verificare anche nel Mediterraneo. Infatti, a partire dal IV secolo, sono numerosi gli accenni alla marea anche in questo mare. La piccola Sirti è già nota come difficile a navigare all'autore

(1) Partsch-Neumann, *Physikalische Geogr. von Griechenl.*, Breslavia 1885, pagg. 149-50.

(2) Cfr. per queste cifre: Grablowitz G., *Sulle osservazioni mareografiche in Italia*, ecc., in Atti del I Congr. Geogr. Ital., vol. II, parte prima, pagg. 7-36.

del periplo che va sotto il nome di Scilace (seconda metà del IV secolo) (1) e più tardi accennano esplicitamente alla marea nelle Sirti anche scrittori che non si occupano di proposito di scienza geografica, come Apollonio Rodio, Polibio (2) e altri molti che ora è inutile ricordare. Gli accenni ai flussi delle coste spagnuole sono numerosi in Strabone, come diremo in seguito, e anche Appiano ne parla per la costa presso Cartagena (3); non mancano anche osservazioni relative al golfo di Venezia, del quale Strabone anzi afferma essere quasi l'unico luogo del Mediterraneo ove il fenomeno si verifichi come nell'Oceano (4).

Più antichi sono gli accenni ai fenomeni che si verificano nello stretto di Messina e nell'Euripo di Calcide; ma mentre nel primo si tratta di correnti di marea assai complicate, nel secondo, ove si avrebbero delle condizioni favorevoli per l'osservazione del fenomeno (5), all'azione del flusso e riflusso si sovrappongono onde stazionarie analoghe alle sesse dei laghi (6); e perciò gli antichi non potevano certo dalle osservazioni fatte in questi due luoghi acquistar chiara conoscenza del fenomeno della marea, anzi, anche in tempi in cui della marea furono abbastanza informati, non arrivarono a comprender mai bene ciò che accadesse nei due stretti su ricordati.

Ma un'idea chiara e completa della marea, e con essa una spiegazione scientifica, non poteva sorgere se non quando il fenomeno potè esser osservato nelle sue manifestazioni più grandiose e regolari nell'Atlantico: come nota giustamente il Darwin (7) il fenomeno della marea non può definirsi scientificamente senza riferirsi alla causa che lo produce, e non è caso che le prime sicure osservazioni sul flusso e riflusso in connessione con la luna si debbano ad Eutimene e Pitea di Marsiglia, i due naviganti greci che per primi eseguirono viaggi sulle coste dell'Atlantico. Ma avanti di giungere al loro tempo, il fenomeno avea già colpito le menti di studiosi e di osservatori, e nell'incertezza della sua vera natura, già si erano affacciate spiegazioni tendenti a collegarlo con altri fenomeni noti relativi alle acque e all'atmosfera.

Ab Jove principium. In un'epoca in cui ad Omero si attribuivano tutte le conoscenze possibili, non è meraviglia che si asserisse ch'egli avesse conoscenza anche della marea; ciò si afferma infatti esplicitamente Strabone (8) ed altri vi avean accennato prima di lui, deducendolo in ispecial modo da un verso del poeta relativo a

(1) Scylacis, *Periplus*, § 110; ma alla navigazione nella Piccola Sirti si opponevano anche altri ostacoli (bassifondi, venti, correnti). Cfr. Strabone, Lib. XVII, cap. III, § 17.

(2) Apollon. Rod., *Argonautica*, IV, versi 1235 segg.; Polyb., I, 39.

(3) Appiano, *Res Hispan.*, VI, 21.

(4) Strabone, lib. I, cap. I, § 5.

(5) Nell'Euripo « la marea poteva esser notata nel miglior modo, perchè il golfo è poco profondo e la costa alla foce dello Sperchios termina piana, cosicchè anche un cambiamento di livello di $^1/_3$ - $^1/_2$ m., scuopre e ricuopre un assai largo tratto di spiaggia ». Neumann-Partsch, op. cit., loc. cit.

(6) Cfr. Forel in Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 1879, II, pagg. 861 e segg.; Krümmel, *Zum Problem des Euripus* in Petermanns Geogr. Mitteil., 1888, pag. 331 e seg.

(7) Darwin, *The Tides und kindred phaenomena in the solar System*, II ediz. Londra, 1901, pagg. 2-3. Avverto qui che di quest'opera del Darwin mi sono servito di solito per tutto quanto concerne le moderne teorie della marea.

(8) Strabone, lib. I, cap. I, § 7.

Cariddi ([1]) — τρὶς μὲν γάρ τ' ἀνίησιν ἐπ' ἤματι, τρὶς δ' ἀναρροιβδεῖ — a condizione di emendare τρίς in δίς; ma ad ognuno appare come poco sia fondata questa ipotesi per molte altre ragioni inammissibile. I moderni studî hanno posto chiaramente in luce quanto scarse fossero le conoscenze omeriche relativamente al mare ([2]), nè alcuno dei moderni potrebbe ora prender sul serio l'affermazione di Strabone ([3]).

Non solamente Omero, ma anche i primi filosofi e cosmologi ionî sembra avessero esigue conoscenze sui fenomeni del mare; in ogni modo dall'insieme di notizie che abbiamo su tutti i filosofi che sogliono chiamarsi presocratici, non traspare che alcuno di essi si fosse occupato della marea o di questioni attinenti ([4]).

Il primo accenno sicuro alla marea si ha in Erodoto e riguarda il Mar Rosso. Affermando che ῥηχίη δ' ἐν αὐτῷ καὶ ἄμπωτις ἀνὰ πᾶσαν ἡμέρην γίνεται ([5]), segnalava forse una caratteristica di quel mare in confronto del Mediterraneo, ma colla identica frase egli indica peraltro in altro luogo i fenomeni che si verificano nello stretto di Euripo ([6]). Ciò sembra mostrarci ch'egli non avesse una completa idea del fenomeno; inoltre la sua frase è assai vaga; essa non lascia supporre nemmeno nello scrittore e viaggiatore di Alicarnasso una conoscenza del modo con cui il flusso e il riflusso si alternano in 24 ore; anzi il carattere ritmico del fenomeno non è da lui affatto indicato. Ma che le sue nozioni sull'argomento fossero assai inesatte dimostra un altro passo delle sue Storie dove si parla di uno spiacevole incidente successo ai soldati di Artabazo presso Potidea sulle spiagge della Macedonia ([7]). Il mare si era improvvisamente ritirato in modo da lasciare un guado (τέναγος) verso Pallene, ma, messisi i soldati per questo guado e giunti appena a mezza strada, sopravvennero di nuovo i flutti che fecero affogare parecchi dei soldati stessi. Qui non si tratta certo del solito fenomeno della marea che è in questa località del tutto insignificante, ed Erodoto stesso nota chiaramente che la cosa era al tutto insolita; pure usa a indicare questo ritirarsi del mare la parola ἄμπωτις già usata in senso di riflusso nei due luoghi prima riferiti, e per il successivo ritorno delle acque usa il vocabolo πλημυρίς che è la voce più comune, come or ora vedremo, per indicare il flusso. L'intero fenomeno è denotato poi colle parole ῥηχίη καὶ πλημυρίς, laddove nei due passi precedenti la voce ῥηχίη è opposta ad ἄμπωτις. Erodoto non ha distinto questo fenomeno insolito dalle comuni maree e la stessa incertezza delle voci da lui adoperate ci mostra come egli, che del resto poco si occupava di geografia fisica, non avesse ancora del flusso e riflusso una esatta cognizione.

([1]) *Odissea*, XII, vv. 104-05.

([2]) Per le conoscenze generali di Omero sul mare cf. Buchholtz, *Die Homerische Realien*, vol. I, Lipsia, 1871, pag. 57 segg. e specie 66-68.

([3]) Cfr. Ukert, *Geographie der Griechen und Römer*, II Parte, 1ª Sezione, pag. 74 segg.

([4]) Cfr. il recente completo lavoro del Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Berlino, Weidmann, 1903. Tra tutti i presocratici sembra che Democrito avesse meglio studiato il mare; egli aveva fatto lunghi viaggi e scritto un Periplo o Γεωγραφία di cui Agatemero ci ha conservato un breve frammento. Diels, pag. 411.

([5]) Herod., lib. II, cap. 11, § 2.

([6]) Herod., lib. VII, cap. 198.

([7]) Herod., lib. VIII, cap. 129.

Ma prima di andar oltre sarà opportuno esaminare brevemente queste stesse parole con cui i Greci indicavano il fenomeno che ci occupa, per intendere — per quanto è possibile — qual concetto avessero avuto di esso in origine [1].

Πλημμυρίς [2] e *ἄμπωτις*, corrispondenti al nostro « flusso » e « riflusso » sono le parole con cui il fenomeno è più spesso appellato. Il primo vocabolo, con le forme affini *πλήμη* (*πλήσμη*) e *πλημμύρα* altro non significa in origine che « gonfiamento » o « traboccamento » da una radice assai nota (cfr. il verbo *πλήθω*). Eschilo se ne serve ad indicare il gonfiarsi degli occhi nel pianto [3], e poi spesso si trova usata a denotare la piena delle acque o inondazione in generale [4], o anche la piena dei fiumi [5]; in un solo esempio, ch' io sappia, passa a significare il luogo stesso invaso dalle acque del mare [6]; è usato infine anche in senso figurato [7]. Non è dunque una parola tecnica per indicare il fenomeno specifico della marea, ma in opposizione ad *ἄμπωτις*, o anche da sola è usata sempre dai geografi nel solo significato di flusso. Così da Strabone e da Arriano in molti passi che più avanti avremo occasione di citare, e anche da Diodoro e da altri [8].

Ἄμπωτις o *ἄμπωσις* da *ἀνάπωσις* [9] significa « ribevimento » (*ἀναπίνω*) e al pari di *πλημμυρίς* si trova usata in significati più generali che non quello di riflusso: indica cioè un generico ritrarsi delle acque e spesso è applicato in questo senso ai fiumi [10].

Come abbiamo visto, Erodoto usa in opposizione ad *ἄμπωτις*, *ῥηχίη* [11], ma in attico *ῥαχία*, giusta la sua etimologia (cfr. il verbo *ῥήγνυμι* = frangersi, spezzarsi), altro non significa che il luogo dove l'onda si frange, particolarmente scogli o spiagge rocciose [12]. Arriano l'adopera per denotare bracci di mare angusti e scogliosi dove si risente fortemente l'effetto della marea [13]; si trova usata anche ad indicare l'onda

(1) Nella breve indagine lessicale che segue mi ha offerto parecchie indicazioni il mio amico Giorgio Pasquali, indefesso studioso della greca filologia.

(2) Anche *πλήμμυρις*, ma la forma ossitona è più corretta, come avverte lo Scoliaste di Apollonio Rodio, II, 595.

(3) Eschilo, *Coefore*, 183-87.

(4) In questo senso *πλημμύρα* in Dion. Halyc., lib. I, cap. LXXI (ed. Jacoby, Lipsia 1885); *πλημμυρίς* in *Περὶ κόσμου* capo 5 in fine. Un inturgidamento locale e momentaneo del mare, *Odissea*, IX, 485.

(5) In questo senso *πλήμη* in Olympiod., *In Meteora*, pag. 94, riga 10 (ediz. Reimer, Berlino, 1900) e in Esiodo, framm. 212 (ediz. Götting-Flach, Lipsia, 1878); *πλημμύρα* in Plutarco, *Romulus*, cap. 3; *πλημμυρίς* in Nicandro, *Alexipharmaca*, v. 404.

(6) Phalaris, *Epist.* 75 (ediz. Volckenauer).

(7) Sext. Empiricus, *Advers. Mathem.*, pag. 576 (ediz. Bekker): *ἑαυτῷ ἐγείρει κακῶν πλήμμυραν.*

(8) Diodoro, V, 22. Al lib. XII, 106 si ha, in opposizione ad *ἄμπωτις*, *πλήμη*, come in Polib. XX, 5 e nella *Periplus maris Erythraei*, cap. 45 (Müller).

(9) *Ἀνάπωτις* in Pindaro, *Olymp.*, IX, v. 52.

(10) *Διψαλέη ἄμπωτις ῥοάων* Callimaco, *Inno a Delo*, 127; e spessissimo in Olimpiodoro, pag. 99, riga 36; 106, 8 e 18; 111, 22; 114, 5 e segg.; 121, 6 (ediz. citata).

(11) Ciò si trova anche una volta in Dione Cassio, XXXIX, 40.

(12) Cfr. ad es. Eschilo, *Prometeo*, v. 713; Thucid., IV, 10; Diodoro, III, 15. Il nome Durazzo *Δυρράχιον* deriva probabilmente di qui: *πρὸς τὴν τῆς ῥαχίας δυσχέρειαν* come dice Dione Cassio, XLI, 49.

(13) Arriano, *Hist. Indica*, XXII, 8; XXIII, 1; XXVII, 5-6.

stessa del mare burrascoso che si frange ([1]) e perfino il rumore delle onde frangentisi e un rumore in genere. Dai geografi non è peraltro usata nel significato specifico di marea, come sembra abbiano inteso quei moderni a cui si deve il termine *isorachie* per indicare le linee lungo le quali si propaga contemporaneamente l'onda della marea oceanica.

Una parola sola per indicare complessivamente il fenomeno del flusso e del riflusso, come il latino « aestus » il nostro « marea » è in greco *παλίρροια* — quasi « fluttuazione » — che vedremo usato da Strabone, e si legge in un passo già citato di Dione Cassio ([2]); ma lo stesso vocabolo si trova anche applicato alle acque marine per indicare l'avanzarsi e il retrocedere delle onde presso il lido o anche in alto mare ([3]), ovvero le correnti e controcorrenti alternantisi negli stretti ([4]); applicato ai fiumi per denotare del pari correnti urtantisi in direzioni oppposte, gorghi o altro ([5]). Altri vocaboli più rari tralasciamo ([6]).

Concludendo dunque, è evidente che i Greci hanno applicato al fenomeno della marea vocaboli che prima ebbero un significato più generale. Il flusso e riflusso in origine non fu distinto da altri fenomeni analoghi — come ringorghi, cresciti o ritiri locali e occasionali delle acque — e più tardi, quando se ne acquistò una chiara idea, rimasero quei vocaboli generici coi quali esso era stato dapprima confusamente indicato.

Una generazione dopo Erodoto, un primo tentativo — per quanto si sappia — di spiegare la marea, sembra fosse stato fatto da Platone (438-347). Veramente in nessuna delle opere a noi pervenute del grande filosofo si fa cenno del fenomeno di cui ci occupiamo; ma secondo una notizia — tutt'altro che chiara – trasmessaci da Plutarco e da Stobeo ([7]), Platone spiegava la marea come un dondolamento delle acque marine che alternativamente, con movimenti di altalena, uscivano e rientravano nelle cavernosità di cui è tutta perforata la terra. Tale spiegazione è perfettamente conforme alle vedute di Platone intorno alla costituzione del globo. Egli infatti nel Fedone ([8]) afferma che l'interno della terra è tutto percorso da canali più o meno larghi, da caverne, da fori, per entro ai quali correnti di fuoco, acqua e vapori si agitano

([1]) Polyb., I, 37. In Omero si trova in un senso affine a questo, la voce *ῥηγμίν*: *Odiss.*, IV, 430; *Il.*, XXI, 67.

([2]) Dione Cassio, XXXIX, 40.

([3]) Lycophron, *Alexandra*, v. 757 (ed. Holzunger). L'Holzunger traduce qui *παλίρροια* con Brandung. Un aggettivo *παλλιρρόθιος* si trova già in questo senso in Omero: *παλιρρόθιον κῦμα*, *Odiss.*, V. 430 e IX, 485; cfr. Ebeling, *Lexicon Homericum* al voc. *παλιρρόθιος*. Vedi anche, per *παλίρροια*, nel senso generale di « flutti » Callimaco, *Inno* cit., v. 191.

([4]) Olympiod, pag. 128, riga 35; Pausania, V. 25, 2.

([5]) Vedi un passo, poco chiaro del resto, di Erodoto relativo al Nilo, II, 28 e anche Sofocle, framm. 748: *παλιρροία βυθοῦ*.

([6]) Sarebbero da citarsi *ἀνάρροια*, *ἀναχώρησις*, *ἐπιρροή* etc., per i cui significati rimando ai Dizionarii.

([7]) *Πλάτων ἐπὶ τὴν αἰώραν φέρεται τῶν ὑδάτων· εἶναι γάρ τινα αἰώρας διά τινος (στομίου) τρήματος περιφέρουσαν παλίρροιαν, ὑφ᾽ ἧς ἀντικυμαίνεσθαι τὰ πελάγη*. Plut., *De placitis philosoph.* Lib. IV, 17 (Moralia, ediz. Didot, pagg. 1094). Cfr. Diels, *Doxographi Graeci*, pag. 383.

([8]) Platone, *Fedone*, § 111 C. e segg.

senza tregua. Quanto alla regolarità del movimento di altalena, essa è indicata dal vocabolo *αἰώρα* nella notizia doxografica; e sappiamo inoltre che a proposito dell'alternarsi dei venti, Platone ricorreva alla similitudine del respiro degli animali (1), anzi tutto l'universo era da lui concepito come un essere vivente (2). Si può dunque affermare che la notizia trasmessaci dai doxografi risponde assai bene al concetto che il filosofo ateniese poteva essersi formato del fenomeno, senza peraltro voler decidere se la spiegazione data risalga effettivamente a lui, o se sia stata foggiata da altri posteriormente sulle vedute generali del filosofo riguardo al mare (3).

Aristotele, alquanto più giovane di Platone (384-322) non avrà certamente mancato di occuparsi dell'interessante fenomeno; egli era infatti assai studioso dei fenomeni del mare e ne aveva indagato con cura i movimenti; egli parla, ad esempio, delle correnti del Mediterraneo, dovute, secondo lui, alla diversa altezza dei bacini, dal Ponto Eusino, il più elevato, fino al Tirreno, il più basso; conosce il fenomeno dell'Euripo (4), e afferma che in generale negli stretti di mare l'acqua è irrequieta e presenta una sorta di librazione — *ταλάντωσις* — che l'angustia rende visibile più che nel mare aperto (5); anzi in quest'ultimo passo alcuni commentatori intesero che si accennasse alla marea (6). Invece accenni espliciti a questo fenomeno nelle sue opere non si trovano; ma qui ci vengon nuovamente in soccorso le notizie dei doxografi. Plutarco scrive infatti: *Ἀριστοτέλης [Ἡρακλείδης] ὑπὸ τοῦ ἡλίου, τὰ (γὰρ) πλεῖστα τῶν πνευμάτων κινοῦντος καὶ περιφεροῦντος· ὑφ' ὧν ἐμβαλλόντων μέν, προωθουμένην ἀνοιδεῖν τὴν Ἀτλαντικὴν θάλασσαν, καὶ παρασκευάζειν τὴν πλημμύραν, καταληγόντων δ' ἀντιπερισπωμένην ὑποβαίνειν, ὅπερ εἶναι τὴν ἄμπωτιν* (7). Aristotele conosce già dunque che la marea si verifica nell'Oceano Atlantico; ma l'aver parlato di questo solo mare, ci lascia in dubbio se egli ritenesse che nel Mediterraneo non si verificasse una vera e propria marea, come noi propendiamo a credere, ovvero se stimasse le maree del Mediterraneo ripercussione di quelle oceaniche, come vuole il Berger (8). L'opinione che Aristotele avesse spiegato la marea coll'azione di venti mossi dal sole, è accettata in tutto il Medio Evo e per noi non ha nulla di strano, poichè l'azione dei venti sulle acque del mare è affermata e discussa in più luoghi da Aristotele stesso (9). Se non che una notizia di Strabone (10) c'informa che Posidonio confutava l'affermazione di Aristotele che la marea sulle coste atlantiche

(1) *Fedone*, 112 B.

(2) Platone, *Timeo*, § 39.

(3) Cfr. Berger, op. cit., pagg. 289-90. È perfin dubbio se Platone conoscesse esattamente il periodo semidiurno del flusso e riflusso, per mezzo del quale soltanto si poteva chiaramente scernere questo moto del mare dal consueto movimento ondoso.

(4) Aristot., *Meteorol.*, II, 8, 7.

(5) *Meteorol.*, II, 1, 11-12.

(6) Non però così intesero i commentatori antichi, che non parlano di marea in questo luogo. Cfr. ad es. il Commento di Alessandro di Afrodisia (Berlino, Reimer, 1899, pagg. 69-70), e quello di Olimpiodoro (Berlino, Reimer, 1900, pagg. 131-32).

(7) Plut., *Placit. philos.*, loc. cit. Cfr. Diels, *Dox. Gr.*, loc. cit.

(8) Berger, op. cit., pagg. 290-91.

(9) Fra gli altri nei *Problemi* 2, 12, 28 della sezione XXIII.

(10) Strabone, lib. III, cap. 3.

della Spagna fosse prodotta dalla ripidezza delle coste medesime che respingevano l'urto delle onde. Dove ciò dicesse il grande filosofo, non sappiamo, ma non vi è ragione di dubitare di questa notizia; è probabile peraltro ch'essa si debba intender nel senso che la marea, al pari di altri movimenti del mare, fosse più visibile negli stretti angusti, fra spiagge erte e rocciose, senza che ciò sia in contrasto con la causa più generale assegnata da Aristotele al fenomeno. A questo proposito giova confrontare questa notizia di Strabone con un'altra da lui data poche pagine prima, nella quale, parlando delle spiagge meridionali della Spagna, nota che ivi la marea è più cospicua che altrove per la speciale conformazione della costa (1).

Ma all'epoca di cui parliamo, la conoscenza della marea non doveva essere affatto una cosa comune. Se già probabilmente i naviganti greci l'avevano constatata in alcuni luoghi del Mediterraneo, e da Cadice e dagli altri emporii della Spagna meridionale erano venute notizie sul fenomeno così cospicuo nell'Atlantico (2), queste informazioni dovevano esser rimaste ancora ristrette in una piccola cerchia di persone. Una curiosa prova di ciò ci vien fornita dalla sgradevole sorpresa ch'ebbero i soldati di Alessandro Magno, allorchè, nel 327, durante la famosa spedizione indiana, essi osservarono alle foci dell'Indo il succedersi del flusso e riflusso in proporzioni molto rilevanti. Quando l'onda di marea, respingendo indietro il fiume, invase i campi adiacenti alla riva — tumulis dumtaxat eminentibus vel insulis parvulis (3), — non poco timore n'ebbero i soldati tutti e lo stesso Alessandro « che mai per l'innanzi avevano ciò conosciuto » (4), e il terrore si accrebbe quando il mare, ritraendosi nuovamente, lasciò le navi all'asciutto sparse qua e là e abbattute. Passato il primo spavento, già Alessandro ordinava ai suoi di rialzarle, quando il successivo flusso spontaneamente le rimise a galla, sì che esse senza nessuna avaria furon di nuovo in grado di navigare. I soldati non ne capivan nulla: « quaenam esset eiusdem elementi natura, modo discors, modo imperio temporum obnoxia, mirabundi requirebant » (5). Per altro appunto questo grande viaggio di Alessandro, che di tanto accrebbe le conoscenze geografiche (6) fornì anche nuove importanti notizie sul fenomeno che ci occupa. Nearco, nel suo grande viaggio dalle foci dell'Indo al Golfo Persico (7), ad ogni momento ebbe occasione di fare osservazioni sulla marea, allorchè più volte, sulle coste della Persia e specialmente nel Golfo Persico, i violenti flussi e riflussi gli resero difficile l'approdo

(1) Strabone, lib. III, cap. 2, § 4.

(2) La prima menzione sicura delle maree nell'Atlantico si ha, come abbiam visto, in Aristotele. Ma già da tempo i Fenici di Cadice, avventurandosi nell'Oceano sconosciuto, avean appreso che a 4 giorni di navigazione dalle Colonne d'Ercole si trovavano spiagge rivestite di piante marine ch'erano asciutte al tempo del riflusso e coperte dall'acqua durante il flusso. Cfr. *Περὶ θαυμασιῶν ἀκουσμάτων*, § 136. Con ciò va ben d'accordo ciò che dice il *Periplo* dello Pseudoscilace, I, 1: *Ἀπὸ Ἡρακλείων στηλῶν τῶν ἐν τῇ Εὐρώπῃ ἐμπόρια πολλὰ Καρχηδονίων καὶ πηλὸς καὶ πλημμυρίδες καὶ πελάγη.*

(3) Curzio Rufo, lib. IX, cap. 9, § 9-27.

(4) Arriano, *Anabasis*, lib. IV, cap. 19.

(5) Curzio Rufo, loc. cit.

(6) Cfr. sull'importanza geografica del viaggio di Alessandro, Bunbury, op. cit., I, pag. 406 segg.

(7) Sul viaggio di Nearco, cfr. Bunbury, I, pagg. 525-41 e il commento del Müller alla *Historia Indica* di Arriano nei *Geographi Graeci Minores*, vol. I (ed. Didot).

o la navigazione e misero in pericolo alcune delle navi [1]; e Onesicrite, che pure accompagnò Alessandro nella sua spedizione, parlava anch'egli delle ingenti maree che mantengono continuamente paludose molte spiagge, specialmente alle foci dei fiumi [2].

Peraltro, sulla connessione del flusso e riflusso con la luna, non si sa che alcuno facesse in questa celebre spedizione, osservazioni di sorta. Teofrasto (372?-287), filosofo e naturalista di cui son note le opere botaniche, uno dei primi che si servisse a scopo scientifico del gran corredo di cognizioni nuove arrecate da Alessandro, sebben conosca appunto in base alle relazioni del grande viaggio, le cospicue maree dell'Oceano Indiano [3], non sembra avere ancora un'idea chiara sulla causa del fenomeno. Che anch'egli, al pari del suo maestro Aristotele, lo collegasse coi venti, appare probabile da due frammenti rimastici, in uno dei quali parla dell'azione dei venti sulle acque del mare [4], nell'altro dà la strana informazione che il flusso annunzia il vento borea, il riflusso il noto [5]; ciò è in relazione col fatto che il borea si credeva avesse un'azione induritrice ed essiccatrice, il noto una azione opposta.

Comunque, è evidente che noi siamo ancora in un periodo in cui della marea non si ha una conoscenza scientifica. Il fenomeno, appreso forse confusamente dai naviganti del Mar Rosso, non distinto dapprima da altri movimenti del mare, soltanto molto più tardi verificato anche nel Mediterraneo — la cui irregolarità al riguardo accresceva certo la confusione — ormai, grazie alle notizie e alle osservazioni riguardanti le coste meridionali della Spagna e l'Oceano Indiano, cominciava ad esser conosciuto nei suoi caratteri esteriori. Ma la conoscenza precisa si ha solo, come abbiam detto, quando della marea è nota la vera causa, perchè allora soltanto il fenomeno appare pienamente distinto da ogni altro. Ciò è dimostrato dai primi tentativi di spiegazione finora ricordati, nei quali, in mezzo alle oscurità e alle stranezze di alcuno, nessun accenno si trova ad una corrispondenza fra l'andamento dei flussi e riflussi e le fasi della luna. È per noi di molta importanza ricercare quando per la prima volta venisse osservata tale corrispondenza, che fu più tardi il punto di partenza di spiegazioni più razionali.

II.

La dottrina della marea presso i geografi greci

(dalla fine del IV secolo alla fine del I).

Il primo accenno che noi abbiamo ad una corrispondenza fra i movimenti del mare e il corso della luna non si riferisce precisamente alla marea, ma ai fenomeni

(1) Cfr. Nearco presso Arriano, *Hist. Indica*, Capp. XXI, 3; XXII, 8; XXIII, 1; XXIX, 9; XXXVII, 5-6; XXXVIII, 7; XXXIX, 7-8; XL, 10. Le osservazioni fatte sulla marea formavano una parte importante del racconto fatto da Nearco ad Alessandro. Cfr. Diodoro, XVII, 106.

(2) Onesicrite, presso Strabone, lib. XV, cap. I, § 20 e § 34.

(3) Egli dice che in alcune isole dell'Oceano Indiano ove vegetano alti alberi, accade che durante il flusso essi vengano ricoperti tutti eccetto i più alti rami, ai quali allora i naviganti legano le barche, che invece durante il riflusso legano alle radici degli alberi stessi. *Hist. Plantarum*, lib. IV, cap. 7, § 4.

(4) Theophr., *Fragm. de Ventis*, § IV, 26.

(5) Theophr., *Fragm. de Signis tempestatum*, 29.

più complessi, ma assai facilmente osservabili, cui essa dà luogo nello stretto di Messina. Nella raccolta di fatti mirabili di Antigono di Caristo (III secolo) (1) e in quella falsamente attribuita ad Aristotele, è ricordato che nello stretto di Messina le acque crescono e decrescono col crescere e decrescere della luna (2); le due notizie risalgono probabilmente ad una fonte comune di cui peraltro è assai difficile stabilire l'antichità. È ben probabile che, come già prima accennammo, da tempo assai antico i naviganti greci conoscitori dei vortici di Cariddi e i coloni stabiliti sulle rive dello stretto avessero avvertito una corrispondenza fra i movimenti di quelle acque e le fasi della luna, ma non certo nel modo che dai paradoxografi ci è tramandato. Le notizie, forse molto antiche e divulgate oralmente, di tali osservazioni, debbono esser giunte sconvolte agli autori delle raccolte ora citate. Ma è curioso che non dissimili da queste sono le notizie che ci vengono riferite riguardo alle osservazioni fatte sulla marea da Eutimene e Pitea di Marsiglia, fioriti ambedue nella seconda metà del secolo IV. Le loro conoscenze in proposito si basano su viaggi eseguiti nell'Oceano Atlantico; là, dove i naviganti e commercianti greci e fenici già da tempo eran stati certamente colpiti dal mirabile fenomeno, anche i due marsigliesi fecero le loro notevoli osservazioni. Di Eutimene, un poco più vecchio forse dell'altro, presso che nulla si sa fuori che egli aveva studiato i fenomeni fisici del mare che bagna le spiagge africane (3), e secondo Clemente Alessandrino aveva scritto anche un Periplo (4); Pitea invece è ben altrimenti famoso. Contemporaneo, ma un poco più giovane di Aristotele (5), di qualche anno più vecchio di Dicearco, egli è l'autore del famoso viaggio nell'Atlantico Settentrionale che fu, pel progresso della geografia, di non minor momento del viaggio di Alessandro nell'estremo Oriente (6). È appunto nell'Atlantico ch'egli avrebbe osservato in grandi proporzioni il fenomeno, e paragonando le maree fortissime dell'Oceano con quelle esigue e mal definite del Mediterraneo, ne avrebbe concluso che il flusso e riflusso terminava allo stretto di Gades, senza propagarsi nel mare interno. Così deve intendersi senza dubbio un passo di Strabone, ove è detto che Artemidoro rimproverava Eratostene per aver questi asserito tra l'altro, sulla fede di Pitea, che appunto la marea finiva allo stretto di Gades (7); la cosa diventa molto più chiara se, rivoltando la frase, diciamo che il fenomeno del flusso e riflusso

(1) È un contemporaneo di Eratostene. Su di lui Wilamowitz, in *Philolog. Untersuch.* fasc. IV.

(2) Aristot., *Περὶ θαυμασ. ἀκουσμ.* § 55. *Ὁ πορθμὸς ὁ μεταξὺ Σικελίας καὶ Ἰταλίας αὔξεται καὶ φθίνει ἅμα τῷ σεληνίῳ*; e Antig. Caryst., 125: *Φασὶν δὲ καὶ περὶ τὸν τῆς Ἰταλίας πορθμὸν φθίνειν καὶ πληροῦσθαι κατὰ τὴν μείωσιν τῆς σελήνης καὶ αὔξησιν.* Sui fenomeni dello stretto di Messina vedi ancora *Περὶ θαυμασ. ἀκουσμ.* § 130.

(3) Seneca, *Natur. Quaest.*, IV, 22; Plut., *Placit. philos.*, IV, 1.

(4) Clem. Alex., *Strom.* I, pag. 389 (ediz. Potter).

(5) Questi non conobbe la relazione del viaggio di Pitea. Cfr. Berger, op. cit., pagg. 340-41.

(6) Non è qui il luogo di ricordare l'intera letteratura su Pitea che è assai vasta. Tra le antiche monografie è importante quella del Fuhr, *Pytheas aus Massilia* (Darmstadt 1842). Notevoli le pagine consacrate a Pitea dal Müllenhoff, *Deutsche Altertumsk.* vol. I, specialmente pag. 365 segg. Vedi anche Berger, op. cit., pagg. 351-53; Matthias, *Ueber Pytheas von Massilia*, Berlino 1901; Callegari, *Pitea di Massilia*, in Rivista di Storia Antica, 1903 e 904. I frammenti di Pitea son pubblicati dallo Schmekel (Merseburg 1848).

(7) Strabone, lib. III, cap. II, § 11.

comincia a divenir perspicuo solo a chi, uscendo dal Mediterraneo, s'inoltra appena poco fuor dello stretto nell'Atlantico. Giustamente Pitea aveva anche notato che più che in altro luogo la marea era notevole presso la Britannia, ove, secondo Plinio, il navigatore marsigliese avrebbe perfino eseguito una misura « Octogenis cubitis super Britanniam intumescere aestus Pytheas Massiliensis auctor est. » (1). Il valore di questa notizia, attinta da Plinio chi sa dove, è assai dubbio, e in ogni caso in nessun luogo vicino alla Britannia il flusso sale a 80 cubiti, corrispondenti all'enorme valore di circa 37 metri (2). Non mi sembra però probabile che, come alcuni hanno asserito, Pitea abbia qui confuso la regolare marea con uno straordinario movimento del mare (3), perchè ormai il fenomeno del flusso e riflusso doveva essere conosciuto esattamente almeno nella sua natura esteriore; quanto mai si può pensare che la cifra *octogenis* debba sostituirsi con un'altra meno esagerata (4).

Quanto al fatto più importante della corrispondenza con le fasi lunari, Plutarco afferma che il navigante marsigliese diceva « il flusso avvenire al crescere della luna, il riflusso al decrescere » e identica notizia ci è trasmessa da Galeno anche riguardo ad Eutimene (5). È probabile — noi non osiamo dir certo, come il Berger e il Müllenhoff affermano — che le notizie di Pitea sieno state fraintese, ed è sommamente a deplorarsi che per questa parte ci manchino notizie più dirette sulle osservazioni dell'ardito navigante. Ma Eratostene, che, come tra breve vedremo, ha esatte conoscenze sull'andamento della marea, ebbe probabilmente per fonte delle sue informazioni, qui, come in tanti altri casi, la relazione di Pitea (6). Certo questi fu tra i primi, se non a riconoscere, almeno a divulgare, per mezzo della narrazione del suo viaggio che fu molto letta, l'osservazione di una corrispondenza tra la marea e le fasi lunari, ma quanta parte abbia egli avuto nelle ulteriori ricerche dei geografi greci non possiamo dire con esattezza, poichè simili osservazioni dovevano aver fatto già da tempo, come pure accennammo, i Fenici colonizzatori dello stretto di Gades, osservazioni di cui altresì usufruirono i posteriori geografi e in particolare Posidonio al quale la dottrina della marea è debitrice dei più notevoli progressi.

Poichè nel suo straordinario viaggio Pitea aveva veduto molte cose nuove e strane, si comprende come le sue osservazioni e affermazioni non trovassero credito subito e ovunque fra i suoi contemporanei: così sappiamo che Dicearco, poco più

(1) Plinio, *Hist. Natur.*, lib. II, cap. 97. Si è discusso che cosa significhi il *super Britanniam* di Plinio, traduzione forse di equivalenti parole greche. La cosa più probabile è che Pitea abbia osservato i flussi più ingenti presso l'estuario di alcuno dei fiumi gallici o britannici sfocianti nell'Atlantico.

(2) Nessuna delle misure eseguite ai giorni nostri raggiunge valori simili. Nel Golfo di S. Michele sulla costa nord della Britannia, noto pei suoi violenti flussi, si verificano altezze massime intorno agli 11 metri. cfr. Krümmel, *Oceanographie*, II, 161.

(3) Così crede il Fuhr, op. citata, pag. 17 nota 24, e anche il Parisio (Riv. Geogr. Ital., 1895, pag. 607).

(4) Il Forster, ad esempio, sostituirebbe a *octogenis*, *vicenis*. Cfr. Callegari, Mem. citata, Riv. di Storia Antica, 1904, pag. 237.

(5) Plutarco, *Placit. Philos.*, III, 17; Galeno, *Hist. Philos.*, § 88.

(6) Müllenhoff, op. cit., loc. cit.

giovane del viaggiatore marsigliese, non gli prestava alcuna fede (1). Se questo si possa riferire anche alle informazioni recate da Pitea sul fenomeno della marea, non sappiamo; ma indurrebbe a crederlo un frammento pervenutoci secondo il quale l'opinione di Dicearco relativamente al flusso e riflusso sarebbe completamente diversa da quella di Pitea (2). Scolaro immediato di Aristotele, il geografo di Messina addita, come il suo maestro, il sole quale causa della marea, ma non più per mezzo dei venti da quello suscitati: è il sole stesso, secondo Dicearco, che nei luoghi sui quali risplende fa sollevare le acque, che riprendono la loro posizione ordinaria quando il sole se ne va. La marea seguirebbe dunque il corso del sole anzichè quello della luna, e si avrebbe qui il primo accenno di un'opinione che in seguito troveremo qua e là ripetuta anche nel Medio Evo.

Un'altra opinione diversa da quelle finora ricordate avrebbe avuto lo storico e geografo Timeo di Taormina (tra il 340 e il 250 circa); egli conosceva, attraverso la relazione di Pitea, il fenomeno della marea così cospicuo presso alcune isole poste in vicinanza delle coste meridionali della Britannia, note pel commercio dello stagno (3), ma secondo una notizia doxografica (4) derivava, a differenza di Pitea, la marea nell'Atlantico dallo sfociare dei fiumi della Gallia che, ora versavano in mare le loro acque con impeto e ricacciandole innanzi a sè generavano il flusso, ora ritornavano a scorrere più tranquilli, permettendo alle onde di ritornare indietro (riflusso). Già l'Ukert e dopo di lui il Berger e il Müllenhoff osservarono che questa strana spiegazione dovrebbe esser sorta da qualche errata interpretazione dell'autore di quel brano pervenutoci, nel quale si dovrebbe ravvisare soltanto un accenno, attinto probabilmente ancora a Pitea, ai « praegrandia flumina Britanniae alternis motibus modo in pelagus modo retro fluentia » di cui parla Mela (5); ciò che in alcuni luoghi può essere effetto della marea, sarebbe additato qui, per una cattiva interpretazione del testo di Timeo, come causa di essa. Ciò è certamente probabile; ma giova ricordare che questa stessa spiegazione, per quanto assurda possa essere, ritorna ancora più d'una volta nel Medio Evo ed è accettata perfino da Leonardo da Vinci che ce la presenta in una forma assai meno strana. Noi non vorremmo perciò negare assolutamente che Timeo la potesse avere emessa come ipotesi, forse non di sua iniziativa e chi sa a che proposito.

Il terzo e il secondo secolo avanti l'èra volgare furono i più floridi per gli studî della geografia; e che fra le questioni che maggiormente occuparono i geografi ci fosse

(1) Strabone, lib. II, cap. IV, §§ 1-2. Così più tardi, e con più ostilità, Polibio.

(2) *Excerpta ex Ms. Flor. Joannis Damasceni, Λόγος λδ'*. Cfr. Stobaei, *Florilegium*, ediz. Meinecke (Lipsia, 1857), vol. IV, pag. 244.

(3) Diodoro, V, 22. Si nota qui come fatto singolare, che queste isole al tempo del riflusso, restando all'asciutto lo stretto che le separa dal continente, divengono penisole. Questo passo risale certo a Timeo, come mostra il raffronto con Plinio, IV, 17, 30 (cfr. Heyne, *De fontibus hist. Diod.* nel vol. II dell'ediz. di Diodoro, a cura di L. Dindorf, Lipsia, 1867, pagg. XVII-XVIII). Timeo ha poi attinto questa, come altre notizie relative alla Britannia, a Pitea; cfr. Plinio, XXXVII, 11, 1; IV, 14, 27 e Geffken, *Timaios's Geographie des Westens* (Berlino, 1892), pag. 68 e segg.

(4) *Excerpta* etc., loc. cit.; e Galeno, *Hist. Philos.*, § 88.

(5) Pomp. Mela, lib. III, cap. 6, § 51.

quella delle maree, e che su di essa si discutesse ormai partendo da principî più razionali e, in generale, più conformi al vero, lo provano i numerosi accenni conservatici specialmente da Strabone; i quali, se non ci chiariscono in molti casi delle opinioni di tutti i singoli scienziati, ci permettono peraltro di comprendere con sufficiente sicurezza a qual punto arrivassero, nel massimo fiore della scienza geografica dei Greci, le conoscenze positive sul fenomeno che ci occupa. Nella prima metà del III secolo si dev'essere occupato certamente della marea il famoso Stratone di Lampsaco (nato fra il 340 e il 330, morto il 240), scolaro di Teofrasto, le cui dottrine fisiche a noi non pervenute, traspaiono talora attraverso i frammenti di Eratostene che a Stratone attinse largamente (1). Eratostene (circa 276-194) che riassume in un'opera organica i progressi delle conoscenze geografiche dallo scorcio del IV secolo in poi, aveva già vedute molto esatte sull'andamento del flusso e riflusso, appoggiate soprattutto alle osservazioni di Pitea. Il primo flusso diurno comincia al sorgere della luna e dura finchè essa è giunta in mezzo al cielo; allora si inizia il riflusso che procede finchè la luna sia giunta all'occidente; poi nuovamente ritorna il flusso fintanto che la luna non si trovi nuovamente nel mezzo del cielo — ma dalla parte opposta a quella in cui era 12 ore prima —; indi si ha il secondo riflusso che dura fino al ritorno della luna all'oriente (2).

Come già accennammo, Eratostene, seguendo in ciò Pitea, credeva che la marea si verificasse nell'Oceano in proporzioni assai maggiori che nel Mediterraneo; pure gli è noto che flussi e riflussi si verificano anche negli stretti, come in quelli di Calcide e di Messina e ne dà pure la spiegazione. Secondo lui le maree di questi stretti sono prodotte da un dislivello esistente fra i due mari che lo stretto pone in comunicazione; p. es. le acque più alte del Tirreno « discendono » in quelle dell'Jonio e allora si ha un flusso *discendente* (*κατιών*) attraverso lo stretto di Messina, cui succede più tardi un flusso *ascendente* (3), quando i livelli dei due mari si sono invertiti. La causa che mantiene questo dislivello non è nel breve frammento di proposito accennata, ma poichè è detto che queste correnti o flussi degli stretti concordano, come quelli dell'Oceano, colle fasi lunari, noi intravediamo che questo dislivello deve essere a sua volta effetto delle maree oceaniche. Strabone, riferendo queste opinioni di Eratostene senza ben capirle, come talora gli succede, combatte l'idea di un possibile dislivello fra due mari opponendogli il principio di Archimede secondo cui la superficie di un liquido in quiete è sferica, e questa sfera ha per centro il centro della terra (4); secondo Strabone poi la causa di queste correnti degli stretti

(1) Berger, *Die geographische Fragmente des Eratosthenes*, pagg. 60-67. Tra gli scritti di Stratone vi erano i trattati *Περὶ οὐρανοῦ* e *Περὶ πνεύματος*.

(2) Strabone, lib. I, cap. 3°, § 11. Eratostene parla qui in particolare dello stretto di Messina, ma poichè dice — come or ora vedremo — che esso si comporta al tutto come l'Oceano, è chiaro che questa stessa vicenda dei flussi e riflussi era a lui nota in primo luogo nell'Oceano.

(3) Anche oggi la corrente di flusso che percorre lo stretto di Messina diretta a nord, è detta « rema *montante* », quella di riflusso in senso inverso « rema *scendente* ». Rema è un cimelio del greco *ῥεῦμα*. Cfr. Marinelli O., *Termini geografici dialettali raccolti in Sicilia*, in Riv. Geogr. Ital., 1899, pag. 610.

(4) *Παντὸς ὕδατος ἡσυχάζοντος ὥστε ἀκίνετον μένειν, ἡ ἐπιφάνεια σφαιροειδὴς ἔσται, ἔχουσα*

non è unica, altrimenti non si comprenderebbe come tutti si comportano diversamente fra di loro (1).

Un'applicazione importante e geniale delle conoscenze sulla marea, che ci mostra quanto progredito fosse ormai lo studio di questo fenomeno, è fatta da Eratostene, allorchè nel fatto dell'uguaglianza della marea, vede il principio razionale su cui basare la sua teoria dell'unità dell'Oceano (2). La questione se l'Oceano fosse uno e ininterrotto e la oicumene come un'isola entro di esso era fieramente dibattuta ai suoi tempi; ora Eratostene, che tale unità dell'Oceano tenta dimostrare finchè può, in via sperimentale, colle testimonianze cioè dei naviganti, corrobora tale dimostrazione adducendo il fatto che le maree sono dappertutto uguali, o non molto diverse, come derivanti da un unico mare. Questo tentativo che, come vedremo, fu assai violentemente combattutto più tardi, ci prova come ormai il fenomeno della marea fosse stato osservato in tutti i mari conosciuti. E invero, dopo le osservazioni di Alessandro e di Nearco nel mare Indiano e di Pitea nell'Atlantico settentrionale, i compilatori di peripli dovevano ricordare ormai la marea nei luoghi ov'essa era più cospicua (3); e alla metà del secondo secolo le navigazioni di Eudosso di Cizico nell'Atlantico meridionale avranno forse accresciuto il dominio delle conoscenze su questo interessante fenomeno.

Eratostene dunque deve aver certamente avuto coscienza che la marea costituiva un fenomeno universale e intrinseco al mare, concetto che segna un notevole progresso e che avrebbe potuto giovare ad allontanare definitivamente dal campo della scienza molte spiegazioni assurde, ove non fosse stato assai presto messo in non cale e, nel Medio Evo, come vedremo, anche assolutamente negato.

Mentre progredivano le osservazioni tendenti a porre le basi di una corrispondenza fra i movimenti della luna e l'alternarsi della marea, poco tempo prima ch'esse fossero accresciute per opera, come vedremo, di Seleuco e di Posidonio, una nuova spiegazione del fenomeno era affacciata per la prima volta, a quanto pare, da Cratete di Mallo in Cilicia, intorno alla metà del II secolo. Sebbene l'opinione di Cratete sulla marea sia soltanto accennata brevissimamente e oscuramente in un passo di Giovanni Damasceno (4), nondimeno la dottrina di Cratete sulla conformazione e divisione dell'Oceano, riprodotta quasi perfettamente da Macrobio (5), ci permette di riavvicinare quel breve accenno alla spiegazione da Macrobio stesso data della marea, spiegazione che di quella dottrina sulla divisione dell'Oceano, non è che una conse-

---

τὸ αυτὸ τῇ γῇ κέντρον. Archimedis, *Opp. omnia* (Lipsia, 1882), vol. II, pag. 357. Cfr. Boffito, *Cosmologia classica e patristica* in Atti della Pontif. Accad. dei Nuovi Lincei, vol. XIX, pagg. 343-45.

(1) Strabone, lib. I, cap. 3°, §§ 11-12.

(2) Strabone, lib. I, cap. 1°, § 8.

(3) Cfr., di quest'epoca, il Periplo di Agatarchide, *De Mari Erythraeo*, lib. V, cap. 2 e altri che verremo citando in seguito.

(4) *Excerpta ex man. Joan. Damasc.*, loc. cit. Κράτης ὁ γραμματικὸς τὸν ἀντισπασμὸν τῆς θαλάσσης αἰτιᾶται.

(5) *Comment. in Somn. Scip.*, lib. II, cap. 9, §§ 1-3. Cfr. Gemino, Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα. Lipsia, Teubner, 1898, pagg. 172-74.

guenza ([1]). Cratete immagina che una corona oceanica circondi tutta la terra lungo la zona equatoriale: questa, nella sua parte orientale spinge due lunghi bracci (*sinus*, dice Macrobio), l'uno fino all'estremo nord, l'altro fino all'estremo sud; dalla parte occidentale parimente si diramano due bracci, che dirigendosi pure l'uno a nord, l'altro a sud, incontrano ai due estremi settentrionale e meridionale i bracci occidentali. « E mentre con somma violenza e grandissimo impeto si mescolano e urtano a vicenda, dal cozzo stesso delle acque nasce *quel famoso* flusso e riflusso dell'Oceano »; e se esso si verifica anche nel Mediterraneo, come allora era generalmente ammesso, non è quivi che una ripercussione del flusso oceanico ([2]). È quindi una spiegazione affatto nuova che ora per la prima volta si incontra: la marea non è che il resultato di un urto — l'*ἀντισπασμός* di Giovanni Damasceno — di due correnti contrarie. Nuovo è dunque anche il concetto che informa questa spiegazione: cercare cioè nel mare stesso tutte le condizioni necessarie alla produzione del fenomeno, senza ricorrere all'azione di alcun agente esteriore. Nè sembra che tale spiegazione possa porsi in alcun modo in armonia con quella corrispondenza fra la marea e le fasi lunari che la osservazione sembrava aver omai dimostrato, ma che Cratete doveva assolutamente negare. La sua spiegazione, per quanto ingegnosa, segna un regresso nel cammino verso la verità e forse all'abbandono delle idee circa l'influenza lunare non è estraneo il discredito che poco prima aveva cercato di gettare Polibio sulle narrazioni di Pitea, le cui osservazioni dovevano essere tuttora il fondamento principale della dottrina dell'influenza lunare. Ma quell'abbandono non fu che momentaneo: la spiegazione di Cratete non sembra avesse molto credito fra i dotti del suo tempo, e il suo contemporaneo Seleuco, fatte nuove e importanti osservazioni sul vero andamento del fenomeno, scriveva contro di lui proponendo una nuova spiegazione; e più tardi, mentre tutte le ipotesi menzionate fin qui si ritrovano più o meno l'una accanto all'altra, la dottrina di Cratete si riaffaccia soltanto tardi, esposta nuovamente nel V secolo da Macrobio e accennata da qualche altro contemporaneo ([3]).

Invece, intorno a questo tempo, le osservazioni già abbastanza esatte, ma riguardanti il solo periodo semidiurno della marea, fatte da Eratostene, furono accresciute dalla diligenza e dall'acume di un matematico caldeo, la cui attività si esplicò largamente anche nel campo delle scienze geografiche: egli è Seleuco di Seleucia, fiorito intorno alla metà del II secolo ([4]). Mentre per gli scienziati greci l'unico luogo opportuno allo studio della marea erano le coste meridionali della Spagna, lontane dai grandi centri di cultura, e visitate solo da diligenti studiosi, Seleuco poteva osservarla a suo agio e in proporzioni ben più rilevanti assai vicino alla patria sua nel Mar Rosso e nell'Oceano Indiano.

([1]) Berger, op. cit., pagg. 453-54; Müllenhoff, op. cit., I, pagg. 252-53.

([2]) Macrobio, loc. cit.

([3]) La spiegazione contenuta nel verso 643 del poemetto di Rutilio Namaziano, *De reditu suo* (V sec. d. Cr.), sembra potersi — come vuole l'Ukert — accostare a questa; ma non così quella menzionata da Eumenio, *Panegyr. Constantii Caesaris*, cap. 6, che a me sembra diversa da quella di Rutilio. Cfr. avanti Cap. V.

([4]) Rüge S., *Der Chaldäer Seleukos*, in Jahresber. des Vereins für Erdk. zu Dresden. Dresda, 1865.

Da un passo già citato di Strabone [1] appare ch'egli l'avesse osservata in molti mari e fosse giunto a conclusioni del tutto opposte a quelle di Eratostene: che cioè la marea non è uguale in tutti i mari; giacchè Ipparco, sostenendo che l'Oceano non era uno, ma bensì diviso in molti bacini separati, si riferiva all'autorità di Seleuco che aveva osservato la marea comportarsi diversamente nei diversi mari, come se questi fossero fra loro separati. Possiamo domandarci in che potessero consistere queste diversità osservate da Seleuco riguardo alla marea. Intanto il geografo caldeo, abituato ad osservare la marea nella pienezza delle sue manifestazioni nell'Oceano Indiano, non avrà potuto fare a meno di notare la differenza fra questo mare e il Mediterraneo, dove il fenomeno si verifica in pochi luoghi, e sarà forse venuto alla conclusione che le maree del Mediterraneo, locali, deboli e talora mascherate o svisate da fattori di perturbazione, non potevano porsi accanto a quelle generali, forti, regolari dell'Oceano meridionale. Ma forse non si deve pensare soltanto a differenze di intensità e di regolarità; il paragone fra l'Oceano Indiano e l'Atlantico poteva mettere in grado il matematico caldeo di constatare altre diversità relative a minute particolarità del fenomeno in questione, come ci aiuta a dimostrare una osservazione importantissima che ci è riferita da Posidonio come dovuta espressamente a Seleuco [2]. Essa merita di essere illustrata qui a prova di due fatti: da un lato delle elevate conoscenze astronomiche del matematico caldeo, dall'altro del progresso cui erano giunte le dottrine sulla marea, progresso ben maggiore di quello che appaia a noi dagli scarsi documenti rimastici.

Seleuco aveva osservato nel fenomeno della marea delle uniformità e disformità in rapporto alle costellazioni dello zodiaco. « Quando la luna si trova nel segno dell'equinozio, le maree avvengono in modo uniforme, se essa sta nei segni solstiziali (le maree) sono ineguali e in veemenza [altezza?] e in velocità; negli altri segni questa disformità si regola secondo la vicinanza all'uno o all'altro dei due segni ». Questo brano, passato da Seleuco a Posidonio, da Posidonio a Strabone presso cui lo leggiamo, può sembrare alquanto oscuro e fu da alcuni interpretato in modo inesatto, ma trova la sua spiegazione più facile in un fatto assolutamente vero: « Quando la luna è negli equinozî, essa è sull'equatore, e quando essa è nei solstizi, è alla massima distanza a nord o a sud dell'equatore, ovvero, come dicono gli astronomi, alla sua massima declinazione nord o sud. Perciò Seleuco vuol dire che quando la luna si trova sull'equatore, le maree si seguono l'un l'altra con due flussi e due riflussi uguali per giorno, ma quando quella è distante dall'equatore, la successione regolare è interrotta. In altre parole, l'ineguaglianza diurna... si annulla quando la luna è sull'equatore, ed è al suo massimo, quando la declinazione lunare è massima » [3]. Il Darwin, cui dobbiamo questa chiara spiegazione, nota ancora che l'ineguaglianza

(1) Strabone. lib. I, cap. 1°, § 9.

(2) Posidonio, presso Strabone, lib. III, cap. 5°, § 9.

(3) Darwin G. H., *The Tides and kindred phaenom. in the solar system*. Londra, 1901, pagg. 76-77. Per la spiegazione teorica del fatto vedi pagg. 140-41. Lo Schühlein (*Untersuch. über des Posid. Schrift Περὶ 'Ωκεάνου*. Freising, 1901, pagg. 90-91), intende il passo diversamente scrivendo: « Die Ungleichartigkeit der Fluterscheinungen *in den Syzigien* erklärt sich durch den Wechsel der Deklination des Mondes ». Ciò è inesatto.

diurna è quasi nulla nell'Atlantico, laddove è molto grande nell' Oceano Indiano, particolarmente presso Aden; noi abbiamo dunque qui un'altra specie di divergenza fra il comportarsi dei diversi mari.

Questo sappiamo noi delle conoscenze di Seleuco; si può domandare se chi aveva fatto così acute osservazioni come queste relative all'ineguaglianza diurna, potesse non aver notizia p. es. del periodo semimensile della marea, al quale sinora non si è mai accennato; ma questa domanda si collega alla questione dell'originalità delle osservazioni di Posidonio sulle quali ci è stata tramandata maggior copia di particolari.

Per spiegare l'azione della luna sull'Oceano, ch'egli sosteneva contro Cratete, Seleuco tenta una nuova teoria, che rappresenta — sebbene non sia in alcun modo conforme al vero — la più elaborata fra le spiegazioni finora date. Essa prende le mosse principalmente dalle vedute di Aristarco di Samo, il fondatore del sistema geocentrico, il quale ritenendo la luna molto più vicina alla terra di quanto altri stimassero, estendeva l'atmosfera terrestre fino alla luna stessa (1). Seleuco dunque diceva che il moto e la rotazione della terra andavano in direzione contraria al corso della luna; l'aria imprigionata fra i due corpi e sospinta dal loro moto, si abbatteva nell'Atlantico generandovi i fenomeni di flusso e riflusso (2). Tale spiegazione è stata egregiamente illustrata dal Ruge (3) che ricorda a questo proposito, oltre le vedute di Aristarco, la dottrina di Berossos, caldeo come Seleuco, che ascriveva alla luna tre movimenti: « uno in longitudine, in quanto si muove col cosmo, un altro in latitudine, elevandosi in alto e ritornando al basso,... un altro intorno al suo centro » (4). Nè bisogna dimenticare la dottrina di Aristotele e di altri coi quali la spiegazione del matematico caldeo ha pur sempre in comune che la causa immediata della marea è ritrovata ancora nei venti.

Ma le notizie più complete che l'antichità greca ci abbia trasmesso sulle maree si debbono al famoso Posidonio di Apamea fiorito fra il 135 e il 51 av. Chr. il quale le aveva esposte in un'opera di geografia fisica intitolata *Περὶ Ὠκεανοῦ* (5).

(1) Schiaparelli G. V., *I precursori di Copernico nell'antichità*, in Mem. dell'Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XV (Milano, 1873), pag. 416.

(2) Plutarco, *Placit philos.*, III, 15.

(3) Ruge, Mem. cit., pag. 15.

(4) Cfr. Cleomedes, *Κυκλικῆς θεωρίας μεθεωρῶν*. lib. II, cap. 1.

(5) Tra i numerosi scritti su Posidonio il più importante per noi è quello recente di Franz Schühlein, *Untersuchungen über des Posidonius Schrift Περὶ Ὠκεανοῦ* (Geophysischer Teil). Inaugural Dissertation; Freising, 1901; in particolare pagg. 83-99. Egli con molto acume ha tentato di ricostruire l'opera di Posidonio, ma la sua opinione che il *Περὶ Ὠκεανοῦ* fosse una « Revision und kritische Untersuchung der streitiger Probleme der wissenschaftlichen Geographie » (pag. 3-4) non sembra esatta. Senza dubbio Posidonio non parlava nel suo libro soltano dell'Oceano, come credeva l'Heeren, ma è difficile pensare ch'egli trattasse solo dei problemi più controversi. La sua opera doveva essere una Geografia matematica e fisica, ricca di osservazioni proprie. Cfr. Strabone, lib. II, cap. 2, § 1. Sulle vedute di Posidonio riguardo alla marea, cfr. anche Berger, op. cit., pagg. 560-66; Tozer, op. cit., pagg. 192-193 e 197; e su Posidonio in generale cfr. Schmekel, *Die Philos. der mittleren Stoa*; (Lipsia, 1892). I frammenti di Posidonio furono raccolti e illustrati dal Bake (*Posidonii Rhodii reliquiae doctrinae*, collegit atque illustravit Janus Bake. Lugduni Batavorum 1810. Cfr. pagg. 103 e segg.); quelli del *Περὶ Ὠκεανοῦ* si trovano anche nei *Fragm. histor. Graecor* ediz. Didot.

Perduta oggi disgraziatamente quest'opera, le fonti principali per l'argomento che ci riguarda sono un brano di Strabone e un breve scritto molto posteriore del grammatico Prisciano (secolo V-VI) [1]; mentre quest'ultimo, nell'esporre le principali notizie sulla marea, di proposito si attiene a Posidonio [2], Strabone riferisce le vedute di quello solo per incidenza e incompletamente [3].

La trattazione posidoniana, che doveva essere assai diffusa [4] cominciava probabilmente, come ritiene lo Schühlein, con un breve riassunto delle opinioni di scrittori precedenti; riassunto, che, rifacendosi da Omero, cui Posidonio, stoico, attribuiva anche vaste conoscenze di geografia, e citando tra l'altre le vedute di Aristotele, ch'egli, come abbiamo detto, in parte confutava, giungeva fino a Seleuco di cui riferiva l'acuta osservazione sulla ineguaglianza diurna. Ma la parte più importante era costituita dalle notizie raccolte da Posidonio stesso, che, oltre a conoscere gli studî dei suoi precursori, si era recato a Cadice per studiare personalmente il fenomeno e raccogliere dalla bocca degli abitanti le osservazioni da essi fatte in proposito.

A Cadice egli si era in primo luogo persuaso che il flusso e riflusso si verificava nell'Oceano in molto maggiori proporzioni che nel Mediterraneo, dove era semplice ripercussione, e che era influenzato dalla luna [5]. Per la prima volta, a quel che si sappia, Posidonio distingue un periodo semidiurno, uno semimensile ed uno annuo della marea. Riguardo al primo egli ripete con maggiore esattezza ciò che già

[1] Strabone, lib. III, cap. 5, § 7-9; Prisciano, *Solutiones ad Chosrŏem*; (Prisciani, *Quae Extant*. Berlino, Reimer, 1886; edidit J. Bywater). La VI Quaestio di questo interessante scritto originariamente greco ma di cui è nota solo la traduzione latina, è dedicata al flusso e riflusso e alla salsedine del mare. Per quest'ultima parte l'autore attinge alla Meteorologia di Aristotele; per la prima fonte è Posidonio, ma certo non direttamente. Prisciano cita infatti, in una specie di proemio, gli autori di cui si è servito, ma fra essi si trova solo di Posidonio l'opera *Μετεώρων ex comento Gemini*; è poi evidente, come nota anche il Bywater, che Prisciano non ebbe di fatto dinanzi a sè neppur la metà degli autori che cita. Certo è che Prisciano conosce ciò che Strabone aveva riferito di Posidonio (*Strabon ab ipso Posidonio accipiens*... dice in un luogo di questa Quaestio), ma pur riferisce come di Posidonio, molte cose che Strabone non dice. È probabile perciò che Prisciano, oltre all'aver forse innanzi a sè Strabone (che il Bywater non pone però tra le sue fonti dirette) si servisse di un altro autore a noi ignoto, che riferiva le vedute posidoniane su per giù come Strabone, ma forse più accuratamente. Questo scritto di Prisciano è, non so come ignoto, allo Schühlein; lo cita invece il Tozer a pag. 197. Noi ne parleremo ancora nel Cap. V.

[2] « Qui autem videntur ex omnibus collegisse tales passiones maris Stoicus est Posidonius Assyrius et ei consentientes... Dicunt enim etc... Declarat quoque etc. ».

[3] Strabone parla veramente di una fonte che è nel tempio di Ercole a Gades della quale i Gaditani dicevano, come narra Polibio, che si comportava proprio al contrario del flusso e riflusso del mare, perchè il livello delle acque in essa era basso durante il flusso, alto durante il riflusso. Posidonio non crede a ciò e narra la cosa diversamente: Strabone lo rimprovera perchè mentre aveva prestato fede ai Gaditani per molte notizie sulla marea, non crede loro per il fatto della fonte. E solo a questo scopo di accusare Posidonio di incoerenza, Strabone ne riferisce quelle notizie sulla marea che quegli aveva appreso dai Gaditani. Il suo racconto è quindi necessariamente incompleto.

[4] Cfr. Strabone, lib. I, cap. 1, § 9; lib. I, cap. 3, § 12.

[5] « Dicunt enim moveri exteriorem Oceanum ad lunae ambitum (*συμπαθῶς τῇ σελήνῃ*; Strabone) compati vero interius mare, juxta columnas <enim> Herculis solummodo coniunctum quasi portus pelago, compassione afficitur et alios motus speciales habet ». Prisciano, loc. cit.

conosceva Eratostene. Allorchè la luna si è alzata sull'orizzonte per lo spazio di un segno zodiacale — cioè a dire di 30° — comincia a gonfiarsi il mare, e il flusso cresce fino alla culminazione superiore della luna; al declinare di questa comincia il riflusso che dura finchè la luna dista 30° dal luogo del tramonto; indi si ha un intervallo di quiete finchè la luna ha percorso lo spazio di 60° e si trova quindi 30° sotto l'orizzonte; allora comincia il secondo flusso, fino alla culminazione inferiore della luna, poi il secondo riflusso finchè la luna è tornata 30° al disotto del luogo ove sorge, e finalmente un nuovo periodo di quiete per lo spazio di 60°.

Nuove appariscono le osservazioni riguardo al periodo quindicinale. Posidonio asserisce, in modo perfettamente conforme al vero, che il flusso, massimo al novilunio, decresce fino al primo quarto, cresce nuovamente fino al plenilunio per decrescere di nuovo fra questo e l'ultimo quarto. Il perchè di questo fatto, che Posidonio deve aver certamente dato, non è minimamente accennato da Strabone, ma Prisciano afferma chiaramente che la maggior virtù della luna nelle sizigie proviene dal sole (1), come del resto conoscevano scrittori posteriori, per esempio Plinio.

Sul flusso annuo, Strabone riferisce che Posidonio possedeva solo notizie raccolte dalla bocca dei Gaditani secondo i quali le massime maree avverrebbero intorno al solstizio estivo; soggiunge « che [Posidonio] congettura da ciò che esse da questo solstizio fino all'equinozio (d'autunno) diminuiscano, di nuovo crescano fino al solstizio invernale, di qua diminuiscano fino all'equinozio primaverile e di nuovo aumentino fino al solstizio d'estate » (2). Più tardi riferisce che, trovandosi Posidonio nel plenilunio del solstizio d'estate nel tempio di Ercole a Gades, non gli venne fatto di osservare alcun incremento straordinario, ma circa al novilunio del mese stesso di giugno, a Ilipa sul Betis osservò un crescère e rifluire improvviso delle acque, effetto certo del flusso (3). Ora è noto che il periodo annuo della marea si comporta proprio al contrario di quanto congetturava Posidonio, secondo Strabone. Ma lo Schühlein (4), con acuta indagine, si è sforzato di provare che il geografo di Apamea avea idea giusta del periodo annuo e che, riferite le voci del Gaditani egli le confutava in base alle osservazioni personali e poi dava le notizie in modo conforme al vero, quali si leggono in Seneca e Plinio; Strabone, riferendo in succinto le idee di Posidonio, avrebbe abbreviato e frainteso alcune parti. Per quanto la ricostruzione dello Schühlein possa non sembrare del tutto soddisfacente, è certo che il passo di Strabone appare incompleto; Prisciano poi parla del periodo annuo in modo conforme al vero (5) e non vi è alcuna ragione per ritenere ch' egli non abbia attinto questa, come tutte le altre sue notizie, a Posidonio. Il geografo di Apamea doveva quindi conoscere la verità anche riguardo al periodo annuo.

(1) « Unde in plenilunio et coitu extollitur maxime unda, quoniam et lunae tunc magna adest virtus: in plenilunio enim totum eius in terram conversum a sole illustratur, in coitu autem illuminata desuper a sole aequalem in ea quae sunt in terra virtutem plenitudini praestat ».

(2) Strabone, lib. III, cap. V, § 8.

(3) Strabone, III, V, § 9.

(4) Mem. citata, pagg. 87-90.

(5) « Habet quoque ratio et in unoquoque anno significare sic: circa utrasque quidem conversiones (solstizi) minus aqua et tardiori fluxu intrat; circa vero aequinoctia tale quid pati, sicut et circa plenilunia et coitus videtur factum ».

Le osservazioni di Posidonio non si limitavano peraltro ai tre periodi della marea. Riconosciuto che le maree del Mediterraneo erano un semplice riflesso di quelle oceaniche, egli spiegava i fenomeni dello stretto di Sicilia nell'identica maniera di Eratostene (1). Parlava altresì degli effetti che il flusso produce alle foci dei fiumi, respingendo talora indietro le acque per molte miglia, e riferiva a questo proposito notizie sui fiumi della Gallia e della Britannia, attinte forse ancora al racconto di Pitea (2).

Questo possiamo noi ricostruire con sicurezza delle osservazioni fatte o raccolte dal grande geografo (3). Esse ci mostrano con quanta diligenza Posidonio si fosse occupato dell' interessante fenomeno, e noi dobbiamo riconoscere che le notizie da lui date sono nel loro complesso meravigliosamente conformi alla verità.

Ma, messa definitivamente in chiaro l'influenza lunare, Posidonio si era occupato certamente anche della natura di essa. A questo riguardo Strabone non ci dice assolutamente nulla, ma Prisciano ci ha conservato per intero l'opinione del grande geografo. « Horum igitur causam requirens Stoicus Posidonius, ut et per se ipsum explorator factus huiusmodi reciprocationis, discernit magis causam esse eius lunam et non solem » (4). Il calore del sole infatti è così forte che *consuma* i liquidi e i vapori, mentre la luna possiede bensì del calore, ma più debole e per così dire impuro, atto, non a consumare le cose che riscalda, ma piuttosto a farle gonfiare, senza diminuirle, e anche a farle imputridire.

Questa opinione, che ritroveremo frequentissima più tardi, è assai diffusa fra gli Stoici e ha le sue basi in credenze antichissime. Si attribuiva alla luna un potere di riscaldare e inumidire insieme; la natura umida della luna era dovuta al fatto che essa riceveva le esalazioni umide della terra e delle acque dolci (5). Era da ciò nata l'idea che essa avesse la virtù di putrefare i corpi (6) e che inoltre agisse par-

(1) Il passo in cui Prisciano riferisce le notizie a questo riguardo combina esattamente con ciò che dice Strabone, lib. I, cap. 3, § 11.

(2) Prisciano: « In tantum vero aqua egreditur, ut etiam magna flumina in aliam partem convertat. Et hoc aiunt Rhenum a Celtis currentem fluvium et alios iterum in Hiberia et Britaniis sustinere etc. ».

(3) Lo Schühlein, nell'idea preconcetta che tutto quanto dice Plinio (*Hist. Natur.*, II, § 212-17) sia attinto a Posidonio, attribuisce necessariamente a questo anche parecchie altre osservazioni. Come diremo più tardi è probabilissimo che Plinio abbia avuto qui per fonte Posidonio, ma non c'è bisogno di credere che fosse la fonte unica. Nè bisogna dimenticare che Plinio era stato anche egli a Cadice e da quel gran studioso che era, poteva benissimo anche essersi occupato personalmente della marea; in ogni caso noi preferiamo attenerci alle sole notizie che si possono attribuire sicuramente a Posidonio, senza fare troppe altre ipotesi, difetto di cui pecca alquanto lo Schühlein.

(4) Sembrerebbe da questa frase che Posidonio combattesse particolarmente coloro che, come Dicearco, cercavano la causa della marea nel sole, ma di ciò nulla più sappiamo.

(5) Diogene Laerzio, VII, 145. Cfr. Schmekel, op. cit., pag. 242. La credenza che gli astri ricevano le esalazioni terrestri è antichissima, e risale a Eraclito. Cfr. Diels, *Die Fragm. der Vorsokr.*, pag. 63, framm. 12. Del potere della luna di inumidire riscaldando parla a lungo Plutarco, *Quaest. Conviv.*, lib. III, qu. 10 e *De facie in orbe lunae*, XXV, 19, 20 ove sono raccolte tutte le idee intorno a questo fatto.

(6) Donde le nutrici si guardavano bene dall'esporre i bambini alla luna che ne corromperebbe gli umori. Plut. *Quaest. Conviv.* loc. cit. Queste idee sono ben lungi dall'essere scomparse nel popolo.

ticolarmente su tutti i corpi ricchi di umidità; ricci, ostriche, midolli di piante e di animali, cervelli etc. risentivano tale influenza, crescendo al crescere della luna, decrescendo al suo decrescere (1). Dello stesso genere era anche l'azione della luna sul mare: l'astro delle notti, la « mater humiditatum » come fu detto nel Medio Evo, faceva gonfiare il mare secondo le sue diverse posizioni e fasi, laddove il sole lo consumava. A dichiarar ciò Posidonio già si serviva di un paragone che più tardi sarà ripetuto da molti. L'acqua di una pentola, diceva, se scaldata moderatamente, si gonfia e ribolle, mentre, posta su un fuoco ardente e continuo, si consuma: ora il mare scaldato dal sole può paragonarsi all'acqua della pentola scaldata con troppo fuoco, mentre l'azione della luna sul mare è analoga a quella di un fuoco moderato su quell'acqua. Il sole interveniva, nel flusso e riflusso, solo per accrescere la virtù della luna producendo i fenomeni delle sizigie e degli equinozî.

Così concepiva adunque Posidonio la natura dell'influenza della luna, che nel suo moto diurno si traeva dietro l'acqua del mare sollevata verso di lei in figura di semicircolo, come conveniva alla natura circolare dell'acqua (2). A questa opinione si opporrebbe peraltro un breve accenno di Giovanni Damasceno, in cui è detto che Posidonio avrebbe pensato invece che la luna suscitasse dei venti che mettevano in moto l'Oceano (3): saremmo ancora alla ipotesi aristotelica modificata solamente nel senso di sostituire al sole la luna, risultandone una spiegazione anche piu strana. Ma, davanti alla estesa esposizione di Prisciano, ci sembra che quest'altro breve accenno debba cadere, tanto più che la spiegazione da quegli attribuita a Posidonio si trova molto bene a posto in mezzo a un complesso di credenze e di dottrine proprie degli Stoici. Il grande geografo non ha saputo dunque staccarsi qui dalle idee della sua scuola e la sua spiegazione ci farebbe sorridere, se fosse lecito sorridere degli errori degli antichi; ma è d'uopo riconoscere che a lui si debbono le osservazioni positive sulla marea le più copiose che l'antichità abbia posseduto e in grandissima parte conformi alla verità (4).

Prima di chiuder questo capitolo dobbiamo ricordare anche un'altra spiegazione della marea, tutta propria degli Stoici e propagata da loro: quella che paragonava il flusso e riflusso al respiro di un animale. Dal tempo in cui Platone aveva assomigliato l'universo ad un gigantesco essere vivente, i suoi seguaci, specialmente i filosofi del Medio Stoa, avevano abbracciato questo concetto applicandolo alla terra in particolare (5), e

(1) Cfr. Cicerone, *De Divinat*, II, 14; Plinio, *Hist. Nat.* II, 101; Eliano, *De Natura Animal.* II, 56; XII, 13 e altri molti. Ancor oggi è diffusa fra i popolani della Liguria la credenza che tutto ciò che vive nell'acqua cresca e decresca con la luna. Nel Medio Evo poi tale credenza, comunissima, è applicata anche ad un numero maggiore di oggetti animati e inanimati.

(2) « Et causam esse ait confluxum fieri etiam circularem aquae naturam; itaque unda quasi in figuram semicycli elata seqnitur lunam ». Prisciano, loc. cit.

(3) *Excerpta ex Ms. Flor. Joh. Damasc.* loc. cit. *Ποσειδώνιος ὑπὸ μὲν τῆς σελήνης κινεῖσθαι τοὺς ἀνέμους ὑπὸ δὲ τούτων τὰ πελάγη, ἐν οἷς τὰ προειρημένα γίγνεσθαι πάθη.*

(4) L'anonimo autore del *Περὶ κόσμου* che attinge a Posidonio parla solo genericamente di accordo fra certi movimenti del mare e la luna. *Περὶ κόσμου*, cap. 4.

(5) Cfr. Günther S., *Der Erdkörper als Organismus* in « Naturwissensch. Wochenschrift », 18 maggio 1902 e R. Almagià, *Il globo terrestre come organismo* in « Rivista Geogr. Italiana », 1902, fasc. X.

avevano creduto di trovare molte analogie tra i fenomeni tellurici e molte proprietà degli animali (1); una particolare di queste analogie è il fenomeno della marea concepito e spiegato come il respiro dell'animale Terra. Anche a Posidonio non era estraneo il concetto dell'Universo come essere vivente (2), anzi anch'egli, secondo un frammento di lui scoperto dallo Zimmermann in Strabone (3), avrebbe una volta paragonato il flusso e riflusso a qualche cosa di simile al respiro di un animale, senza peraltro dare al paragone il valore di una spiegazione. Ma di uno dei suoi scolari, Atenodoro di Tarso (circa 80 a. Cr., 2 d. Cr.), che si era occupato lungamente del fenomeno della marea (4), Strabone, suo contemporaneo, ci trasmette questa sola spiegazione (5), per la quale forse, come traspare da questi passi, propendeva anche lui. Ma gli accenni che se ne hanno sono troppo fuggevoli e non ci permettono di comprendere come essa fosse presentata in maniera scientifica, e noi non crediamo per parte nostra che Atenodoro si limitasse a dare questa sola spiegazione della marea (6). Il paragone del flusso e riflusso al respiro animale può esser usato ad indicare soltanto la regolarità del fenomeno, e non sembra del resto che esso escludesse la possibilità di una influenza lunare, perchè più tardi troviamo riunite le due spiegazioni, e del resto, come abbiamo già detto, la dottrina dell'azione della luna sui corpi umidi era tra le più diffuse fra gli Stoici. Tuttavia questo concetto che fa della marea il respiro della terra merita di essere segnalato per due ragioni: in primo luogo perchè è una applicazione, che potremmo dir geniale, della idea più generale, secondo cui il nostro globo era pensato come un organismo; in secondo luogo perchè, perpetuatosi nel Medio Evo, attraverso il quale se ne può seguire agevolmente il filo, questo concetto assurge davvero e chiaramente a spiegazione della marea, la quale viene in tal modo concepita come un fenomeno naturalmente insito nel mare, non provocato da alcuna forza esterna, appunto come il respiro di un animale. Ma questa idea, per quanto ci è dato di capire, sembra essere assolutamente estranea agli Stoici, e in genere ai pensatori del periodo aureo della scienza classica.

III.

La dottrina della marea presso i Romani.

Come già accennammo nel principio di questo studio, la dottrina della marea nel mondo scientifico romano fece scarsi progressi: i Romani furono, anche in questo campo, discepoli dei Greci. Senza dubbio, quando le navi romane solcarono i mari

(1) Cfr. Seneca, *Quaest. Naturales*, lib. III, cap. 15; Sextus Empiricus, *Adversus physicos*, 79, e altri.

(2) Diogene Laerzio, VII, 142.

(3) Strabone, I, 3, § 8-9; Zimmermann, *Posidonius und Strabo* Hermes 1888, pagg. 103-30.

(4) Strabone I, 1, § 9 e I, 3, § 12.

(5) Strabone, III, 5, § 7. Ma si avverta che anche qui l'idea è espressa come semplice paragone.

(6) Non ci sembra perciò prudente affermare, con lo Schühlein, che Atenodoro respingesse l'idea di una influenza lunare sul mare.

conosciuti, i naviganti ebbero occasione di acquistar diretta conoscenza della marea, non solo in quei luoghi ove i Greci l'avevano osservata, ma anche in altri, poco familiari a questi ultimi, dove i Romani si spinsero per ragioni militari o di commercio. Così, pel Mediterraneo, si hanno menzioni della marea nel golfo di Napoli ([1]), ove è pure di piccola entità, e presso Ippona in Numidia ([2]); per l'Oceano sono sovrattutto importanti le notizie delle alte maree sulle coste della Manica e del mare del Nord, osservate la prima volta da Cesare ([3]), e la cui conoscenza più tardi divenne diffusa ([4]). Alle prime confuse nozioni del fenomeno i Romani dovettero vedere nella marea una specie di ribollimento del mare, chè tale è il significato originario della parola *aestus*, e forse anch'essi lo confusero con altri fenomeni; poi parlarono di flusso e riflusso (*accessus et recessus*), riferendosi naturalmente a ciò che si osservava dalla riva ([5]).

Ma le notizie scientifiche del fenomeno, furono dagli scrittori Romani che se ne occuparono attinte in massima parte dai Greci, e in particolare da Posidonio i cui libri godettero a Roma grande favore.

Varrone (116-27) cui spetta un posto nella storia della scienza anche come geografo, sembra esser stato uno dei primi che studiasse in Roma la marea. Egli, oltre al conoscere di propria esperienza che il fenomeno si verifica anche a Baia presso Napoli, dove le acque del flusso erano utilizzate a rinfrescare le piscine ([6]), in un passo, oscuro e corrotto in verità, del *De lingua latina* ([7]) mostra di non ignorare il ciclo

([1]) Varrone, *De re rustica*, III, 17; Valerio Massimo, *Memor.* IX, 1.

([2]) Plinio il Giov., *Epist.*, lib. IX, 33, § 2.

([3]) Caes., *Bell. Gall.*, III, 12; IV, 19; Dione Cassio, XXXIX, 40.

([4]) Dione Cassio, LX, 30; Tacito, *Agricola*, Cap. 10; Valerio Massimo, III, 2, § 23, ecc.

([5]) Già Pico della Mirandola (*Advers. Astrol.*, lib. III, cap. 15) osservava che le parole *accessus et recessus* non esprimono aumento o diminuzione delle acque, ma solo l'estendersi del mare sulle rive nel salire, e il ritirarsi nel discendere; a questo riguardo le due parole latine sono più esatte delle greche *πλημμυρίς* o *ἀνάπωσις*. Alla parola generica *aestus* (marea) e alle due *accessus, recessus*, converrebbe aggiungere altri due vocaboli con cui, secondo il Forcellini e altri, i Romani indicavano pure le maree, ossia: *Venilia* (flusso) e *Salacia* (riflusso), ma a proposito di queste parole sussiste una questione. *Venilia* e *Salacia* sono due dee marine, anzi mogli di Nettuno, come si rileva da Varrone (*De lingua lat.*, lib. V, 10). Lo Scaligero, nelle sue note a Varrone, dice che i Romani personificarono in queste due dee il flusso e riflusso, onde poi i nomi delle dee furono usati a indicare le due fasi del fenomeno; ciò egli rileva da un passo di Varrone presso S. Agostino (*De Civit. Dei*, VII, 22), ove è detto « Venilia, unda quae ad litus venit, salacia quae ad salum redit », ma qui non è affatto necessario intendere che si parli proprio del flusso e riflusso anzichè della comune ondazione. Anche l'etimologia di Salacia « a salo ciere » data da Festo (*Apud Paulum*, § 327; Varrone dice solo: *a salo*) non rischiara affatto la questione. In ogni caso sono delle parole pochissimo usate e non tecniche. Secondo lo stesso Scaligero, ai nomi Venilia e Salacia, i Romani sostituirono, ad indicare il flusso e riflusso, le voci germaniche Malina e Liduna, da quando con Druso penetrarono in Germania. Ma questi nomi sono ignoti agli scrittori romani e mancano nei Dizionari, mentre sono di uso comune nel Medio Evo come più tardi diremo. Cfr. del resto su di ciò Du Cange, *Glossarium Mediae et Infimae latinitatis*, alle voci corrispondenti.

([6]) Varrone, *De re Rustica*, loc. cit.

([7]) « At in mari credo, motus non habent similitudines geminas, qui in XXIIII horis lunaribus cotidie quater se mutant, ac cum sex horis aestus creverunt, tot item decreverunt, rursus idem, itemque ab his! An hanc analogian ad diem servant, ad mensem non item ali*am*, motus sic item

semidiurno della marea in accordo con la luna, accenna anche al ciclo mensile, e, quel che è più importante, afferma di essersi occupato dell'argomento in un libro *De Aestuariis* ([1]). Questo libro, oggi perduto disgraziatamente, era, secondo ogni probabilità, una parte del *De Ora Maritima* citato anche da Vegezio col titolo di *Libri navales*, opera di carattere nautico, che trattava delle coste e dei fenomeni che in esse si producono, dava nozioni utili ai naviganti sui pronostici del tempo, ecc.; esso è fonte, probabilmente indiretta, di Vegezio (capp. 38-43), di Suetonio, di Solino; ha servito forse direttamente a Plinio, come avremo occasione di accennare in seguito ([2]). Una trattazione sulla marea era ben a posto anche in un libro fatto ad uso dei naviganti, e Varrone attingeva probabilmente le sue notizie al *Περὶ Ὠκεανοῦ* di Posidonio.

Lucrezio (circa 95-55) accenna ad un « *certus aestus* » del mare del Ponto ([3]); Cicerone, seguendo anche egli le dottrine di Posidonio dice che il flusso e rifiusso del mare sono governati dal moto della luna, al pari delle perturbazioni delle acque nell'Euripo di Calcide, e negli stretti di Sicilia e di Cadice ([4]). Ma queste vedute eran ben lungi dall'esser diffuse a Roma, e anche la conoscenza sola del fenomeno non doveva esser universale neppur ai tempi di Cicerone. Già nel 253 in un accidente simile a quello che era accaduto ai soldati di Alessandro alla foce dell'Indo, era incorsa anche una flotta romana rimasta alcune ore all'asciutto presso l'isola Gerba ([5]); ma molto più tardi ancora ai soldati di Cesare era accaduta la stessa cosa, per inesperienza, nella Manica ([6]), e Cesare medesimo dichiara che il fenomeno era sconosciuto anche a lui ([7]) che lo apprese per la prima volta sui mari della Gallia: quivi egli potè riconoscere agevolmente che il flusso e riflusso si alternavano due volte ogni ventiquattro ore e i massimi flussi avvenivano colla luna piena ([8]). E in Roma vi dovevan essere anche di quelli che, conoscendo il fenomeno, erano inclinati ad attribuirgli un'origine divina; significante è a questo proposito un passo di Cicerone in cui egli rimprovera la tendenza invalsa al tempo suo di attribuire i fenomeni che, come la marea, presentano

---

cum habeant alios inter se convenientes? de quibus in libro quem de aestuariis feci, scripsi » *De lingua lat.*, lib. IX, 19. Cito dall'edizione Spengel (Berlino, Weidmann, 1885); altri leggono un po' diversamente.

([1]) *Aestuarium* è pei Romani un luogo ove sono particolarmente forti le maree, come ad es. le Sirti. Cfr. Plinio, II, 218; Valerio Massimo, IX, 1, 1; Sueton. presso Isidor., *Etymol.*, lib. XIII, cap. 18. È voce usata particolarmente al plurale e forse in origine, con valore di aggettivo. Cfr. Bertolini G. L., *La filosofia della parola estuario*. Archivio Veneto, 1901, pagg. 170-73.

([2]) Cfr. Retzenstein, *Die Geographischen Bücher Varros.* Hermes, 1885, pagg. 514-51, in particolare pagg. 526-28. Schanz M., *Gesch. der römischen Litter.*; München 1890-904. 4 Voll. (nel l'*Handb. der klass. Altertumwissensch.* di J. Müller; VIII). Vol. I, pagg. 284-85.

([3]) *De Rerum Natura,* V, 507-9.

([4]) Cicerone, *De Divinitate,* II, 14; *De Natura deorum,* II, 7.

([5]) Polibio, I. 39. Cfr. Partsch, *Die Veränderungen des Küstensaumes des Regentschaft Tunis.* Petermanns Mittheil., 1883, pag. 21.

([6]) Ancora assai tempo dopo Vitellio è sorpreso col suo esercito dal flusso non lungi dalle foci del Weser come narra a vivi colori Tacito, *Annales,* I, 70.

([7]) Caes., *De bello gallico,* IV, 19.

([8]) Caes., loc. cit. e III, 12.

un certo ritmo (*cursus certos et constantes*) a potenze sovrumane, anzichè cercarne una spiegazione naturale (¹); conforme a tale tendenza assai più tardi Diogene Laerzio porrà il flusso e riflusso fra le cose maravigliose e inspiegate (²).

Ma presso gli scienziati e naturalisti romani del I secolo dell'Era volgare, troviamo frequenti menzioni del fenomeno della marea, sebbene poco di nuovo essi arrechino alla conoscenza di esso. Manilio, nei pochi versi in cui parla del flusso nel suo *Astronomicon* (³) scritto fra il 9 e il 12 dell'Era volgare, accenna probabilmente, seguendo le osservazioni di Posidonio, al triplice periodo della marea: il semidiurno (*nunc sidere lunae mota tenet*), il mensile (*nunc diverso stimulata recessu*), l'annuo (*nunc anni spatio Phoebum comitata volantem*), mostrando così di dar peso anche all'influenza del sole (⁴).

Seneca (10 a. Cr.-65 d. Cr.), tardo rappresentante della scuola stoica in Roma, accenna parecchie volte nelle sue opere al flusso e riflusso (⁵), seguendo le dottrine della sètta cui apparteneva, e nelle questioni di fisica terrestre, specialmente quelle di Posidonio. L'idea stoica che tende a fare della marea un fenomeno spontaneo della terra, concepita come essere vivente, si trova accennata anche in Seneca che, dopo aver esposto lungamente le somiglianze fra il corpo terrestre e quello degli animali, aggiunge: « Quemadmodum quartana ad horam venit, quemadmodum ad tempus podagra respondet...... sic aquae intervalla habent quibus se retrahant et quibus redeant » (⁶). Da un altro brano delle *Ricerche Naturali* (⁷) sembrerebbe che anch'egli avesse una tendenza ad attribuire al fenomeno un carattere soprannaturale, come si rileva dalle frase « *aestus fati ministerium est* » e dalle ultime parole in cui è detto che Dio si serve di esso per distruggere le cose antiche e instaurarne delle nuove migliori. Ma, malgrado la sua strana impronta mistica, questo stesso brano contiene una notizia importante: che cioè il flusso dell'equinozio « sub ipsum lunae solisque coitum omnibus aliis maior undare (solet) ». Questo implica una conoscenza esatta delle dottrine posidoniane, che si rileva del resto parzialmente anche da un altro brano ove Seneca afferma chiaramente che le onde del mare « ad horam ac diem subeunt ampliores minoresque prout illas lunare sidus elicuit ad cuius arbitrium Oceanus exundat » (⁸).

L'espressione *lunare sidus*, anzichè semplicemente *luna*, che si riscontra anche in Manilio (*sidere lunae Mota tenet*), potrebbe farci credere che questi due autori

(¹) « Quid? Aestus maritimi vel hispanienses vel britannici eorumque certis temporibus accessus ac recessus sine deo fieri non possunt? » etc. *De Natura Deorum*, III, 9-10.

(²) Diogene Laerzio, VII, 123.

(³) « Atque haec seditio pelagus nunc sidere lunae — Mota tenet, nunc diverso stimulata recessu — Nunc anni spatio Phoebum comitata volantem ». *Astronomicon*, II, versi 92-95.

(⁴) Cfr. F. Boll, *Studien über Claudios Ptolemäus*, in Jahrbücher für classische Philologie. Suppl. XXI, Lipsia, 1894, pagg. 224-25.

(⁵) Seneca, *De beneficiis*, lib. I, cap. 10; *Natur Quaest.*, lib. III, capp. 28 e 30; *De Providentia*, lib. I, 4.

(⁶) *Natur Quaest.*, lib. III, capp. 15-16.

(⁷) *Natur Quaest.*, III, 28.

(⁸) *De Providentia*, loc. cit. Notevole è in questo passo l'espressività del verbo *elicere* che risveglia l'idea di una vera *attrazione* della luna.

seguissero un concetto che attribuiva in particolare alla *luce* lunare la forza attrattiva sulle acque marine, nè ciò potrebbe arrecar maraviglia, perchè nella terra è in realtà la luce l'unica forma di energia proveniente dalla luna cui si possa attribuire qualche effetto, poichè il calore non è in nessun modo sensibile. Noi non vogliamo peraltro attribuire a Seneca questa idea in base ad un solo magro accenno; ma è notevole che anche Tolomeo, il quale accetta, anzi, direi quasi, consacra le vedute stoiche sulle influenze particolari della luna, parla, riguardo alla marea, di un'azione della luce lunare (1).

Il secolo I ci ha conservato due opere in cui la geografia è ampiamente trattata: la prima di esse, in ordine cronologico, la « Chorografia » di Pomponio Mela, scritta fra il 42 e il 45 dell'Era volgare e detta anche « De situ orbis », è un vero trattato di geografia, ma in prevalenza descrittivo. Nel luogo di questo libro dove descrive il fenomeno della marea (2), Pomponio sembra essere indipendente da Posidonio; egli infatti nulla afferma di preciso riguardo al modo con cui esso si manifesta giornalmente e mensilmente; e, riguardo alla sua causa, espone indifferentemente tre spiegazioni: afferma cioè non esser ben noto ancora se la terra produca il flusso e riflusso coi moti della sua respirazione — « *ut doctioribus placet* » — o se esistano cavità ove le acque si ritirano e onde poi escono a vicenda, ovvero se finalmente la luna sia causa di tali movimenti. Per noi questo passo è importante perchè ci mostra che, anche dopo le ricerche di Posidonio, le controversie sulla natura di questo fenomeno erano tutt'altro che cessate, e su di esso ancora non si vedeva chiaro, il che vedremo anche confermato tra breve (3). Per quale delle tre spiegazioni maggiormente inclinasse Mela, non appare; se non che dopo aver menzionata per ultima la dottrina dell'influenza lunare, aggiunge: « Certo (le maree) variano secondo il suo sorgere e tramontare ».

Altre notizie del fenomeno non ci accade di trovare nel corso dell'opera, eccetto la menzione delle maree nelle Sirti (4), sulle coste della Sarmazia, ove hanno una particolare veemenza (5), e nell'Euripo « rapidum mare et alterno cursu septies die ac septies nocte fluctibus invicem versis adeo immodice fluens ut ventos etiam plenis velis navigia frustrentur » (6).

Di molto maggiore importanza sono le osservazioni riferiteci da Plinio, nella cui *Storia naturale* il libro II è per intero consacrato alla Geografia matematica e fisica: il cap. 97° riguarda il flusso e riflusso. In parte le notizie di Plinio sono certamente attinte a Posidonio, non sappiamo se direttamente, o indirettamente; in quest'ultimo caso la fonte intermedia può benissimo essere stata l'opera di Varrone *De ora ma-*

(1) Tolomeo, *Τετράβιβλος Σύνταξις*, lib. I, 1.

(2) Pomp. Mela, *De situ orbis*, lib. III, cap. 1. Su quest'opera e la sua data, cfr. Bunbury, op. cit., II, pagg. 352-70. Schanz, op. cit. II, pagg. 384-86.

(3) Sulle controversie riguardo all'Oceano, vedi un passo notevole di Seneca il Retore, *Suasoriarum*, I, 4 (*Oratorum et Rhetorum Sententiae, divisiones, colores*, edid. A. Kiessling. Lipsia, Teubner. 1872, pagg. 3-4).

(4) Cfr. Mela, op. cit., lib, I, cap. 7, § 35.

(5) Id. id., lib. III, cap. 7, § 55.

(6) Pomp. Mela, lib. II, cap. 7, § 108.

ritima, come crede lo Schühlein [1]; ma il naturalista romano non ha sempre riferito con tutta l'esattezza le osservazioni posidoniane, come riguardo al periodo semidiurno. Inoltre la trattazione di Plinio contiene parecchie altre cose delle quali, secondo le due fonti che ci restano, Posidonio non avrebbe parlato, e queste possono derivare, e in parte certamente derivano, da altre fonti, o possono anche esser portato di osservazioni personali. Nell'indice pliniano, tra le fonti pel secondo libro appaiono, accanto a Varrone e Posidonio, anche Eratostene, Ipparco, Pitea, Timeo e altri molti.

Accertato che la causa generale della marea risiede *in sole lunaque* [2], Plinio espone brevemente il periodo semidiurno, tacendo peraltro degli intervalli di quiete che intercedono fra flussi e riflussi, secondo le affermazioni di Posidonio. Aggiunge poi che da giorno a giorno variano in maniera sensibile le ore di inizio di ogni fase del fenomeno, in conseguenza del fatto che la luna non sorge sempre nello stesso luogo e nella stessa ora; ma la durata di ogni fase è sempre secondo lui di sei ore equinoziali. È una osservazione nuova per noi e di molto valore, che Plinio stesso poteva benissimo aver fatta durante la sua dimora sulle coste meridionali della Spagna.

Segue l'esposizione del periodo semimensile, chiara ed esatta, indi il seguente periodo: « Eadem (luna) aquilonia et a terris longius recedente mitiores quam cum in austros digressa propiore nisu vim suam exercet. per octonos quoque annos ad principia motus et paria incrementa centesimo lunae revocantur ambitu augente ea cuncta, solis annuis causis duobus aequinoctiis maximo tumentes, et autumnali amplius quam verno, inanes vero bruma et magis solstitio » [3]. Qui si contengono tre diverse osservazioni: la prima di esse, secondo la quale la vicinanza della luna alla terra, quando è sull'equatore, accresce l'altezza dei flussi, perchè la luna esercita allora più da vicino la sua potenza, ci richiama alle dottrine di Seleuco, che si era occupato dell'influenza esercitata dalle variazioni di declinazione della luna; ma se questa notizia sia da ricondursi esattamente a lui, non è possibile affermar con certezza [4]. Un'altra osservazione — la terza — riguarda il periodo annuo della marea, secondo cui i flussi degli equinozî sono maggiori di quelli dei solstizî, colla distinzione che nell'equinozio di autunno sono più violenti che nel primaverile, e nel sostizio di estate più deboli che nell'invernale; questa distinzione può porsi in relazione con la prima osservazione. Finalmente Plinio aggiunge ancora un altro periodo più esteso, accennando ad un ritorno di più violenti flussi ogni cento mesi lunari, con che vuol certamente dire che le posizioni del sole e della luna rispetto agli equinozî e ai solstizî si ripetono identiche alla centesima lunazione, ossia dopo novantanove lunazioni. È il periodo notissimo dell'ottaeteride, base per lungo tempo del computo lunisolare dei tempi presso i Greci.

(1) « Dass Plinius in der Erklärung des Phänomens im ganze dem Posidonius folgt, den er auch im Autorenverzeichniss zum zweiten Buche anführt, *unterliegt keinem Zweifel*. Die Vermittelnde Quelle war wohl Varro's Schrift *de aestuariis* ». Così scrive lo Schühlein, pag. 83, ma queste affermazioni presentate così senza nessun argomento che le appoggi, ci persuadono poco.

(2) Ma della diversa *misura* in cui i due astri agiscono, Plinio non sembra avere una idea esatta.

(3) Plinio, *Hist. Natur.*, lib. II, cap. 97, § 215. Cito, in attesa di un'edizione migliore, da quella notissima del Detlefssen. Berlino, Weidmann, 1866.

(4) Cfr. Berger, op. cit., pag. 562.

Non meno importante è infine un'ultima osservazione di Plinio che riguarda il ritardo con cui si manifesta l'azione della luna: i massimi flussi mensili non si verificano infatti esattamente all'epoca delle sizigie, ma qualche giorno dopo; e tal ritardo può osservarsi, sebbene in minor misura, anche nel periodo diurno, cominciando talora il primo flusso diurno solo due ore dopo il sorger della luna, e lo stesso per le altre fasi. Causa di ciò è — come dice Plinio — che in terra gli effetti delle influenze celesti si osservano da noi con qualche ritardo.

Tali le osservazioni d'indole più schiettamente teorica esposte dal naturalista romano. Qualunque siano le sue fonti, esse ci dimostrano chiaramente che Plinio aveva una lucida visione del fatto che la marea dipendeva unicamente dall'influenza e dalle posizioni del sole e della luna, e che i suoi periodi si regolavano sui periodi dei due astri; anzi il periodo ottennale aggiunto da Plinio e ripetuto più tardi da altri è quasi certamente frutto di sole considerazioni teoretiche sulle relazioni fra il fenomeno della marea e il corso dei due astri. Ma sulla natura dell'influenza esercitata da essi Plinio non si è lungamente soffermato. Senza far parola della spiegazione posidoniana, egli, secondo un brevissimo accenno, sembra credere ad una sorta di assorbimento pel quale la luna si trascina dietro nella sua corsa i mari (¹). Di più non possiamo aspettarci per quei tempi, nè di più troveremo fino all'epoca di Newton; e del resto anche noi potremmo sottoscrivere liberamente alla frase di Plinio, così generica com'è, perchè non abbiamo fatto nulla di più che dare un nome — gravitazione — a ciò che il naturalista romano qualificava, in mancanza di altro vocabolo, col nome *haustus*, assorbimento. Ben più importanti che la natura, sono per noi le leggi dell'influenza lunisolare, ma su questo argomento, interamente moderno, nulla troveremo nell'evo antico nè nel medio.

Riguardo ad osservazioni d'indole locale, Plinio, oltre al riferire quella esagerata misura attribuita da lui a Pitea, di cui già parlammo, osserva in primo luogo che la marea si verifica con maggior veemenza nell'Oceano che « in reliquo mari » cioè nel Mediterraneo, osservazione ormai vecchia, ma di cui non si era ancora data una precisa spiegazione: secondo Plinio, l'aperta estensione dell'Oceano risente più efficacemente l'azione della luna che la superficie ristretta e impedita del Mediterraneo; e dobbiamo intendere che, a suo credere, quanto minore è l'estensione acquea, tanto meno sensibili sono le maree, perchè egli soggiunge che è perciò che i fiumi e i laghi non ci presentano tal fenomeno. Così pure la marea è più forte sulle coste che in alto mare, del pari che nei corpi umani le pulsazioni delle vene si avvertono più forti verso le estremità; e in questo paragone sembra far capolino il concetto dell'animalità del mondo, così diffuso ai tempi in cui Plinio scriveva. Ricorda infine il naturalista romano alcuni luoghi ove il flusso e riflusso ha una natura particolare, come lo stretto di Sicilia e quello di Eubea, ove la marea si alterna sette volte in ventiquattro ore (²), e finalmente i famosi pozzi del tempio di Ercole a Cadice, già oggetto di discussione per Strabone, sui quali Plinio riferisce un po' diversamente da Posidonio, rettificandolo probabilmente in base ad osservazioni personali.

(¹) Ancillantes (scil. aestus) siderum avido trahentique secum *haustu* maria ». II, § 212.
(²) Un accenno alle Sirti, *vadoso ac reciproco mari*, si trova nel libro V, 4, § 26.

All'infuori degli scienziati, troviamo ancora qualche accenno notevole alla marea presso altri scrittori romani del primo secolo. Lucano (39-65), non solo ne fa parola nel libro primo della Farsaglia (versi 409-19), ma ricorda altresì tre spiegazioni di essa: la prima (Ventus ab extremo pelagus sic axe volutet Destituatque ferens) sembra essere l'aristotelica; la seconda (an sidere mota secundo Thetyos unda vagae lunaribus aestuet horis) allude chiaramente all'influenza lunare; la terza (Flammiger an Titan ut alentes hauriat undas Erigat Oceanum fluctusque ad sidera ducat) ci lascia incerti se sia un'integrazione della seconda, giusta le dottrine di Plinio, ovvero una interpretazione a sè, che sostituisca il sole alla luna, affine a quella di Dicearco. Ma dove spiegazioni che ci riescono sovente oscure anche se espresse in linguaggio scientifico, ci appaiono invece abbellite da fronzoli poetici, non ci è permesso di solidamente discutere. Anche Silio Italico (25-101) ricorda la marea ([1]), e, sebbene in maniera poetica, accenna unicamente e chiaramente all'azione della luna, laddove Stazio (45-100) adombra in un'immagine fantastica un'influenza solare sulle acque del mare ([2]). Questi accenni ci mostrano non solo che le questioni riguardanti la marea erano abbastanza vive da penetrare al di fuori della cerchia degli scienziati, ma che duravano ancora, come accennammo a proposito di Mela, spiegazioni discordanti, malgrado che le osservazioni parlassero concordemente di un'influenza lunare. Tacito, nel ricordare le ingenti maree delle coste britanniche, che ricuoprono larghi tratti di spiaggia, osserva che ormai molti avevano discorso della natura delle maree ([3]), e in un altro luogo, descrivendo con colori vivaci un ingente flusso che sorprese e allagò un esercito di Vitellio sulle coste del mare del Nord, mostra di conoscere che i massimi flussi si verificano al tempo degli equinozî ([4]).

Poco abbiamo da dire degli scrittori non romani di questo secolo. Ma non vogliamo tacere del Periplo del mar Eritreo, scritto fra il 77 e l'89 da un Greco di Alessandria, che ha vaste conoscenze sull'India ([5]), e che descrive con notevole esattezza il fenomeno del *mascaret* quale si verifica appunto sui fiumi indiani, avvertendo i naviganti di guardarsi dai pericoli ch'esso può arrecare. Mentre alcuni accenni particolari, soprattutto quello dello strepito che accompagna l'onda di marea, ci fanno credere ch'egli parli del fenomeno per esperienza personale, l'affermazione che esso si verifica nelle sue maggiori proporzioni durante il novilunio è assai conforme al vero. La vivace descrizione merita di stare accanto a parecchie delle moderne.

Tra gli scrittori greci citeremo anche Plutarco (nato il 46 d. Cr.) che abbiamo già addietro ricordato, perchè in parecchi luoghi dei suoi scritti parla diffusamente delle credute influenze della luna sui corpi umidi, in particolare sugli animali marini,

(1) « Cymotheos ea regna vagae pelagique labores Luna movet; luna immissis per caerula bigis Fertque refertque fretum sequiturque reciproca Tethys ». *Punica*, III, 58 segg. Cfr. XIV, vv. 349-50.

(2) Stazio, *Thebaïs*, VII, 470-73.

(3) Tacito, *Agricola*, cap. 10.

(4) « Sidere aequinoctii, quo maxime tumescit Oceanus ». *Ann.* I, 70.

(5) Su questo Periplo, uno dei più notevoli documenti geografici dell'antichità, cfr. Bunbury, op. cit., II, pag. 443 e segg. È pubblicato nei *Geographi Graeci Minores*, vol. I. Cf. i §§ 45-46, pag. 292.

sulle midolla animali e vegetali, ecc.; ammesse queste tradizionali influenze, quella speciale sul mare, cui pure accenna [1], gli sembra non aver nulla di differente dalle altre e non abbisognare perciò di particolare spiegazione. Egli rappresenta dunque un indirizzo, comune nei secoli successivi, che vede, per ragioni già dette, nella luna la dominatrice dei corpi umidi e assimilando il fatto vero della marea, a tanti altri fatti puramente immaginarî, non poco ha contribuito nei secoli della decadenza, ad impedire indagini più positive sul fenomeno che ci occupa.

Intorno a questo tempo una spiegazione, che potrebbe dirsi nuova, della marea ci è fornita dal neopitagorico Apollonio di Tiana, vissuto anch'egli nel primo secolo dell'era volgare, strana figura di mago e di veggente; di lui infatti scrive il suo biografo Filostrato che « in una lettera agli Indi (Apollonio) dice che l'Oceano si riversa fuori spinto da venti subacquei [uscenti] da molte aperture che sotto di esso e intorno ad esso la terra presenta, e si ritira di nuovo allorchè il vento si abbassa, a guisa di anelito » [2]. Tale spiegazione ha in comune con quella di Platone l'ipotesi dell'esistenza di caverne o voragini nel sottosuolo, ove il mare si ritira e d'onde poi si espande alternativamente; ma, per quello che a noi risulta, Platone, e del pari Mela, non fanno esplicita menzione di venti sottomarini che sospingano le acque. La spiegazione di Apollonio dunque potrebbe apparirci come un' elaborazione di quella platoniana, ma ciò non può asserirsi con certezza dati gl'incompleti accenni che abbiamo e dell'una e dell'altra. L'espressione di Apollonio *ὥσπερ ἄσθμα* — a guisa di anelito — riavvicina questa concezione a quella del respiro della terra; ma più curiosa è la chiosa che immediatamente aggiunge Filostrato: « Fa fede di ciò quello che si rileva dai malati presso Cadice, poichè al tempo che l'acqua si gonfia, le anime non abbandonano i morenti, il che non potrebbe accadere se anche il vento non si riversasse in terra ». La credenza che i malati muoiano più facilmente col riflusso che col flusso è antichissima [3], e si perpetua anche nel Medio Evo e nel Rinascimento [4], ed è basata su antiche idee sulla natura dell'anima, ma quale relazione abbia tale credenza con questa particolare spiegazione della marea, chiaramente non si vede [5].

Nei secoli che seguiranno, le minuziose osservazioni riferite da Plinio andranno per una parte notevole perdute, e rimarranno solo a cognizione le più grossolane

(1) *De facie in orbe lunae*, cap. XXV, §§ 19-20.

(2) « *Ἐν μιᾷ γὰρ τῶν πρὸς Ἰνδοὺς ἐπιστολῶν τὸν ὠκεανόν φησι ὑφύδροις ἐλαυνόμενον πνεύμασιν ἐκ πολλῶν χασμάτων, ἃ ὑπ' αὐτῷ τε καὶ περὶ αὐτὸν ἡ γῆ παρέχεται, χωρεῖν ἐς τὸ ἔξω καὶ ἀναχωρεῖν πάλιν, ἐπειδὰν, ὥσπερ ἄσθμα, ὑπονοστήσῃ τὸ πνεῦμα.* Philostrati, *Vita Apollonii*, libro V, cap. 2.

(3) Plinio, *Hist. natur.*, II, § 220: «... Addit... Aristoteles nullum animal nisi aestu recedente expirare. Observatum id multum in Gallico Oceano et dumtaxat in homine compertum ».

(4) Cfr. ad. es. il notevole passo di L. B. Alberti, *De re aedificatoria*, X, 10.

(5) Questa nuova spiegazione di Apollonio è ricordata, come in seguito diremo, da Solino, che assomiglia i *χάσματα* di Apollonio a narici della terra (mundi nares), avvicinandosi ancora più alla concezione del respiro della terra; nel Medio Evo la vedremo riapparire più volte, variamente modificata e complicata. Ad illustrazione dell'idea generale che informa la spiegazione di Apollonio è da ricordarsi che, se la credenza nell'esistenza di caverne, etc., perforanti in ogni senso il corpo della terra, risale a Platone, altrettanto antica è l'opinione che tali cavità sieno ripiene di aria, spiriti, venti o altri simili. Cfr. Seneca, *Natur. Quaest.*, lib. III, 15.

informazioni, mentre le indagini sulla causa della marea cesseranno quasi interamente.

Nel secolo II dell'era volgare merita di essere ricordato Suetonio (75-160) una delle menti più comprensive dell'età sua, che fu paragonato — ad una certa distanza — a Varrone. Egli afferma che delle onde del mare si alimentano le stelle e in particolare il sole, che assorbe l'acqua marina e la distribuisce agli altri astri per temperarne il calore: « inde dicunt quia cum haurit aquas, erigit se oceanus » (1). Questa spiegazione, identica, come si vede, alla terza ricordata da Lucano, doveva essere alquanto diffusa e non mancare di sostenitori. Tuttavia la influenza lunare doveva essere ancora riconosciuta dai più. Dione Cassio accenna più volte, in passi già citati, al fenomeno della marea, come a cosa nota; e all'azione della luna come unica causa, chiaramente accennano il greco Cleomede, e presso Gellio il filosofo Favorino d' Arles, i quali ritengono ancora l'influsso lunare sull' Oceano analogo a quelli della luna stessa su animali marini e terrestri, secondo un'idea già più volte ricordata (2).

E invano attenderemmo notizie più particolareggiate dal maggior astronomo e geografo del secolo II. Claudio Tolomeo in nessun luogo delle sue maggiori opere — la Sintassi e la Geografia — ha occasione di parlare della marea, non occupandosi egli di geografia fisica; soltanto nella *Τετράβιβλος Σύνταξις*, che sembra ormai fuori di dubbio appartenere a lui, si legge un accenno non molto preciso all'influenza che la luna esercita sulle acque, come pure sulle piante e sugli animali (3). Analoghe influenze esercitano anche le stelle, ma per la luna il fatto è più manifesto e frequente « nel novilunio e nel plenilunio e anche nel tempo interposto ». Il Boll riavvicina questi accenni a quelli di Cicerone *De Divinitate*, II, 14 e *De Natura Deorum*, II, 19 e II, 46 (4); ma è notevole che Tolomeo parla di influenza esercitata dalla *luce* lunare, afferma ch'essa si risente al pari che nel mare, anche nei fiumi, e non esclude che anche le stelle ne esercitino una analoga. Egli non ha dunque più un'idea netta del fenomeno delle maree, come non l'ha rispetto alla natura dell' influenza lunare: per lui, come per molti altri prima e dopo di lui, la luna è fonte di umidità perchè raccoglie, per la sua vicinanza alla terra, le umide esalazioni di essa, e così a sua volta rammollisce, gonfia, ecc., i corpi a lei soggetti (5). Come il sole è origine della potenza vitale, così la luna della naturale: tutti gli umori, sia quelli sparsi alla superficie del globo (mari, fiumi, laghi), sia quelli contenuti entro le sostanze vegetali e animali, subiscono delle alterazioni secondo le posizioni dell' astro

(1) Svetonius, *Pratum de Naturis Rerum*, 154, in C. Svetonii Tranquilli, *Praeter Caesarum libros Reliquiae* (edid. A. Refferscheid), Lipsia, Teubner, 1860. I frammenti dei Prata di Svetonio, una specie di grande enciclopedia, ci sono conservati in massima parte da Isidoro. Cfr. le *Quaestiones Svetonianae* in calce all'opera suddetta, cap. II, specialmente pagg. 428-29. Il *Pratum de Nat. Rer.*, terza parte della grande opera, era per lo meno in dieci libri. Vedi anche: Schanz, op. cit. III, pagg. 52-53.

(2) Cleomede, lib. II, cap. 1°; Gellio, *Noctes Atticae*, XIV, 1. Cfr. XX, 7.

(3) Tolomeo, *Τετράβιβλος Σύνταξις*, lib. I, 1. Cfr. lib. II, 12.

(4) Boll, *Studien über Claudios Ptolemäus*. Jahrbücher für class. Philol., Suppl. XXI. Lipsia, 1894.

(5) *Τετράβιβλος Σύνταξις*, I, 1.

delle notti. Questi insegnamenti, esposti nella ***Τετράβιβλος Σύνταξις*** e condensati poi da Tolomeo stesso o da altri in forma aforistica nel cosiddetto *Centiloquio* (1) furono universalmente noti nel Medio Evo. Verso la stessa epoca Galeno (circa 130-210) professava e diffondeva dottrine simili, insegnando che l'influenza della luna sui corpi e le sostanze umide è forte specialmente nel novilunio e nel plenilunio e che essa consiste in special modo in un accrescimento o rigonfiamento che la luna induce nei corpi ricchi di umori; di qui egli ritraeva numerose e svariate applicazioni all'arte medica, fondando, si può dire, la dottrina dei giorni critici nelle malattie e ponendo le basi dell'astrologia medica (2).

L'influenza di Tolomeo e di Galeno nelle epoche successive fu enorme; essi consacrarono la dottrina del potere umefacente della luna, dettero le norme per osservarne gli effetti in relazione alle varie fasi di quella, e col trarne conseguenze interessanti ogni ramo della scienza, procurarono a queste idee la più universale diffusione. Ma con Tolomeo si chiude anche per la geografia il periodo classico, e si inizia quell'epoca che ha ricevuto il nome, ormai universalmente noto, di Patristica. Ma prima di passare a questa, ci sembra opportuno di riassumere a brevi tratti lo stato della questione che ci occupa, al principio del secolo III, al cominciare cioè del periodo di rapida decadenza degli studî.

IV.

Lo stato della questione alla fine dell'evo classico.

Uno studioso diligente e coscienzioso che al principio del III secolo dell' E. V. avesse voluto porsi a giorno delle conoscenze che si avevano sul fenomeno della marea, leggendo gli autori a lui anteriori che di esso si erano occupati, avrebbe facilmente constatato, come avrà constatato il lettore che ci abbia seguìto nella nostra rapida corsa, che nelle osservazioni fatte regnava ormai una certa concordia. Senza ripetere i resultati di tali osservazioni, si può dire in generale ch'esse avevan condotto a fissare una corrispondenza fra il flusso e riflusso e le fasi lunari, che si esplicava in un periodo semidiurno, uno semimensile, ed un altro più lungo attraverso l'intero anno; negli ultimi due periodi entrava necessariamente in scena un secondo fattore, il sole.

Oltre a ciò possiamo tra i fatti acquisiti con l'osservazione notare quello che due maree successive non hanno di solito la stessa intensità — la cosidetta ineguaglianza diurna — e che le ore dell'alta e della bassa marea non corrispondono esattamente ai momenti in cui la luna passa al meridiano, ma si verifica un certo ritardo che si osserva particolarmente nelle maree sizigiali. Erasi del pari riconosciuto che le variazioni della declinazione lunare hanno un'influenza sull'andamento delle maree.

(1) *Τετράβιβλος Σύνταξις*, II, 12-13. *Centiloquium*, 56.
(2) Galeno, *Περὶ κρισίμων ἡμερῶν*, lib. II, capp. 2-3.

La coscienza profonda dell'accordo fra i fenomeni della marea e le fasi lunari ci viene provata dal fatto assai significante del periodo ottennale della marea che viene aggiunto ai tre precedentemente ricordati in base certo a considerazioni puramente teoriche, come conseguenza cioè del fatto ben noto agli antichi, che ogni otto anni si rinnova un ciclo di identiche posizioni della luna e del sole rispetto ai solstizî e agli equinozî.

Noi non intendiamo affermare che la conoscenza di tutti questi fatti fosse molto divulgata, anzi essa doveva necessariamente esser ristretta ai soli dotti, ma il fatto generale della corrispondenza fra la marea e la luna, per dirla in breve, doveva oramai appartenere alle materie di conoscenza comune. Invece, riguardo alle ipotesi emesse per ispiegare il fenomeno, regnava tuttora una certa discordia. È opportuno perciò abbracciare con uno sguardo complessivo le più notevoli spiegazioni, anche per poter più agevolmente seguire le loro vicende attraverso i secoli del Medio Evo.

Esse possono dividersi in due grandi categorie: quelle che ricercavano la causa della marea *nel mare stesso* e quelle — di gran lunga più numerose — che ricorrevano all'intervento di influenze esterne. Alle prime appartiene quella avanzata da Cratete di Mallo, che si può forse considerare come il portato di una momentanea reazione contro le vedute di Pitea sull'influsso lunare, e quell'altra, più importante per noi, che fa della marea il respiro della terra considerata come animale. Questa spiegazione peraltro, per quanto ci risulta dalle poche notizie che abbiamo, non si è ancora ben delineata e ci appare più che altro nella forma di paragone diretto ad esprimere forse solamente la ritmicità del fenomeno; ma già appariscono gli indizi di una successiva elaborazione nella ipotesi avanzata da Apollonio di Tiana che s'immagina veramente dei grandi soffi uscenti da aperture sottomarine — gigantesche narici — i quali gonfiano alternatamente il mare.

Nella seconda categoria occorre distinguere le spiegazioni che fanno capo ad una influenza lunare, almeno principalmente, da quelle che ammettono unicamente una influenza del sole. Queste ultime che cozzano dunque colle più divulgate osservazioni sono perciò stesso molto rare; ne abbiamo trovato menzione, per tacer dei più antichi, in Lucano e in Suetonio. La loro ragione d'essere, malgrado il loro contrasto con l'esperienza, deve ricercarsi forse nel desiderio di voler ricondurre anche il fenomeno della marea nella cerchia tanto vasta dei fenomeni atmosferici e marini pei quali era ovvia l'azione del sole, e nella difficoltà di riconoscere con che mezzo la luna potesse esercitare il suo effetto.

Ma di gran lunga più diffusa di tutte queste è, come abbiamo visto, la dottrina di un'influenza lunare. Ma qual genere d'influenza? L'ipotesi di Seleuco di un vento suscitato dalla rivoluzione della luna era rimasta isolata; e invece troviamo divulgate le vedute posidoniane che hanno le loro radici in dottrine stoiche. La luna regge e governa tutte le cose e i corpi umidi, perchè è umida anch'essa, raccogliendo, per la sua vicinanza alla terra, le esalazioni di questa; la luna possiede un certo potere calorifico, ma non così genuino come quello del sole, sibbene coniugato al potere di inumidire e anche di putrefare. Queste vedute, accompagnate da un corteo di conseguenze, di applicazioni e di credenze curiose, dominano alla fine dell'Evo antico, come traspare a sufficienza dalle opere di Plutarco e anche di Tolomeo.

Vi è poi chi non si cura di dichiarare esplicitamente la natura dell'influenza lunare sulle acque; Plinio finalmente potrebbe sembrar quasi aver precorso le idee newtoniane allorchè afferma, senz'altro dire, che la luna si trascina dietro nella sua corsa i mari.

Comunque, una spiegazione decisamente prevalente alla fine dell'Evo antico non si può dire che ci sia; e sarebbe prezzo dell'opera ricercarne più particolarmente le ragioni; ma poichè un tale stato d'incertezza e di lotta continua fra diverse vedute si perpetua, anzi si accentua per tutto il Medio Evo, noi ci riserviamo di fare alcune considerazioni su di ciò alla fine del nostro lavoro. Per ora ci basta di aver riassunto rapidamente le principali osservazioni e spiegazioni di cui si trova notizia nei più diffusi fra gli antichi scienziati; ciò era tanto più necessario in quanto che, per molti secoli, nelle trattazioni degli scrittori medioevali, che ci prepariamo ad esaminare, hanno una larga parte le notizie attinte o addirittura copiate da autori classici.

V.

Gli scrittori profani dei secoli della decadenza (III-VI secolo).

Quelle menzioni del flusso e riflusso sulle rive dei diversi mari che abbiamo nei capitoli precedenti rintracciato per l'epoca classica fino alla fine del secolo II, si ritrovano ancora presso varî scrittori della cosidetta decadenza ad attestare che il fenomeno veniva sempre osservato e notato con curiosità; anzi, coll'estendersi delle relazioni fra l'impero romano e i popoli dell'Europa centro-settentrionale da un lato, dell'Asia occidentale dall'altro, è naturale che si estendesse la cerchia di tali osservazioni.

Lo storico Erodiano, vissuto nel III secolo, scrive che la maggior parte della Britannia, inondata costantemente dalla marea, è paludosa sì che gli abitanti camminano spesso bagnati sino ai fianchi (1), ed Eumenio (nato circa il 260, morto il 311) ricorda il flusso e il riflusso che si alternano *statis vicibus* sulle coste dei Morini nella Gallia, ove egli era nato (2); più tardi Claudiano (IV-V secolo) fa cenno dei perniciosi effetti del *mascaret* alle foci della Gironda (3). Nel Mediterraneo le Sirti continuano ad essere additate come il teatro di violenti flussi e riflussi, che col loro cozzo producono pericolosi rivolgimenti del mare: ne parla, nella sua Periegesis, Dionisio (4) e sulle sue orme Avieno (fine del IV secolo) descrive con colorito poetico l'infuriare del pelago in ambedue le Sirti (5). Peraltro non mancano accenni anche

(1) Herodiani, *Ab excessu divi Marci*, lib. III, § 6 (Lipsia, Teubner, 1855).

(2) Eumenio, *Panegyr. Constantii Caesaris*, cap. 6.

(3) Claudiano, *In Rufinum*, II, 113-14.

(4) Dionisio, *Periegesis*, vv. 198-203. Cfr. anche Solino, *Collectanea*, XXVII, 3, che attinge a Varrone.

(5) « ..... ardua quippe — Undarum moles Tyrrheno cogitur aestu — Curvatumque salum quatit amplo litora fluctu — Ecce alias lento prorepit gurgite Nereus — Undaque vix tenuis siccas praetexit arenas. ». *Ora Maritima*, 291-98.

ad altre parti del nostro mare, oltre che allo stretto di Gibilterra, classico ormai a questo riguardo. Così Claudiano fa menzione della marea nell'Adriatico settentrionale, alle foci del Po, dove con stabili leggi, ora favorisce i naviganti che imboccano il fiume, ora li impedisce, non diversamente da ciò che succede nell'Oceano [1]; e per questa medesima località, Procopio di Cesarea, uno degli scrittori di questo tempo che ha più esatte cognizioni geografiche, ci dà una descrizione particolareggiata che merita di esser riferita. « Colà [presso Ravenna], dice lo storico, avviene ogni giorno un fenomeno notevole (*θαυμάσιον οἷον*). Il mare al mattino penetra a guisa di fiume entro terra pel tratto *di un dì di cammino d'uomo aitante* e la rende navigabile fin dentro il continente; ritirandosi poi di nuovo a tarda sera rientra nel suo letto togliendo la possibilità di navigare. Quanti dunque han da portare vettovaglie in città dal di fuori o da essa debbon recarle via per commercio o per altra ragione, posto il carico nelle navi e legatele a terra, là dove suol formarsi questa via navigabile (o canale, *πορθμός*), attendono il flusso. E quando questo viene, le navi, sollevate a poco a poco da terra, si mettono a navigare... E ciò avviene non solo colà, ma in tutta quella spiaggia fino ad Aquileja. Ma non in ogni tempo ciò suol accadere in questo modo, ma quando è scarsa la luce della luna [ossia: quando la luna ha poca età], anche il flusso del mare è piccolo; dopo il primo quarto fino all'ultimo suole esser invece molto violento » [2]. Questo passo è molto importante anche per la storia delle mutazioni del litorale adriatico.

La memoria dei grandiosi flussi e riflussi dell' India ci è conservata da Solino (III secolo?) [3], che certamente attinge questa notizia a qualcheduno che ne aveva precedentemente parlato; e Prisciano ricorda la marea nel mar Rosso e per la prima volta nel Caspio (Hyrcanum mare) a riguardo dei quali mari poteva egli avere avuto informazioni durante il suo soggiorno in Persia [4]. Frequenti sono anche le menzioni della marea nell'Atlantico.

In conclusione osservazioni isolate non mancano neppure in questi secoli riguardo a qualunque dei mari conosciuti, ma non si deve da ciò in nessun modo inferire che il fenomeno della marea fosse ritenuto come universale, come comune cioè a tutti i mari, che soltanto potean comportarsi rispetto ad esso più o meno regolarmente. Questa coscienza che doveva esser lucida nella mente di Eratostene, Posidonio, Plinio, si va a poco a poco cancellando in questi secoli. Sesto Empirico (vissuto intorno al 180-220), dice chiaramente che i flussi e riflussi si verificano in certe parti del mare [5], e Prisciano, che, sebbene sembri occuparsi in particolare del mar Rosso, accenna pure alla marea nell'Oceano Atlantico e nel mar Caspio, non mostra di aver un'idea chiara della generalità del fenomeno. È naturale che ciò nocesse alla attendibilità delle ipotesi emesse per ispiegarlo, nelle quali del resto non troviamo in questi secoli alcuna

(1) Claudiano, *De VI consulatu Honorii Paneg.*, vv. 495-99. Cfr. il passo prima citato relativo alle foci della Gironda.

(2) Procopio, *De bello Gothico*, lib. I, cap. 1.

(3) Solino, *Collectanea rerum memorabil.*, cap. XXVI. Per la data dell'autore, cfr. Beazley, op. cit., vol. I, pagg. 348-49; Bunbury, op. cit., II, pagg. 675-76. Schanz, op. cit., III, 201-03.

(4) Prisciano, *Quaestiones ad Chosroëm*, Qu. VI.

(5) *Ἀμπώτεις τε καὶ πλημμυρίδες περί τινα μέρη τῆς θαλάσσης γίνονται. Adversus physicos*, 79.

novità, sebbene sempre continuino a combattersi opinioni differenti. Infatti, se ci volgiamo a ricercare quali fossero, in questo periodo di generale decadenza degli studî, le spiegazioni piu diffuse della marea, ci occorre un brano di Giulio Solino, già ricordato, che convien citare integralmente, perchè la sua opera — nota nel Medio Evo col titolo di *Polyhistor* — fu largamente diffusa e servì di fonte ad un gran numero di scrittori posteriori [1]: « Dubitatur etiam nunc — scrive — quibus ex causis intumescat (Oceanus) vel quatenus, cum superfluus sibi fuerit, rursus in se residat. Nec in obscuro est plura pro ingeniis disserentium potius quam pro veritatis fide expressa. Sed omisso ancipiti concurrentium quaestionum, has opiniones probatissimas invenimus. Physici aiunt mundum animal esse, eumque, ex variis elementorum corporibus conglobatum moveri spiritu regi mente: quae utraque diffusa per membra omnia aeternae molis vigorem exerceant. Sicut ergo in corporibus nostris commercia sunt spiritalia, *ita in profundis Oceani nares quasdam mundi constitutas, per quas emissi anhelitus vel reducti modo efflent maria, modo revocent.* At hi qui siderúm sequuntur disciplinam contendunt meatus istos commoveri lunae cursibus: adeo ut sic vicissitudines inter maciem aquarum et plenitudinem respiciant ad auctus eius vel eliquia, neque eodem semper tempore, sed prout illa aut mergatur aut surgat varient se alternantes recursus » [2].

A fondamento di ambedue le spiegazioni riferite da Solino sta l'opinione che in fondo al mare esistano delle cavità d'onde escono ritmicamente dei soffi d'aria o di vapore che gonfiano il mare (flusso), il quale ritorna indietro quando l'aria rientra in quelle caverne. Questa idea è tutt'altro che nuova, avendola già noi ritrovata chiaramente espressa in Apollonio di Tiana, e si perpetuerà poi per tutto il Medio Evo. La diversità delle due spiegazioni consiste in ciò che pei fisici questo entrare ed uscire di vapori è un moto naturale, analogo al respiro di un animale, per gli astronomi invece esso è provocato dalla luna alle cui fasi obbedisce.

La prima opinione si appoggia alla teoria del mondo animale di cui già abbiamo fatto cenno, e che all'epoca di Solino era tutt'altro che decaduta, perchè, ripresa dai Neoplatonici, era stata elaborata filosoficamente da Plotino [3]; quanto alla sua applicazione pratica a spiegare la marea, essa risale almeno ad Atenodoro; ma mentre, come già notammo, quest'ultimo si esprimeva molto genericamente al riguardo, Solino, preceduto in ciò da Apollonio di Tiana, fa intervenire proprio una materiale respirazione della terra, sotto forma di soffi d'aria uscenti da cavità sottomarine, che molto opportunamente paragona a narici. Anche Eumenio, nel passo poc'anzi citato, dove parla delle maree sulle coste galliche, fa menzione di questa opinione.

Ma la seconda spiegazione, che vede nel fenomeno del flusso e riflusso un'influenza lunare, è assai più diffusa e si trova abbracciata dagli stessi Neoplatonici. Porfirio (233-304) la ammette non solo per le acque, compresi i fiumi e i fonti, ma anche per molti animali marini, granchi, ricci, ecc., che crescono e decrescono colla

[1] Solino poi attinge in particolare a Plinio, ma conserva parecchie cose di Varrone. Cfr. su ciò: Columba, *Le fonti di Giulio Solino* in Rassegna di antichità classica, I, 1896.

[2] Solino, *Collectanea rer. memor.*, cap. XXIII, 17-22. Cito dall'edizione Mommsen: C. Julii Solini, *Coll. rer. memor.* Berolini, in aedib. Frid. Nicolai, 1864, pagg. 120-21.

[3] Confr. Plotino, *Enneade IV*, lib. IV, specialmente ai capp. 32-33.

luna « quasi per comando di legge celeste » ([1]), e identica è la opinione di Proclo (410-85), l'altra grande colonna del Neoplatonismo ([2]). L'autore dei *Theologumena Aritmeticae* mette chiaramente in luce l'accordo fra l'andamento della marea e le fasi lunari, affermando che le maree sono massime nel novilunio, decrescono poi durante la prima settimana fino al primo quarto, per poi ripercorrere a ritroso le stesse vicende fino al plenilunio; e lo stesso per la seconda metà del mese ([3]). Anche fra gli scrittori romani è diffusa l'idea dell'influenza lunare. Vegezio (circa il 400) in un passo del suo trattato *De re militari* che contiene una bella descrizione del flusso, ne parla come di cosa nota (... *diverso lunae crescentis minuentisque statu certis horis ista variantur*), e, attingendo probabilmente a Varrone, dà dei consigli per evitarne i danni nelle operazioni navali ([4]). Claudiano vi accenna in un passo già citato, Macrobio ne parla a lungo, come or ora vedremo, e abbiam già visto che ne tocchi anche lo storico Procopio nel brano surriferito.

Ma se ci domandiamo a qual genere d'influenza lunare si attribuissero i fenomeni di marea, ci accorgiamo facilmente, che, lungi dall'ammettere con Solino che la luna provochi l'uscita di aria o vapori da caverne sottomarine, l'opinione più diffusa in questi secoli parte ancora dal principio che la luna sia fonte di umidità e abbia perciò particolar dominio ed impero sulle cose umide. Questa opinione, esposta, come vedemmo, da Tolomeo nella sua *Τετράβιβλος Σύνταξις*, opera ch'ebbe grande autorità nel Medio Evo e circolò molto anche in forma di estratti, è abbracciata senza restrizione da Porfirio e da Proclo nei commenti o parafrasi poc'anzi citati di quest'opera tolemaica. Anche l'Hermippus, autore del dialogo *De Astrologia* (V secolo in fine) che si attiene specialmente alle dottrine degli ultimi Neoplatonici, afferma che la luna ha la proprietà di assorbire le cose umide e che la sua influenza sul mare è in certi luoghi così evidente, che gli abitanti dell'Iberia e della Libia dall'osservazione del flusso attraverso lo stretto di Cadice, riconoscono l'epoca della luna nuova ([5]).

Questa opinione che fa della luna la dominatrice delle cose umide si trova altresì chiaramente espressa in Macrobio, un pagano tendente al Neoplatonismo, vissuto tra il IV e il V secolo, il quale dice che la luna è prima umida, poi calda, poi secca e da ultimo fredda. Questa curiosa vicenda si riscontra in un triplice periodo: nell'anno, essendo essa umida di primavera, calda d'estate, secca d'autunno, fredda d'inverno; nel mese, essendo la prima settimana umida (*quia nascens luna humorem solet concitare*), la seconda, calda, per influenza del sole, la terza, secca (*quasi plus ab ortu remota*!?), la quarta fredda, perchè le vien meno la luce; nel giorno infine, essendo umida nelle prime sei ore, calda nelle seconde sei, e così via. Anche l'Oceano

([1]) Porfirio, *Introduct. In Ptolem. Quadripartitum*. Basileae, MDLIX, in foli., pagg. 182-83.

([2]) Proclo, *Paraphrasis in Quatuor Ptolem. libros de Siderum Effectionibus*. Basileae ap. Joh. Oporinum s. d., lib. I, cap. 1.

([3]) *Theologumena Aritmeticae*.., edidit Frider. Astius (Lipsia, Weidmann, 1817), § 46. In questa edizione l'opera va sotto il nome di Jamblico, ma in realtà chi sia l'autore si ignora, del pari che l'epoca precisa in cui l'opera fu scritta.

([4]) Vegetius, *De re militari*, lib. IV, cap. 42. Sulla fonte di questo e di alcuni precedenti capitoli di Vegezio cfr. Retzestein, Artic. citato, pagg. 527-28.

([5]) Hermippus, *De Astrologia Dialogus*, lib. II, cap. 9 (Lipsia, Teubner, 1895, pag. 48).

nel suo crescere e decrescere mantiene rigorosamente quest'ordine ([1]). Con Macrobio dunque, il quale del resto non fa che riferire una idea già divulgata, questa opinione, in tal modo elaborata, non solo spiega perchè la luna abbia influenza sulle acque, ma dovrebbe anche render ragione dei periodi semidiurno, semimensile ed annuo della marea; senonchè ognun vede quanto poco fondamento vi sia in queste differenti proprietà che volta a volta vengono attribuite alla luna.

Meno stranamente, ma sempre sullo stesso principio è spiegato il flusso e riflusso nell'operetta di Prisciano *Solutiones ad Chosrŏem*, della quale abbiamo già lungamente discorso. L'opera è scritta, come accenna il titolo, per rispondere ad alcune questioni fatte a Prisciano dal re dei Persiani Cosroe, presso il quale avean cercato ospitalità gli ultimi membri della Scuola d'Atene, tra cui Prisciano stesso, dopo la chiusura ordinatane da Giustiniano imperatore nel 529 ([2]). Delle vedute riferite nella VI Quaestio di questo scritto, che sono quelle di Posidonio, abbiamo già discorso a proposito di quest'ultimo autore. Abbiamo ricordato anche come, a spiegare perchè la luna, anzichè il sole, influisca sull'Oceano, Prisciano riporti, come di Posidonio stesso, il paragone della pentola che, scaldata moderatamente, si gonfia e ribolle, mentre, messa su un fuoco ardente e continuo, si consuma. Noi vedremo in seguito che, ogni volta che simili vedute ritornano in campo, sono quasi sempre convalidate da questo paragone che dovette sembrare di grandissima efficacia dimostrativa. Abbiamo inoltre accennato come, secondo Prisciano, Posidonio ammettesse anche un' influenza del sole, manifesta nel plenilunio sopratutto, e altresì, pel periodo annuo, nell'equinozio.

La dottrina esposta da Prisciano rappresenta certamente quanto di meglio sia stato scritto in questi secoli a riguardo della marea; tuttavia anch'egli, colla spiegazione che riporta, rientra nel novero di quegli autori che attribuiscono alla luna una speciale influenza sulle cose umide, i quali costituiscono, come abbiamo visto, la maggioranza.

Ma cenni di spiegazioni di altro genere di tutte quelle ricordate nel presente capitolo non mancano fra gli scrittori di questo secolo. Macrobio riferisce anche quell'opinione, che risale, come si disse altrove, a Cratete di Mallo, secondo cui la marea è dovuta al cozzo di correnti contrarie dell'Oceano ([3]), e a questa spiegazione sembra alludere anche il verso 643 del poemetto di Rutilio Namaziano, contemporaneo di Macrobio ([4]), mentre il verso successivo accenna poeticamente e oscuramente ad una generica azione delle stelle che assorbirebbero l'acqua marina ([5]). Infine un

([1]) Macrobio, *Comment. in Somn. Scipionis*, I, cap. VI, § 60-61.

([2]) Questo scritto di Prisciano, importante e poco noto, fu pubblicato per la prima volta da I. Quicherat in appendice alle Enneadi di Plotino (Paris, Didot, 1855) da un codice incompleto della biblioteca sangermanense. Completato per la ulteriore scoperta di altri tre codici, è ora pubblicato nel *Supplementum Aristotelicum* del Reimer, a cura del Bywater (Prisciani Lydi, *Quae Extant. Metaphrasis in Theophrastum et Solutionum ad Chosrŏem Liber*. Berlino, Reimer, 1886). Tutti e quattro i codici contengono solo la traduzione latina di questo scritto, fatta circa il IX secolo, forse in Francia, molto scorretta. L'edizione berlinese reca per molti brani la probabile ricostruzione del testo greco.

([3]) Macrobio, *Comment. in Somn. Scip.*, lib. II, cap. 9, § 1-3.

([4]) Rutilio, *De Reditu suo*, I, vv. 641-44: « Qualiter Oceanus mediis infunditur agris — Destituenda vago cum premit arva salo — Sive alio refluus nostro conliditur orbi — Sive corusca suis sidera pascit equis ».

([5]) Confronta, per questa idea, quanto abbiamo detto nel terzo capitolo, di Suetonio.

passo già citato di Eumenio ([1]) accenna ad un'altra spiegazione, secondo la quale il flusso presso le coste sarebbe prodotto da ciò che altre coste poste in faccia a quelle, ad una certa distanza, spingono l'acqua sulle prime (flusso), le quali a lor volta le respingono (riflusso) e così di seguito, urtando l'acqua alternativamente or su l'una or su l'altra costa; il movimento di marea sarebbe in tal modo un semplice moto di altalena che continuerebbe in eterno senza intervento di alcun fattore esterno. Questa spiegazione, che ben si adatta al luogo di cui parla Eumenio, cioè alle coste galliche della Manica, sarebbe particolarmente appropriata per gli stretti di mare, a proposito dei quali essa era già stata forse ammessa parzialmente, come vedemmo, da Aristotele.

Ma, prescindendo da questi pochi accenni, prevalenti sono in questo tempo le spiegazioni che si fondano su un'azione della luna; e ciò vedremo confermato dall'esame, che adesso ci prepariamo a fare, degli scrittori ecclesiastici di questi secoli.

VI.

Gli scrittori ecclesiastici e i Padri della Chiesa.

(III-VII secolo).

Come tutte le scienze, anche la geografia dei Padri della Chiesa prende le mosse dalla Bibbia, nella quale era contenuto, come già abbiamo osservato, il germe di tutte le conoscenze scientifiche; e, prima che i Padri si volgessero a più profonde indagini nel campo delle Scienze Naturali, è nelle esegesi della Bibbia, negli Hexaemeron, o Commenti alla Creazione del mondo in sei giorni, che si trovano notizie tutt'altro che disprezzabili relative alla scienza geografica. Gli studî di esegesi biblica nei primi secoli fiorirono, come ognun sa, particolarmente in Oriente, dove essi ebbero due centri pincipali, Alessandria e Antiochia, ai quali si aggiunsero parecchi centri minori. Ma, mentre in Alessandria, dove il Neoplatonismo aveva profonde radici, già Origene (185-254) avea rivolto l'esegesi della Bibbia verso l'allegoria, in modo che i commenti alessandrini hanno per noi scarsa importanza, in Antiochia dominò sempre un certo realismo informato al principio che la Bibbia, come parola di Dio, non poteva essere presa alla leggera e doveva essere spiegata passo per passo, parola per parola, col sussidio di tutte le conoscenze scientifiche. In accordo colla scuola antiochena erano la scuola di Cappadocia e quella di Edessa ([2]). Nè è a credere che tutti i Padri della Chiesa fossero invasi da quell'orrore verso tutto ciò ch'era portato della scienza pagana, orrore che fu il resultato di una reazione molto diffusa e accanita contro il Paganesimo, specie nei secoli dal terzo al quinto. Inoltre « alcuni teoremi degli antichi erano già così penetrati in *succum et sanguinem* che non erano sentiti più come antichi, ma come indipendenti; e, mentre si faceva guerra aperta

([1]) « Cum Oceanus ille, tanto libratus impetu, tanta mole consurgens, sive *ulterioribus, ut ferunt, terris repulsus,* sive anhelitu, quo respirat, erectus etc ». Eumenio, *Panegyr. Constantii Caesaris,* cap. 6.

([2]) Kretschmer, *Die physische Erdk. im christlichen Mittelalter,* pagg. 9-19.

alla scienza antica, ci si accorgeva che tutto l'apparato dottrinario era abbarbicato al mondo antico con tutte le sue radici e i suoi filamenti » ([1]). E noi vediamo S. Basilio, dominato del resto da una temperata neutralità, non ripudiare affatto le vedute tolemaiche ed altre dottrine pagane intorno all'Universo ([2]).

L'influenza della luna sul mare non sembrava contraria alle dottrine cristiane. Il versetto XIV del primo capitolo del Genesi afferma che Dio creò il sole e la luna non solo per far distinzione fra il giorno e la notte, ma ancora « in signa et in tempora et in annos et in dies ». Quale fosse il significato della parola *signa* non è dubbio pei commentatori.

Già l'ebreo Filone di Alessandria (I secolo) commentava il versetto scrivendo che dai moti della luna e delle stelle gli uomini presagiscono *καρπῶν φορὰς καὶ ἀφορίας, ζώων γενέσεις καὶ φθορὰς, αἰθρίας καὶ νεφώσεις, νηνεμίας καὶ βίας πνευμάτων, ποταμῶν πλημμύρας καὶ κενώσεις, θάλαττης ἠρεμίαν καὶ κλυδώνα* ecc. ([3]). Posteriormente i Padri della Chiesa si scagliano contro gli Astrologi che possono intendere quel *signa* nel senso che dal corso degli astri s'interpreti l'indole e il destino degli uomini, ma ammettono influenze naturali della luna sui venti, sul mare, su certi animali, ecc. Così, mentre Eusebio di Cesarea (circa 270-338), ammette tali influenze anche in particolare per le acque ([4]), Teodoreto vescovo di Cirro (circa 390-458), commentando la Genesi, intende i signa della luna e del sole, come influssi sui campi e sul mare onde agricoltori e naviganti potevan trarre *segni* per le opere agricole e le navigazioni ([5]).

Più esplicitamente S. Basilio (329-379), della scuola cappadocia, discorre delle influenze della luna e parla anche della marea. Il moto della luna, secondo egli spiega, non è indifferente per la costituzione degli animali e di tutto ciò che cresce in terra, perchè al suo mancare i corpi si fanno rari e vuoti, al suo crescere crescono. E ciò perchè la luna « infonde celatamente un umore misto a calore che penetra fino nelle più interne parti ». Come si vede, siamo ancora alle stesse dottrine dominanti presso gli scrittori profani, e già canonizzate, per così dire, dalla grande autorità di Tolomeo, come già abbiamo avuto occasione di vedere. Anche per S. Basilio la luna è fonte d'umidità e perciò le sue influenze si notano particolarmente nell'aria e nell'acqua. *Καὶ αἱ περὶ τοὺς εὐρίπους παλίρροιαι καὶ ἡ περὶ τὸν λεγόμενον ὠκεανὸν ἄμπωτις, ἣν ταὶς περιόδοις τῆς σελήνης τεταγμένως ἑπομένην ἐξεῦρον οἱ προσοικοῦντες. Οἱ μὲν γὰρ εὔριποι μεταρρέουσιν ἐφ'ἑκατέρα κατὰ τὰ λοιπὰ σχήματα τῆς σελήνης· ἐν δὲ τῷ καιρῷ τῆς γενέσεως ουδὲ τὸ βραχύτατον ἀτρεμοῦσιν, ἀλλ'ἐν σάλῳ καὶ ταλαντώσει καθεστήκασιν, ἕως ἄν, ἐκφανεῖσα πάλιν, ἀκουλουθίαν τινὰ τῇ παλιρροίᾳ παρέσχηται. Ἡ δὲ ἑσπερία θάλασσα τὰς ἀμπώτεις ὑφίσταται, νῦν μὲν ὑπονοστοῦσα, πάλιν δὲ ἐπικλύζουσα, ὥσπερ ἀναπνοαῖς τῆς σελήνης ὑφελκο-*

([1]) Kretschmer, op. cit., pag. 10.

([2]) Beazley, op. cit., vol. I, pag. 345.

([3]) Philo Alexandr., *De opificio mundi*, pag. 36 (ediz. Cohn; Breslau 1889).

([4]) Eusebio di Cesarea, *Tractatum de Paschate*, i cui frammenti in Mai, *Scriptorum Veterum Nova Collectio*, vol. I, pag. 249.

([5]) Theodoretus, *Quaestiones in Genesim*, presso Migne, *Patrol. Gr.*, vol. LXXX, col. 98. Cfr. anche Severiano di Gabala, in Migne, *Patr. Gr.*. vol. LVI, col. 450.

μένη πρὸς τὸ ὀπίσω, καὶ πάλιν ταῖς ἀπ᾽ αὐτῆς ἐκπνοαῖς, εἰς τὸ οἰκεῖον μέτρον προωθουμένη (1). Questo brano di Basilio così inesatto nel suo complesso, è pur notevole per l'opinione espressavi che la luna, non solo possa assorbire o quasi aspirare le acque marine sollevandole, concetto che si trova anche in Plinio, ma possa anche respingerle al loro posto, esercitando, successivamente a quello di attrazione, un effetto di repulsione espresso dalla parola *ἐκπνοή*.

L'influenza della luna sulle acque continuò ad essere accettata anche dai Padri posteriori. Nel commento alla Bibbia di Anastasio Sinaita (VI secolo) è detto chiaramente che Dio, come ha posto il sole a governare tutte le cose secche, così ha dato alla luna potestà e governo sull'acqua, come attestano per molteplici esperienze quelli che tali cose investigano. Così i naviganti sanno che « crescente corpore lunae, simul etiam crescunt et multiplicantur aquae, ea autem decrescente, rursus cum ea desinunt et decrescunt », al pari di molti animali di terra e di mare. « Itaque qui navigant diligentissime observant et considerant adspectum lunae et figuram et lucem et quatuor eius conversiones . . . » (2). Alla autorità di Basilio si riferisce ancora, per le mutazioni che la luna induce negli elementi e nei corpi umidi, Giovanni Filopono che scriveva intorno al 600 dell'èra volgare (3).

L'*Hexaemeron* di S. Basilio fu largamente diffuso anche in Occidente, dove servì di fonte a parecchi scrittori sacri, i quali ci mostrano perciò vedute ancor meno originali di quelle dei Padri dell'Oriente. Mentre S. Ilario (300-367) attinge certamente a Basilio un breve accenno ai variabili moti del mare in relazione alle fasi della luna (4), S. Ambrogio (335-397) in un brano del suo *Hexaemeron* (5) non fa altro che una cattiva traduzione libera del passo già citato di S. Basilio stesso, in un punto errata fino ad intendere precisamente l'opposto di quanto l'autore greco scriveva (6); e alla medesima fonte risale anche probabilmente il breve e insignificante accenno di Sant'Agostino (354-430): « Et lunaribus incrementis et decrementis augeri et minui quaedam genera rerum sicut echinos et conchas et mirabiles aestus oceani » (7). Lo stesso accenno vago ed incerto ad un crescere e decrescere delle acque del mare, dei fiumi e delle fonti col crescere e decrescere della luna, si trova espresso poeticamente da Draconzio (8), poeta ecclesiastico, vissuto in Spagna nel V secolo. Ma questi accenni non hanno per noi quasi nessuna importanza e altro non dimostrano se non la scarsità delle conoscenze relative al fenomeno che ci occupa. In questi se-

(1) S. Basilio, *Homilia in Hexaemeron*, § 60-61. Migne, *Patr. Gr.*, vol. XXIX. Il Müllenhoff (Deutsche Altertumskunde, I, pagg. 364-65) vede in questo brano di Basilio alcuni elementi attinti ad un'antica cosmografia ellenica.

(2) Anastasio Sinaita, *In Hexaemeron*, lib. IV presso Migne, *Patr. Gr.*, vol. LXXXIX, col. 903-04.

(3) Johannes Philoponos, *De Mundi creatione*, lib. IV, cap. 17.

(4) S. Ilario, *Tractatus in LXIX Psalmum*; in Migne, *Patr. Lat.*, vol. IX, col. 488.

(5) S. Ambrogio, *Hexaemeron*, libr. VI, cap. 8; Migne, *Patr. Lat.*, vol. XIV.

(6) Basilio dice: « *(Εὔριποι) ἐν δὲ τῷ καιρῷ τῆς γενέσεως οὐδὲ τὸ βραχύτατον ἀτρεμοῦσιν* » e Ambrogio traduce: « in ortu tamen eius (lunae) stant placidi »!!

(7) S. Agostino, *De civitate Dei*, libr. V, cap. 6.

(8) Draconzio, *Carmen de Deo*, lib. I, vv. 133-37; cf. *Satisfactio ad Guntharium*, vv. 235-40; Migne, *Patr. Lat.*, vol. LX.

coli oscuri i pochi scrittori pagani che abbiamo ricordato al capitolo precedente sono pur quasi i soli a conservare pochi rimasugli di quei fatti e di quelle osservazioni assodate nei secoli più splendidi della scienza geografica dei Greci. Osservazioni ed accenni originali sono rarissimi e puramente occasionali, quale quello di Sidonio Apollinare (seconda metà del V secolo) ai violenti flussi del Golfo di Guascogna che respingono talora indietro verso la sorgente le onde della Garonna con impeto irresistibile e rovinoso (1).

E nulla di nuovo apprendiamo neppure da Isidoro di Siviglia (morto il 636), se consideriamo solo quanto egli riporta nelle sue *Etimologie* e nel *De Natura Rerum* (2) compilando unicamente su fonti pagane o cristiane di non grande autorità.

Nelle *Etimologie* scrive: « *Aestus* ad Oceanum pertinet, fretum ad utrumque mare; nam aestus est maris accessus et recessus, idest inquietudo, unde et *aestuaria* per quae mare vicissim tam accedit quam recedit. *Fretum* autem appellatur quod ibi semper mare ferveat ». E ricorda a questo proposito il fretum Gaditanum e il Siculum ove: « ter in die erigit fluctus et ter absorbet », e anche le pericolose Sirti (3). Riguardo alle cause del flusso e riflusso egli riporta tre spiegazioni (4): nella prima ripete *ad literam* le parole di Solino relative ai venti uscenti dal profondo del mare; nella seconda ammette un'influenza lunare, riportando alcune frasi di S. Ambrogio, e ad un'influenza lunare ha accennato anche prima (5), affermando che col crescere e decrescere della luna, crescono e decrescono tutti gli elementi e molti corpi organici (ostriche, ricci, cervelli di animali marini ecc.); nella terza poi riferisce quella spiegazione, secondo cui il sole assorbe le acque del mare per distribuirle alle stelle, che risale, come abbiamo già accennato altrove, a Suetonio.

Ma lo scrittore cristiano si affretta a soggiungere che, quale delle tre spiegazioni sia la vera « hoc *soli Deo* cognitum est, cuius et opus mundus est, solique omnis mundi ratio nota est ». Questa facile rassegnazione all'ignoranza di cose difficili ad indagare, pressochè sconosciuta all'antichità, è un portato del Cristianesimo. Informandosi alla stessa tendenza, prima che Isidoro di Siviglia, S. Ireneo (II secolo)

(1) Sidonio Apollinare, *Carmen VII*, vv. 392-97. Cfr. *Carmen XXII*, vv. 105-10; Migne, *Patr. Lat.*, vol. LVIII. Cfr. questa vivace e veridica descrizione con l'accenno di Claudiano ricordato al capitolo precedente.

(2) Notizie assai più interessanti sarebbero contenute nello scritto *De ordine Creaturarum* (Cap. IX), ma l'autenticità di esso è per molti più che dubbia. Ciò che ivi si dice della marea mostra una spiccata provenienza nordica — perchè vi è l'accenno a cognizioni che son patrimonio dei Normanni e dei Germani — e si lascia assai bene porre accanto alle notizie date da Beda. Perciò di questo scritto attribuito a Isidoro sarà fatto parola al principio del prossimo capitolo. Sulla questione dell'autenticità, vedi, nell'edizione di Isidoro del Migne (Patrol. Lat., vol. LXXI e segg.) la *Isidoriana* di Francesco Aréval (capp. XXIII e LXXXIII), che cerca in vario modo di difenderla.

(3) Isidoro, *Etimologie*, lib. XIII, cap. 18. Le notizie sono probabilmente attinte a Suetonio. Lasciando da parte le definizioni e le etimologie, è certo che non solo *aestus*, ma anche *fretum* è usata nel Medio Evo ad indicare la marea, e quest'ultima voce, accanto ad *aestuarium*, anche il luogo ove la marea è più violenta. Accanto a questi vocaboli si trovano più tardi i due d'origine germanica *Malina* e *Ledona* (Ledon, Ledo), come diremo nel capitolo seguente.

(4) *De Natura Rerum*, cap. 40.

(5) *De Natura Rerum*, cap. 19.

aveva scritto: « Che possiam dir noi del flusso e riflusso del mare, sebben si sappia che una causa certa deve esserci?» [1]; Diogene Laerzio (III secolo) aveva posto la marea tra le cose inspiegabili [2] e del pari Ausonio (IV secolo) per esprimere una cosa difficile a conoscersi diceva: « quot horis pelagus fluit aut refluit » [3]. E dopo Isidoro altri troveremo che ricorrono al comodo espediente di attribuire alla marea, come ad altri fenomeni poco compresi, origine e carattere divino, rinchiudendosi nella meschina esclamazione: « Dio solo lo sa! ». Il venir meno della curiosità e dello spirito d'indagine, l'indifferente acquietarsi nell'ignoranza delle cose, è caratteristica e indice dei periodi di decadenza.

VII.

Le conoscenze dei Normanni e dei Germani.

(VII-XIII secolo).

Ad illuminare alquanto il periodo di oscurità che succede in Europa al fiorire dell'epoca patristica, chiusa col VII secolo, viene nei secoli seguenti uno sprazzo di luce che emana dal settentrione europeo, dai paesi dei Normanni e dei Germani. Per opera di questi si avvantaggiò anche la scienza geografica e forse soprattutto le conoscenze relative al mare, in causa di quello spirito marinaro che dominò sempre specie fra i Normanni e li condusse in traccia di spiagge sconosciute [4].

Sui mari che bagnano le coste dell'Inghilterra e della Francia settentrionale fino all'Jutland il fenomeno della marea si presenta, come ognun sa, particolarmente cospicuo, e noi abbiamo veduto che già nell'antichità a partire dai tempi di Cesare, esso non mancò di essere notato da quanti visitavano quelle regioni. Per gli abitanti stessi di quelle spiagge il fenomeno acquista poi un'importanza tale da non potersi in nessun modo trascurare; non è a meravigliarsi perciò se noi troveremo non solo frequenti ed esatte menzioni e descrizioni di esso (delle quali noi rileveremo soltanto le più importanti), ma anche tentativi replicati e diversi di spiegazioni [5].

(1) Ireneo, *Contra Haereses*, lib. II, cap. 28; Migne. *Patr. Gr.*, vol. VII, col. 805.

(2) Diogene Laerzio, VII, § 123.

(3) Ausonio, *Epist. XVII ad Ursulum*, v. 12 in: Migne, *Patr. Lat.*, vol. XIX.

(4) Cfr. Thoroddsen, *Gesch. der isländischen Geographie* (trad. ted. di A. Gebhardt), Lipsia, 1897-98, vol. I, pag. 33.

(5) Non possiamo qui trattenerci troppo a lungo sulle parole usate in questo tempo per indicare il fenomeno della marea. Si consultino perciò anzitutto i Vocabolarî del tempo, come il *Vocabularium* di Papias (XI secolo) alle voci *aestus, fretum, eurypus, ledona, malina*, e il *Catholicon* di Joannes de Janua (XIII secolo) alle voci *fretum, ledo*. Notevoli sono i vocaboli di origine germanica *ledona* (*ledo, ledon, lidona, leduna, letuna*) e *malina*, di incerta etimologia e di uso frequentissimo a partire dal V o VI secolo (*malina* per la prima volta in Marcello Empirico, *De Medicamentis* XXXVI, 49. Lipsia, Teubner 1889, pag. 375). Essi non equivalgono peraltro — almeno di solito — ai nostri « flusso » e « riflusso » ma indicano invece i fenomeni più cospicui delle sizigie e delle quadrature che gli Inglesi chiamano oggi Springtides e Neaptides, e i Tedeschi Springflut e Nippflut; cfr. Du Cange, *Glossarium Mediae et Infimae latinitatis* ai vocaboli corri-

Noi possiamo seguire fino ad un certo punto i progressi delle osservazioni. Presso un monaco di nome Agostino probabilmente anglo. che scrisse verso la fine del VII secolo un'operetta *De mirabilibus sacrae scripturae* (¹), si trovano già alcune osservazioni interessanti. Oltre al periodo semidiurno della marea gli son noti i flussi e riflussi più ingenti delle sizigie a cui dà il nome di *maline* e quelli minori delle quadrature o *ledone.* Le maline dunque, o maree delle sizigie, che mostrano una speciale *concordia* con la luna, cominciano tre giorni e mezzo innanzi al novilunio o plenilunio e durano fino a tre giorni e mezzo dopo; durante le maline il mare cresce per cinque ore e cala per sette — il che significa che, secondo il nostro autore, il flusso si verifica con maggior rapidità che il riflusso, o in altre parole il tempo interposto fra la bassa e l'alta marea è minore del tempo che trascorre fra l'alta e la bassa marea — mentre durante le ledone le due fasi hanno uguale durata. Gli anni ordinarî hanno in tutto 24 maline; quelle degli equinozî, al pari di quelle dei solstizî, sono più cospicue delle altre. Tali le osservazioni riferiteci dallo scrittore, parte esatte, parte più o meno lontane dal vero; ma le cause del fenomeno gli sono ignote, anzi egli afferma che la ragione di questa regolare e periodica alternativa sfugge alla nostra mente (²).

Maggiori notizie leggiamo presso Beda, vissuto fra il 675 e il 735 (³). Egli conosce ciò che della marea hanno scritto S. Ambrogio e S. Basilio — che cita fedelmente in latino — e si serve anche largamente di Plinio (⁴), ma la sua esposizione contiene pure alcune novità. Ammirabile è, secondo egli si esprime, la concordanza dell'Oceano col corso della luna (⁵) che produce i flussi e riflussi diurni. La luna ritarda ogni giorno di circa $^4/_5$ di ora, ossia 48′ sul giorno precedente, nel momento del sorgere e del tramontare (⁶), per cui ogni due mesi lunari, pari a 59 giorni, essa fa solo 57 volte il giro della terra; del pari, in due mesi lunari si hanno 2×57 ossia 114 flussi e altrettanti riflussi, ossia 684 in un intero anno lunare.

Anch'egli usa nel medesimo senso del monaco Agostino le voci *malina* e *ledon* e riferisce pure che le maline crescono per cinque ore, calano per sette; afferma poi

---

spondenti. La voce inglese *Tide* « dapprima significò una divisione, una porzione di tempo [radice *da* = dividere], poi specialmente quella porzione di tempo che interviene fra il flusso e riflusso del mare; finalmente fu applicata al flusso e riflusso stesso ». (Garlanda: *Filosofia delle parole*, Roma, 1890, pag. 179): ad essa corrisponde la parola tedesca *Gezeite*. Quanto ai vocaboli *Flut* e *Ebbe*, usati anche oggi comunemente in Germania (inglese: flood, ebb), il primo deriva da una radice assai nota e comune alle lingue neolatine; sull'etimo del secondo v. Grimm, *Gramm. Germ.*, tomo III, pag. 384.

(¹) Presso Migne, *Patr. Lat.*, vol. XXXV, col. 2148 e segg.

(²) « Quemadmodum hanc inundationem unde veniat aut quo recedit, nescimus » *De Mirab. Sacr. Script..*, lib. I, cap. 7.

(³) Beda, *De Temporum Ratione*, capp. 18-19 e *De Natura Rerum*, cap. 39 in Migne, *Patrol. Lat.* vol. XC. Su di lui: K. Werner, *Beda der Ehrwürdige und seine Zeit*, Vienna, 1875; Kretschmer, op. cit., pag. 114; Beazley, op. cit., vol. I, pagg. 370-72.

(⁴) Il fatto che Beda si serva di Plinio, che fra gli scrittori antichi aveva dato le più esatte notizie sulla marea, è già di per se stesso degno di attenzione.

(⁵) « Maxime autem prae omnibus admiranda tanta oceani cum lunae cursu societas ». *De temporum rat.*, 19.

(⁶) Il ritardo reale importa 50′ 28″ 20‴; la cifra di Beda è quindi assai prossima al vero.

che, nell'andamento regolare, le maline cominciano sempre il 13 e il 28 d'ogni mese, durando sette dì e mezzo, per cui le ledone si hanno il 20 e il 5 d'ogni mese. Ma questa successione regolare è spesso interamente turbata dal soffiar dei venti o da qualsiasi altra ragione, particolarmente sulle coste britanniche; turbamenti che si osservano non solo nelle ore dei massimi flussi e riflussi, ma anche nell'intervallo fra essi. Onde è falsa l'opinione da alcuni sostenuta che questo immenso movimento dell'Oceano abbia le stesse fasi contemporaneamente su tutte le spiagge; chè anzi, non solo da lido a lido, egli dice, ma « in una medesima spiaggia quelli che abitano a settentrione di me, veggono la marea crescere e decrescere molto prima di me, quelli che stanno a mezzogiorno, molto più tardi » (¹). Osservazioni di simil genere e così chiaramente affermate non le abbiamo mai trovate — importa notarlo — nell'antichità; ma ben poteva farle lo scrittore britanno, spettatore quotidiano delle regolari e forti maree della Manica e del Mare del Nord!

Il rimanente delle notizie di Beda è tolto di peso da Plinio: così l'osservazione che i flussi sono massimi all'equinozio e minimi al solstizio, e quella relativa all'influenza della distanza e posizione della luna (²); lo stesso si dica del ciclo ottennale della marea. Anche sulla natura dell'influenza lunare, Beda non sa dire altro di meglio che ripetere quasi testualmente l'opinione di Basilio (³) che a sua volta differisce poco dalla pliniana.

All'esposizione delle notizie riferiteci da Beda facciamo seguire un brevissimo cenno di ciò che si legge nello scritto *De ordine creaturam* attribuito a S. Isidoro, ma presumibilmente spurio e di epoca posteriore. Anche qui si nota che durante le maline il flusso dura cinque ore e il riflusso sette e si danno notizie circa l'epoca in cui si hanno ogni mese le maline e le ledone; si aggiunge che ogni anno si verificano 24 maline (26 negli embolismi) e che le maline così degli equinozi come dei solstizi sono più cospicue delle altre (⁴).

L'importanza di Beda sta principalmente nell'aver egli conoscenza personale del fenomeno di cui scrive, carattere questo comune dal più al meno a tutti gli scrittori nativi d'Inghilterra e delle coste oceaniche della Francia e della Germania, dove la marea dà luogo anche a molti altri fenomeni derivati che attirano facilmente l'attenzione (⁵). E a dimostrare quanto frequenti fossero presso gli abitanti di quelle regioni le osservazioni sul flusso e riflusso, nulla gioverà meglio che una scorsa attraverso scrittori che, non occupandosi di proposito di scienza, ne fanno menzione solo

(¹) *De temp. rat.*, loc. cit.

(²) Il passo di Plinio è copiato quasi *ad literam*: « Semperque luna Aquilonia et a terris longius recedente mitiores quam in Austro digressa propiore nisu vim suam exercet, aestus adfluere, naturalis ratio cogit ». Cf. Plinio, II, cap. 97.

(³) « Tamquam lunae quibusdam aspirationibus invitus protrahatur et iterum eiusdem vi cessante in mensuram propriam refundatur ». Cfr. indietro, pagg. 419-20.

(⁴) *De ordine creaturarum*, Cap. IX in Migne, Patrol. Lat., vol. LXXXIII, coll. 936-37.

(⁵) Un passo della Vita di S. Cutberto, scritta dal medesimo Beda, ci parla, ad esempio, della vicenda cui è soggetta l'isola Lindisfarne (Holy Island, sulle coste del Northumberland), che durante il riflusso è unita al continente, restando all'asciutto lo stretto interposto: (Beda, *Vita S^cti Cutberti*, cap. 6; presso Migne, *Patr. lat.*, vol. XCIV). Cfr. su un fenomeno analogo il passo già citato di Diodoro, V, 22 che risale indirettamente a Pitea.

occasionalmente, come di cosa che richiama l'attenzione anche del pubblico comune, cui sono rivolti, per esempio, gli scritti di storici e di cronisti ([1]).

Fra questi c'imbattiamo per primo in Paolo Diacono (circa 720-78), il famoso autore della *Historia Langobardorum*, presso il quale troviamo una spiegazione tutta nuova della marea. Nel capitolo VI del libro I l'autore narra che ad occidente del litorale norvegese, là dove l'Oceano si estende senza fine, vi è una profondissima voragine che suol chiamarsi l'umbilico del mare. « Quae *bis in die* fluctus absorbere et rursum revomere dicitur, sicut *per universa illa litora accedentibus ac recedentibus fluctibus* celeritate nimia fieri comprobatur ». Questa voragine che lo scrittore paragona alla Cariddi virgiliana (*Aen.* III, vv. 420-23) attrae con straordinaria rapidità le navi che vi si approssimano e spesso le inghiotte, sebbene talora, a quanto si dice, quando le navi sono lì lì per sommergersi, vengano nuovamente respinte dal flutto eruttante dal gorgo con celerità pari a quella con cui prima erano corse a perdizione. È probabile che queste indicazioni, che ritroveremo anche più tardi, si riferiscano al celebre gorgo detto Maelstrom presso le isole Lofoten, prodotto, analogamente ai gorghi dello stretto di Messina, dall'incontro di correnti opposte in un braccio di mare angusto e basso; ma l'importante è che Paolo Diacono, il quale evidentemente riporta una credenza nordica, vede in questo gorgo l'origine e insieme la causa del flusso e riflusso. Noi citeremo più avanti altri passi di scrittori dai quali tale credenza curiosa ed interessante risulterà chiara e i quali mostreranno anche una elaborazione di questa diffusa opinione; vediamo per ora quanto scrive ulteriormente il nostro autore. « Affirmant esse et aliam huiusmodi voraginem inter Britanniam insulam Galliciamque provinciam, cui etiam rei adstipulantur Sequanicae Aquitaniaeque litora, quae bis in die tam subitis inundationibus opplentur, ut qui fortasse aliquantulum introrsus a litore repertus fuerit, evadere vix possit. Videas earum regionum flumina fontem versus cursu velocissimo relabi ac per multorum milium spatia dulces fluminum limphas in amaritudinem verti ». Di questa voragine odono continuamente il rumore gli abitanti dell'isola Evodia, che si può identificare con una delle isole Anglo-Normanne, probabilmente Alderney. L'autore narra ancora la storia di un nobile Gallo miracolosamente sfuggito a questa voragine. Ma ciò non è tutto. « Nostrum quoque idest Adriaticum mare — seguita l'autore — quod, licet minus, similiter tamen Venetiarum Histriaeque litora pervadit, credibile est parvos huiusmodi occultosque habere meatus, quibus et recedentes aquae sorbeantur et rursum invasurae litora revomantur » ([2]).

([1]) Prima di passare a questi, ricordiamo altri due cosmografi assai noti, che peraltro nulla di nuovo ci apprendono sul fenomeno che ci occupa. L'uno è Rabano Mauro di Magonza, fiorito nella prima metà del IX secolo, il quale altro non sa dire che l'Oceano « alternis aestibus accedit atque recedit », e la marea « respirantibus in profundum ventibus aut removet maria aut resorbet » ripetendo poi identicamente quanto dice S. Isidoro nelle sue *Etimologiae* (Rabano Mauro, *De Universo*, lib. XI, capp. 3 e 7 presso Migne, *Patr. lat.*, vol. CXI). L'altro è il monaco irlandese Dicuil, contemporaneo all'incirca di Rabano, autore del libro: *De mensura orbis terrae*, il quale non ha conoscenza alcuna della marea, e solo ripete a proposito della Britannia, la esagerata misura del flusso fatta da Pitea e riferita da Plinio (*De mens. orbis terrae*, cap. VIII, § 6, ediz. Letronne, Paris, 1814).

([2]) Mi servo dell'edizione di Paolo che è nei *Monum. Germ. Histor.* Hannover, 1878; lib. I, cap. 6.

La spiegazione acquista dunque un carattere generale; partendo dal dato di fatto che nell'Atlantico settentrionale e nella Manica esistono due voragini che sono causa, secondo Paolo, del flusso e riflusso su quelle coste, egli giunge alla conclusione che anche nell'Adriatico, dove pur si verifica, sebbene in minori proporzioni, la marea, debbano esistere aperture sottomarine che funzionano in modo analogo, soltanto che, per essere più piccole, non provocano alla superficie gorghi pericolosi. Così ridotta, questa spiegazione ci richiama in qualche modo alla mente quella riferita da Solino, che pure ha per fondamento l'esistenza di pertugi, caverne o voragini sottomarine; se non che Solino fa entrare ed uscire da queste aperture vapori che gonfiano o no il mare; secondo il concetto di Paolo invece, le acque stesse del mare entrano in queste cavità e ne escono regolarmente due volte al giorno, senza una causa apparente (1).

È lecito peraltro domandarci a chi Paolo Diacono, nato e vissuto in Italia, attingesse le notizie relative alle due voragini dell'Oceano settentrionale. Il Jacobi (2), ammettendo, come è ragionevole, che la storia del nobile Gallo, che l'autore dice d'aver udita raccontare egli stesso, e le osservazioni relative all'Adriatico sieno racconto originale dello storico, non sa però dire la fonte dei brani relativi alle due voragini, pei quali non può affermarsi altrettanto. Ora in una vita anonima di S. Condedo, monaco di Fontanelle, morto il 685, si trova un capitolo in cui si leggono periodi identici a quelli di Paolo, mostrando così una relazione evidente fra i due scritti (3). Sventuratamente non è possibile determinare con sicurezza quando questa vita sia stata scritta, sebbene risulti probabile che fosse compilata dopo il 730, ma forse in base ad una vita più antica (4); perciò usciremmo dai limiti di questo lavoro se volessimo determinare se Paolo Diacono abbia attinto alla vita del Santo o viceversa. Citiamo senz'altro il brano. Lo scrittore narra come S. Condedo si ritirasse nell'isola Belcinnaca (oggi: Bersignac) che sta in mezzo alla Senna (undique ambiebatur fluvio Sequanae). « Hanc (insulam) unda marina tempore Malinae ac Lidonis ter per revolutionem diei ac noctis undique ambiendo invisere non negligit; quae tanto sui vigoris impetu agitatur, ut ultra hanc insulam ad orientalem plagam sexaginta millibus et amplius per lympham Sequanae retrorsum incedens, usque ad locum qui dicitur Pistas accedat, cum a mari usque ad hanc insulam lymphaticum

(1) Ad illustrazione di questa interessante spiegazione tanto diffusa fra i popoli del Nord, è opportuno osservare che la credenza in abissi o voragini aperte nel fondo del mare, dalle quali l'acqua veniva assorbita per ricomparire poi in terra a dar origine ai fiumi, è universale nel Medio Evo e si continua fino al Settecento: con essa è collegata la spiegazione più comune dell'origine delle sorgenti. Vedi su ciò il magnifico studio del Wisotzki, *Die Quellen* in Zeitströmungen in der Geographie, I, Lipsia, 1897. Anche la credenza che tali voragini esistessero al disotto del Maelström e dei gorghi di Cariddi e altre ve ne fossero, specialmente nei mari artici, ma anche altrove, è comunissima anche in tempi posteriori. Basta per persuadersene leggere alcuni capitoli del *Mundus Subterraneus* del Kircher (vol. I, lib. III).

(2) Jacobi, *Die Quellen der Langobardengeschichte des P. D.* Halle, 1877.

(3) La vita di S. Condedo è negli *Acta Sanctorum* (Bolland.), Ottobre, vol. IX, pag. 356. Nel brano citato in seguito sono scritti in corsivo i periodi che ricorrono identicamente o quasi, in Paolo.

(4) Cfr. quanto scrive su ciò l'editore stesso negli *Acta Sanctorum*.

iter 30 fere milibus aestimetur. Sicque hoc rheuma, quod de umbilico sive charibde maris egreditur, *bis in die fluctus absorbet et rursum revomit sicut per universa* Sequanae *litora accedentibus ac recedentibus fluctibus celeritate nimia fieri comprobatur. Quae tam subitis inundationibus supplentur ut qui forte aliquantulum introrsus a litore repertus fuerit, evadere vix possit.* Videtur enim fluvius *cursu velocissimo sursum *versus relabi* et in modum procerissimarum arborum in altitudinem cum maximo rugitu subrigi, *ac per multorum milium spacia fluminis limphus in amaritudinem verti.* Haec de rheumate et situ loci, ac inundatione fluminis dicta sunt ».

Lasciamo ora, solo per il momento, questa spiegazione per continuare la nostra corsa attraverso scrittori di vario genere, a fine di far vedere quanto l'osservazione della marea rientrasse, pei popoli del Nord, fra i fatti della vita comune.

In una vita di S. Ermenlando, dell'VIII secolo, si legge che questo Santo, a somiglianza di S. Condedo su ricordato, si ritira in un'isola delle coste francesi occidentali. Quest'isola « in medio Ligeris sita... oceani maris ab occidente bis per singulos menses eructantes despicit malinas. Quae malinae reliquas insulas in Oriente Occidenteque et Aquilone sitas, aliquoties ad momentum operiunt, solam in Meridie hanc sitam verentes insulam propter sublimitatem sui montis » ([1]).

Un Willibald, autore di una vita di S. Bonifacio (IX secolo) ci narra che, volendosi costruire una chiesa sul luogo dov'era stato sparso il sangue del Santo martire (nella Frisia, presso i villaggi di Oster- e Westergo) si dovette prima elevare una specie di collina artificiale sulla quale poi si alzò la chiesa, e ciò « propter immensas ledonis ac malinae irruptiones, quae, diverso inter se ordine, maris aestum oceanique recursum sed et aquarum diminutiones infusionesque commovent » ([2]).

Un codice latino della Biblioteca Nazionale di Parigi, della fine del IX o principio del X secolo, che contiene, fra argomenti al tutto estranei, poche righe sulla marea, sventuratamente in pessimo stato e in parte illeggibili, ci apprende alcune cose molto curiose che mostrano come l'osservazione del fenomeno fornisse delle norme per la vita pratica. Vi si legge che durante la ledona (dal 3 all'11 e dal 18 al 25 del mese) è opportuno tagliare il legname, fare il dissodamento del terreno (exartus), fabbricare le candele; durante la malina (dall'11 al 18 e dal 25 al 3 del mese successivo) si lavoreranno le vigne, si pianteranno le messi, si seccherà il fieno ([3]).

([1]) *Acta Sanctorum* (Bolland.), marzo, vol. III, pag. 579. Con questa vita di S. Ermenlando ha in comune alcuni passi relativi a particolarità geografiche delle coste francesi, anche la vita di S. Condedo su citata. Non sarebbe perciò fuor di luogo il sospetto che questi brani delle due vite e quello di Paolo Diacono risalissero ad una fonte comune.

([2]) Willibaldus, *Vita Sancti Bonifacii* in Monum. Germ. Histor., ediz. Pertz., vol. II, pag. 351.

([3]) Questo codice, citato dal Du Cange nel *Lex Med. et Inf. latin.*, in fondo alla voce ledo col n. 1121, corrisponde al ms. della Biblioteca nazionale di Parigi, n. 4627 fondo latino. Il professore Paolo Tannéry, immaturatamente rapito agli studi or son pochi mesi, con squisita gentilezza, volle eseguire delle ricerche per rintracciare questo codice e si occupò di ristabilire, coll'aiuto del dott. Omont, conservatore del dipartimento dei manoscritti, la lezione delle poche righe leggibili di esso, contenute nel fol. 1° verso. Mi è grato di render qui al compianto Professore l'attestato della mia viva gratitudine.

Dei violenti flussi e riflussi nella baia di S. Michele in Francia, famosa a questo riguardo, fa menzione Glaber Rudolphus, alla metà del secolo XI, ricordando come ivi si vegga chiaramente la corrispondenza col corso della luna (1).

E anche nella Storia della Chiesa amburghese di Adamo da Brema (1040-1080 circa), troviamo un passo che c'interessa e che si collega anzi direttamente con quanto abbiamo riportato da Paolo Diacono. E noto che Adamo ha un posto anche fra i geografi del secolo XI per il quarto libro di quella Storia che contiene una descrizione dei paesi settentrionali, onde il Günther non esitò a dirlo il primo geografo tedesco (2).

È appunto in questo libro quarto ch'ei narra il viaggio di alcuni nobili Frisoni verso l'ignoto settentrione, al tempo del vescovo Alebrand (1035-1045). Spintisi oltre la Danimarca e ad occidente della Norvegia, essi erano giunti alla ghiacciata Islanda, e di là, solcando poi i mari « in ultimum septentrionis axem » lasciate alle spalle tutte le spiagge conosciute, erano stati avvolti in tenebrosa caligine. « Et ecce instabilis oceani euripus, *ad initia quaedam fontis sui archana recurrens*, infelices nautas iam desperatos, immo de morte sola cogitantes, vehementissimo impetu traxit ad chaos. Hanc dicunt esse voraginem abyssi, illud profundum in quo *fama est omnes recursus maris qui decrescere videntur, absorberi et denuo revomi*, quod fluctuatio crescens dici solet. Tunc illis solam Dei misericordiam implorantibus ut animas eorum susciperet, impetus ille recurrens pelagi quosdam sociorum naves abripuit, ceteras autem revomens excursio longe ab alteris post terga reppulit » (3). Questo passo si lascia benissimo porre accanto a quello di Diacono di cui sembra quasi un commento; noi non cercheremo neppur qui a quale dei gorghi pericolosi dell'Atlantico settentrionale o del mare Artico si riferisca il racconto certo in parte veridico, di Adamo, bastandoci di notare col Weinhold (4) che anche le persone più colte di quel tempo e i naviganti stessi s'immaginavano la marea prodotta da un gorgo ingoiante e riversante le acque volta a volta; poichè, sebbene più oltre Adamo stesso dica ignorarsi l'origine della marea e citi le opinioni diverse di Lucano, Macrobio e Beda, terminando con un'esclamazione biblica, nondimeno è chiaro che la credenza da lui precedentemente riferita era diffusa allora e trovava applicazione a tutte le spiagge del Settentrione presso le quali simili gorghi non sono rari.

Anche Onorio di Augsburg o di Autun, morto verso la metà del secolo XII, che nella sua *Imago Mundi* (5) parla brevemente della marea ponendola in relazione con la luna, dicendo cioè che la marea cresce e decresce con la luna, ed è maggiore

(1) Glaber Rudolphus, *Historiarum*, lib. III, cap. 3 in: Recueil des Historiens des Gaules et de la France, tomo 10.

(2) Günther, *Adam von Bremen, der erste deutsche Geograph*. Sitzungber. der königl. böhm. Gesellsch. der Wissensch, 1894. Cfr. anche, su Adamo: A. Bernard, *De Adamo Bremensi Geographo*. Paris, 1898, e Beazley, op. cit., vol. II, pagg. 514-48.

(3) *Hist. Hamburg. Ecclesiae*, lib. IV, cap. 39, in Monum. Germ. Histor. (Pertz), vol. VII.

(4) Weinhold, *Die Polargegenden Europas nach den Vorstellungen des deutschen Mittelalters*. Sitzungber. der kaiserl. Akad. der Wissensch. Vienna, 1871, pagg. 794-96.

(5) *Imago Mundi*, cap. XL; Migne, *Patr. Lat.*, vol. CLXXII.

agli equinozî che ai solstizî [1], consacra poi un altro capitolo speciale alla voragine che si trova nell'Oceano e che « *in exortu lunae* maiori aestu fluctus involvit et revomet ». A questa voragine si riferisce, secondo l'autore, il versetto del Genesi « Rupti sunt omnes fontes abyssi magnae etc. ». [2]. « Et iuxta hanc (voraginem) — seguita egli — sunt cavernosa loca et speluncae late patentes. In his venti de spiramine aquarum concipiuntur, qui et spiritus procellarum dicuntur. Et hi suo spiramine aquas maris per patentes terrarum cavernas, in abyssos abstrahunt et eas exundantes iterum magno impetu repellunt » [3].

In Onorio dunque un elemento nuovo, il vento, complica la spiegazione che così si avvicina ancora di più a quella di Solino; ma il fondamento resta pur sempre la esistenza, nel lontano Oceano, di una voragine che assorbe e rivomita le acque; ed è curioso e significante che a questa voragine l'autore applichi anche il nome greco di *ampōtis*, affine pel significato originario al latino *vorago*, ma che vuol dir solo riflusso o in genere marea. Dalla frase « in exortu lunae etc. » potrebbe rilevarsi poi che, secondo l'opinione di Onorio, sull'andamento di questa voragine avesse un'influenza anche la luna, la quale quindi non sarebbe esclusa da questa spiegazione; in una ulteriore elaborazione di essa noi troveremo infatti la luna chiaramente associata all'azione della misteriosa voragine, in accordo colle osservazioni dei marinai e dei rivieraschi, le quali non potevano non dimostrare all'evidenza una correlazione colla luna; del che avremo pure tra poco una conferma.

Ma, volendo seguire, per quanto si può, l'ordine cronologico, lasciamo ora questa spiegazione della marea, alla quale ritorneremo, per considerarne un'altra, diversa da quelle ricordate in questo capitolo e dovuta a Guglielmo di Conches (circa 1080-1150).

Scolaro del famoso Bernardo di Chartres (morto tra il 1124 e il 1130) egli è uno degli scolastici platonizzanti del secolo XII, che mentre segue i Padri della Chiesa nelle questioni spirituali, se ne stacca senza scrupolo nelle naturali [4]. Per spiegare il fenomeno generale della marea, egli risuscita l'antica spiegazione, riferita da Macrobio, secondo la quale la zona torrida è circuita da una fascia oceanica equatoriale, che in ciascuna delle estremità, orientale ed occidentale, invia due bracci, i quali, seguendo *i lati della terra* si dirigono a Nord e a Sud; incontrandosi presso i poli il braccio orientale e occidentale, ne nasce quella « famosa accessio ac recessio maris quae fluxus dicitur » [5]. La marea dunque in questa spiegazione, che

[1] In questo breve capitolo nulla vi è di nuovo in Onorio, se non che egli sostituisce al ciclo ottennale di Plinio e di Beda, uno di 19 anni pel ritorno degli stessi fenomeni di flusso e riflusso. Esso è il noto ciclo lunare di Metone corrispondente a 235 lunazioni circa.

[2] Genesi VII, 11. Non ho capito per che via possa l'autore richiamarsi a questo versetto che si riferisce, come è noto, al diluvio universale.

[3] Op. cit., cap. XLI. Questo capitolo, che segue immediatamente quello in cui si parla della marea, è evidentemente come un'integrazione di quello.

[4] Vedi su di lui gli scritti del Werner: *Ueber die christlichen Platoniker des XII Jahrhunderts* in Sitzungber. der kais. Akad. der Wissensch. Vienna, vol. 74; e specialmente: *Kosmologie und Naturlehre des scholastischen Mittelalters* in Sitzungber etc., vol. 75, pagg. 366-70.

[5] Guglielmo di Conches, *De Philosophia Mundi*, lib. III, cap. 14; Migne, *Patrol. Latina*, vol. CLXXII. Lo stesso si legge in un commento inedito del medesimo autore al *De consolat.*

isolata riappare in questo tempo, è collegata colla circolazione generale dell'Oceano, colla quale è in relazione, secondo l'autore, anche l'origine dei venti. Perocchè dal separarsi delle acque nella corona oceanica equatoriale, come pure dall'incontrarsi delle due opposte correnti a Nord e a Sud, nascono quelle perturbazioni atmosferiche che producono i venti: p. es. i due bracci orientali, separandosi, dànno origine al vento Euro, come un braccio orientale, incontrandosi coll'occidentale al polo nord, genera il Borea, e così via [1].

Ma l'autore — e questo è notevole — non disconosce un'influenza lunare sulle acque, anzi la richiede per dare la spiegazione del periodo mensile, la quale manca in Macrobio. Questa spiegazione è peraltro assai curiosa. Durante il novilunio vi sono maree forti perchè, essendo la parte della luna che è rivolta alla terra, del tutto oscura, l'aria non è riscaldata e perciò si condensa mutandosi in acqua, per cui le acque sono più copiose; ma nei primi sette giorni la luna crescente riscalda via via l'aria assorbendone l'umidità, e il mare cala fino al primo quarto; più tardi la luna, illuminata ormai in più della metà del suo disco, comincia ad esser capace perfino di riscaldare l'acqua marina, che perciò si eleva come l'acqua riscaldata in una pentola, e così fino al plenilunio; nella terza settimana, diminuendo questo calore lunare, cala anche l'acqua, finchè dopo l'ultimo quarto l'aria raffreddata torna di nuovo a condensarsi, inturgidando il mare e dando perciò luogo a forti maree [2]. Questa spiegazione dei fenomeni mensili prescinde assolutamente da un'influenza del sole — che sembra sconosciuta a Guglielmo di Conches — e, per quanto complessa in apparenza, è in realtà assai rozza [3]. Nell'insieme le idee dell'autore, che ci appaiono tra le più elaborate di questo periodo, sono degne di nota perchè, malgrado che secondo esso la causa generale del fenomeno sia indipendente dalla luna, esse ci mostrano pure che l'opinione dell'influenza lunare doveva esser molto radicata, perchè Guglielmo non può distaccarsene interamente e ne profitta per spiegare un fatto particolare [4].

Allo stesso indirizzo filosofico appartiene Bernhard de Tours (Bernardus Silvester), contemporaneo all'incirca di Guglielmo di Conches, il quale vede nella luna, non solo la regolatrice del flusso e riflusso, ma anche del crescere e decrescere di molte sostanze terrestri, su cui esercita la sua potenza [5]; e a lui si appella, ci-

---

philos. di Boezio pubblicato da Ch. Jourdain in Notices et Extraits des Manuscripts de la Bibliothèque Royale etc., vol. XX (parte occid.), pagg. 44-45. Cfr. Macrobio, *Somm. Scip.*, II, 9.

[1] Gugl. di Conches, op. cit., lib. III, cap. 15.

[2] Gugl. di Conches, op. cit., lib. III, cap. 21.

[3] Si osservi che l'autore, trovando la ragione delle forti maree del novilunio nell'aria che, raffreddata, si muta in acqua, sembra supporre che l'alzarsi delle acque nella marea sia dovuto ad *un vero aumento della massa delle acque*, concetto addirittura primitivo. Noi ritorneremo su questo argomento a proposito di un'idea analoga riferita dall'arabo Ma'sûdî.

[4] Guglielmo di Conches ricorda anche (Lib. III, cap. 14) un'altra spiegazione della marea, secondo cui essa sarebbe prodotta dall'urto dell'acqua contro montagne sottomarine, verso cui essa sarebbe sospinta e da cui sarebbe respinta con un movimento di altalena; ma l'autore stesso non mostra di annetter molta importanza a questa idea.

[5] Bernardi Silvestris, *De Mundi Universitate*. Innsbruck, 1876. Cfr. lib. I, § 3, vv. 141-42 (pag. 19); lib. II, § V, righe 214-18 (pag. 46) e lib. II, § VI, vv. 22-23 (pag. 47).

tandone due versi su questo argomento, Gervasio di Tilbury (morto il 1216) (1), che anch'egli accoppia l'influenza della luna sull'Oceano a quella sulle midolle degli alberi e degli animali. Ma egli aggiunge ulteriormente altre brevi notizie sulla marea, copiando alcuni periodi di Onorio.

Continuando la nostra scorsa attraverso ai numerosi autori del secolo XII, ci soffermiamo ora su alcuni altri scrittori, storici o cronisti, particolarmente inglesi.

Lo storico Guglielmo di Malmesbury, parlando della guerra fra Knut e Hetelred, fa menzione di una straordinaria marea, che nell'anno 979 sommerse i villaggi alla distanza di più miglia dal mare, uccidendo anche gli abitanti, senza che però ci dica in qual parte dell'Inghilterra si verificasse lo straordinario fenomeno (2). Esso ci apparirebbe del resto come una semplice inondazione, se lo scrittore non usasse per indicarlo il vocabolo *ledon* adoperato soltanto ad indicare i più cospicui fenomeni di flusso e riflusso.

Simeone di Dunelm, ricordando per incidenza nella sua Storia dei re angli il fiume Lindis, la cui foce è invasa dal mare durante i maggiori flussi (3), crede opportuno fare una digressione per citare alcuni brani di Beda ad illustrazione dell'importante fenomeno; e lo stesso fa Roger Hovedenus nell'identica occasione (4).

Saxo Gramaticus (circa 1140-1206) ricorda più volte nella sua nota *Storia della Danimarca* le inondazioni cui va soggetta la Frisia durante i maggiori flussi, e i ripari e le dighe costruite dagli abitanti a difesa dal mare (5).

Più lungamente discorre del fenomeno che c'interessa Giraud Le Barry (Giraldus Cambrensis) nella sua *Topographia Hiberniae* finita di scrivere verso il 1218. Ci dice anzi egli stesso che della marea si era occupato di proposito, sebben brevemente, in un libretto in versi intitolato *De philosophicis flasculis*, nel quale spiegava il diverso modo di comportarsi dell'Atlantico e del Mediterraneo e l'influenza della luna; ma sventuratamente di quest'opera non si ha più notizia (6). Siamo perciò ridotti alle sole notizie che ce ne dà nella Topografia, dove peraltro troviamo alcune novità. Notevole è in primo luogo la osservazione della diversità dei momenti in cui una stessa fase della marea si verifica nei diversi porti dell'Inghil-

(1) Gervasii Tilberiensis, *Otia Imperialia*, lib. I, cap. 5 e lib. II, cap. 13, in Script. Rer. Brunsvicensium, tomo I, Hannover, 1707.

(2) Willielmus Malmesburiensis, *De Gestis Regum Anglorum*, lib. I, cap. 10 in Rer. Anglic. Scriptores. (Francoforte 1601), pag. 71.

(3) Il Lindis è l'odierna Tweed, che gettandosi nel Mar del Nord, separa per breve tratto l'Inghilterra dalla Scozia. Poco a sud dalla sua foce presso l'isola Santa (Holy Island) il riflusso è così forte da riunire quest'isola al continente, come già ricorda Beda. Vedi indietro a pag. 425.

(4) Simeon Dunelmensis, *De Gestis Regum Anglorum* (an. 793) in Hist. Anglic. Scriptores, tomo X. Cfr. Roger Hovedenus, *Annalium*, pars I, in Rer. Anglic. Scriptores, pag. 405.

(5) Saxo Gramaticus, *Hist. Danica*, lib. VIII, § 437; lib. XIV, § 688 (Strassbug, 1886).

(6) « Rerum autem huiusmodi rationes, et quare potius sensibiliusque occidentalis oceanus quam medius et mediterraneus huiuscemodi fluxus et refluxus ordinata quadam et indeficiente vivacitate sibi appropriaverit, qualiterque humorum magistra luna disponente, haec omnia fiant, maioris est operae causas evolvere. In libello tamen quem *de philosophicis flasculis* metrice conscripsimus, dilucida brevitate sunt haec explanata ». Giraldi Cambrensis, *Topogr. Hiberniae*. Distinct. II, cap. 3, nel vol. V delle Opere. *Rerum Britannic. Medii Aevi Scriptores*. Londra, 1867.

terra e dell'Irlanda, osservazione che ora per la prima volta si trova espressa chiaramente. « Dubliniae portum — scrive l'autore — quoties medio refluxu retrogradis undis mare destituit, Britannicum Milverdiae (Milford)... medio influxu redeuntibus aquis iam restituit. Ulteriora vero Bristolli litora fugitivis undis ex toto nudata, tunc primo revertens aequor paulatim inserpit ». Più oltre: « Weisefordiae (Wexford) litora non hibernicos Dubliniae, sed britannicos Milverdiae fluxus imitantur. Et quod vehementius est admirandum, est rupis quaedam marina non procul ab Archelo, cuius cum ex uno latere aequor influit, ex altero refluit » (1).

Tali osservazioni, non difficili a farsi da uno che aveva lungamente percorso le isole britanniche, sono in complesso abbastanza vicine al vero. L'onda di marea che dall'Oceano Atlantico si insinua, pel canale di S. Giorgio, nel mare d'Irlanda, raggiunge quasi contemporaneamente Milford, sulla costa occidentale dell'Inghilterra e Wexford alquanto più a Nord sull'opposta costa dell'Irlanda, mentre impiega ancora più di altre cinque ore per arrivare fino a Dublino.

Queste indicazioni mostrano nel nostro autore una conoscenza assai esatta del periodo semidiurno della marea; anche il periodo semimensile è da lui accennato sebbene poco chiaramente e accuratamente. Ma importante è poi la sua opinione rispetto alle cause della marea che possiamo all'incirca ricostruire dai pochi accenni della Topografia. Dopo aver detto che del fenomeno rendeva ragione in quel libretto *De philosophicis flasculis* oggi perduto, egli soggiunge: « Ut autem ad evidentiorem tantae diversitatis indaginem, lectoris intentio paucis impellatur, quatuor haec diligentius advertantur; tam fluminum quam fontium incidentium et mare quodammodo moventium et vivificantium, semper circa terrarum extrema longe copia maior; *ex quatuor oppositis et remotissimis oceani partibus violenta quaedam maris attractio, absorptio vicissim et ebullitio*; cuiuslibet humoris tam diminutionis quam augmenti statim circa extremitates passio patens (2). Ad haec etiam quia liberiorem circa extrema et absque impedimento discursum, sive fluendo, sive refluendo oceanus habet; intra terras autem undique complexus et tamquam in stagni morem tantis obstaculis stare compulsus, libere vagari non permittitur » (3). Più avanti, parlando anch'egli della « miranda vorago » che nel mare settentrionale — non procul ab insulis ex parte boreali — ingoia le navi, e verso la quale accorron dalle più remote parti i flutti marini, per riversarvisi dentro, aggiunge più chiaramente: « Quatuor huiusmodi oceani voragines a quatuor oppositis mundi partibus philosophi describunt. Unde et tam marinos fluctus quam etiam aeolicos flatus causaliter provenire *nonnulli coniectant* » (4). Da questi passi appare chiaro dunque che Giraud Le Barry ci presenta una elaborazione dell'ipotesi, già trovata in Paolo Diacono, ed in altri. La marea è dovuta ancora a voragini che, nel remoto Oceano, assorbono e rigettano a vicenda le acque, ma queste voragini non sono più in numero indefinito e distribuite casualmente, bensì sono quattro e poste alle quattro estremità della terra, cioè probabilmente una circa al polo nord, un'altra corrispondente al polo sud, e altre

(1) *Topographia Hiberniae*, loc. cit.

(2) Un'idea affine si ha in Plinio, *Hist. Natur.*, lib. II, § 218.

(3) Giraldi Cambr., op. cit., Distinctio II, cap. 3.

(4) Giraldi Cambr., op. cit., Distinctio II, cap. 14.

due a due estremità opposte dell'equatore. In tal modo modificata questa idea, cessa di essere un'opinione vaga per presentarsi sotto la forma di una ipotesi studiata ed elaborata da qualche studioso (¹). Coll'azione di queste voragini viene infatti collegata anche l'origine dei venti e forse una circolazione oceanica all'incirca eguale a quella concepita da Guglielmo di Conches. Verso le estremità della terra, ossia in vicinanza di queste voragini, i fiumi che si versano in maggior copia, contribuirebbero ad avvivare la circolazione delle acque oceaniche; infine l'azione della marea si eserciterebbe più liberamente colà ove l'Oceano è aperto e profondo, secondo un'idea che troveremo altre volte ripetuta; e da ciò intuiamo quale doveva essere forse la spiegazione del diverso modo di comportarsi dell'Atlantico e del Mediterraneo che Giraldo esponeva nel *De philosophicis flasculis*.

Ma un'influenza della luna sull'andamento delle supposte voragini doveva essere pure nella mente dell'autore; egli infatti scrive: « Adeo quidem Phoebe totius humoris fontis est et fomentum, ut non tantum *aequoreas undas*, verum etiam in ipsis animantibus ossium medullas, capitum cerebra, arborum herbarumque succos, juxta sui vel incrementa vel detrimenta proportionaliter dirigat et disponat ». Qui Giraldo non fa che ripetere un'opinione divulgatissima; ma prima ha scritto: « Luna meridiem tenente, semper oceanus *ad occulta receptacula pedissequas revocans undas*, australia Britanniae litora prorsus evacuat » (²). Questa composizione di due idee o di due spiegazioni, già da noi ritrovata in Onorio, è da considerarsi come una necessaria conseguenza del voler porre in accordo le speculazioni naturali con i dati indiscutibili dell'esperienza. La concezione riferita da Giraud Le Barry ci presenta dunque nella sua forma ultima e più complessa quella opinione diffusa che abbiamo già seguito e studiato in Paolo Diacono, in Adamo da Brema e in Onorio.

Ma in altre opere del secolo XII inoltrato, troviamo invece fatta menzione soltanto dell'influenza lunare. Così nella *Kongs-skugg-sja* o Specchio del Re, una specie di enciclopedia scandinava scritta da un ecclesiastico sul finire del dodicesimo secolo, che dà alcune brevi ma interessanti notizie sull'andamento della marea in relazione al corso della luna e del sole, specialmente per ciò che riguarda il periodo mensile della marea: « Ad primam lunam fluxus maris incitatissimus est quam maxime a Terra recedente: Luna ad dimidium crescente, fluxus maris minimus et ad eum proportionatus est eiusdem recessus; in plenilunio fluxus maris iterum vehementissimus

(¹) La frase « nonnulli coniectant » su citata, dimostra che questa ipotesi non è di Giraud Le Barry stesso. L'esistenza di una gran voragine al polo artico, verso la quale tutte le acque confluivano, fu accettata anche molto più tardi; e tale voragine si trova disegnata, fra l'altro, anche nella tavola *Polo Artico* dell'Atlante di Mercator, il quale ne attribuisce, diremo così, l'invenzione ad un certo Minorita di Oxford del quale parlàva Jacobo Cnoxen o meglio Knoyen, oscuro cosmografo di Bois le Duc. Paolo Merula poi, che non crede affatto all'esistenza di tal voragine, riferisce, pigliandole in scherzo, le idee di questo Minorita e aggiunge che fra i seguaci di costui vi era Giraldus Cambrensis del quale riporta il brano su citato sulla voragine dell'Oceano boreale. (Paulli Merulae, *Cosmographia Generalis*, lib. III, cap. 9. Amstelodami apud Henr. Hondium, 1621, pag. 129). Chi fosse quel minorita non mi è riuscito di sapere, ma certo a lui non attinse il nostro Giraldo, checchè dica Paolo Merula, perchè al suo tempo i Minoriti non esistevano.

(²) Cfr. anche il passo citato in principio: « qualiterque *humorum magistra luna disponente* haec omnia fiant etc. ».

et recessus longissimus, et ubi ad dimidium increvit, mox fluxus et refluxus maris minimus » ([1]). Queste indicazioni sono assai probabilmente il risultato di osservazioni ripetutamente fatte dagli instancabili navigatori normanni.

Alessandro Neckam (1150-1227), nel breve accenno che fa alla marea nel suo libro *De naturis Rerum* ([2]), mantiene una posizione neutrale affermando che « d'onde derivi il flusso e riflusso del mare è una questione ancora non perfettamente risoluta ». Cita a questo proposito i versi di Lucano:

> Ventus ab extremo pelagus sic axe volutet
> Destituatque ferens; an *sidere* mota *secundo*
> Tethyos unda vagae lunaribus aestuet horis
> Flammiger an Titan ut alentes hauriat undas
> Erigat Oceanum fluctusque ad sidera ducat......

affermando però che si disputava se il *secundum sidus* del verso secondo, fosse la Luna o Mercurio, che è veramente il secondo pianeta nell'ordinamento delle sfere celesti allora accettato. Ma qui in realtà il Neckam non fa che servirsi di reminiscenze classiche, poichè certo i versi di Lucano non rappresentavano lo stato della questione al tempo suo. In seguito però l'autore accenna alla spiegazione di Guglielmo di Conches e anche a quella secondo cui le maree sarebbero prodotte dall'azione di voragini nel senso di Paolo Diacono, Onorio, ecc.; ma è notevole che egli, pur mostrandosi in fondo scettico sulla possibilità di spiegar questo fenomeno ([3]), aggiunga in fine: « Vulgus vero lunae accessui ac recessui causam attribuit » dando a vedere che l'influenza lunare era accettata al suo tempo anche dal volgo, senza pregiudizio del come questa influenza si manifestasse.

Il fatto che l'accordo tra l'andamento della marea e le fasi lunari era portato indiscusso dell'osservazione, mentre la ragione di questo accordo era tuttavia oscura, si rispecchia molto bene in due brani del poema *Philippis* di Guglielmus Brito Armoricus (prima metà del secolo XIII), col quale terminiamo questa rassegna nel campo nordico ([4]).

Notevole è in essi la chiara, sebben poetica menzione dei periodi semidiurno, semimensile e annuo della marea in relazione con le posizioni e fasi della luna, nonchè la vivace descrizione degli effetti del flusso alle foci della Senna che vien respinta dietro pel cammino di tre dì, dando luogo al noto mascaret. L'autore è perfettamente consapevole dunque della mirabile concordia fra il mare e la luna, ma non sa spiegarla, e giunge persino a domandarsi se non sia per caso l'andamento del mare che regòli le fasi della luna, anzichè il contrario, perchè si sa che il mare è stato creato prima della luna e l'antecedente non è mai effetto del conseguente! La Scolastica comincia a far capolino. L'autore osserva ancora che i due fenomeni potrebbero anche

([1]) *Kongs-skuggs-sja, ut lögd a Dannsku og Latinu.... Speculum regale cum interpretatione danica et latina.* Soroe; Einersen, 1768, pagg. 52-57. Debbo alla cortesia del prof. G. Zeuthen della Università di Kjöbenhavn se posso far cenno di quest'opera di cui non ho trovato copia qui da noi.

([2]) *De Naturis Rerum*, lib. III, cap. 17; in Rerum britannic. Medii Aevi Script., vol. XXXIV.

([3]) « Sed quis assignabit causam unde aestus proveniat? ».

([4]) Guillelmus Brito Armoricus, *Philippis*, lib. VI, versi 499-525; lib. VIII, versi 43-83; in Recueil des Hist. des Gaules et de la France, vol. XIII.

avere una causa comune, e infine, da buon credente, si consola con la esclamazione finale: « ... Istud — Quaerere nostra fides prohibet; comprendere nulla — Mortale ingenium valet hoc ratione vel arte »; come prima aveva scritto: « Cuius causa rei latet atque latebit in omni — Tempore nos quibus est luteis habitatio vasis ».

*
* *

Al di fuori del mondo britannico, germanico, scandinavo, franco, presso che nulla di interessante troviamo negli scrittori di questi secoli in altri paesi d'Occidente. Le conoscenze dei popoli del Nord, che abbiamo cercato di esporre, rappresentano, se si prescinda dagli Arabi, di cui ci occupiamo a parte, tutto il patrimonio del sapere di allora riguardo al fenomeno che c'interessa.

L'italiano Papias, che nel secolo XI compose un vocabolario assai conosciuto nel Medio Evo, accennando al fenomeno della marea alla voce *oceanus*, non fa che ripetere viete opinioni dell'epoca antica (1), del pari che Eustazio, vescovo di Tessalonica (secolo XI), che nel suo noto Commento alla Periegesis di Dionisio, ammette come causa della marea un vento sotterraneo che, spirando a intervalli, solleva ritmicamente le acque del mare, come affermavano Apollonio Tianeo e Solino (2); mentre il siculo Michele Glica (secolo XII), riferendosi all'autorità di San Basilio, riconosce l'influenza della luna sul mare del tutto simile a quella sull'atmosfera e sui corpi organici, anzi, più generalmente, su tutto ciò che nasce in terra (3). Nè altri accenni d'importanza ci accade di trovare presso scrittori italiani o bizantini; per cui, tornando ai popoli settentrionali, aggiungeremo invece, prima di chiudere questo capitolo, qualche considerazione riassuntiva.

Anzitutto deve notarsi, come una novità per rispetto ai precedenti secoli dell'alto Medio Evo, la copia delle osservazioni originali riguardanti l'Atlantico settentrionale e i mari che ne dipendono; Beda e Giraud Le Barry ci danno segnalati esempî di tali osservazioni. Oltre il fatto che, come abbiamo più volte notato, su quelle spiagge si hanno le maggiori opportunità di riconoscere il fenomeno nei suoi caratteri più spiccati, a spiegarci questa abbondanza di osservazioni concorre anche l'indole speciale degli abitanti molto dediti alla navigazione; le coste della Francia settentrionale, dell'Inghilterra, della Germania e della Scandinavia erano continuamente visitate dalle navi normanne, e la necessità si sarà certamente sentita di conoscere le condizioni del flusso e riflusso almeno per i porti più frequentati; è probabile anzi che fin da quel-

(1) « *Oceanum* ideo quidam reciprocis in se aestibus dicunt reverti, quia aiunt in profundis oceani esse quosdam meatus repletos spiritu, quasi mundi nares per quos anhelitus accessu alterno et recessu efflant. Quidam aiunt cum augmento lunari crescere oceanum; alii dicunt sydera solemque de oceano aquam haurire ignibus suis ut temperentur quare ignea sunt ». Papias, *Vocabularium*. Ho consultato l'edizione di Venezia, 1485, per Andream de Bonetis de Papia. Il passo di Papias è tutto attinto a Isidoro di Siviglia.

(2) *Αἴτιον δέ φασι τοῦ πάθους τούτου πνεῦμα ὑπόγεων, ποτέ μεν ἐπιὸν, ποτὲ δὲ ἀπιὸν καὶ ὑπονοστοῦν, ὅτε τὸ ὕδωρ ἀνωθούμενον, εἶτα συγκαταδῦνον ποιεῖ τὴν ἄμπωτιν. Comm. alla Periegesi*, vers. 203. Al verso 473 si ha il solito accenno ai fenomeni dello stretto di Sicilia e di Eubea.

(3) Michael Glyca, *Annales*, § 22. Corpus Scriptor. Historiae Byzant. Bonnae, 1836, pagg. 42-44.

l'epoca sian state diffuse fra i naviganti norme e indicazioni pratiche sull'ora del porto e sulla diversa altezza dei flussi nei varî punti della costa, conformi a quelle che più tardi ritroviamo anche nel Mediterraneo.

Queste indicazioni o regole sperimentali, frutto cioè delle lunghe osservazioni dei naviganti, avran certamente preso come fondamento le posizioni e le fasi della luna, la cui concordanza con tale movimento del mare non poteva sfuggire, specialmente ai marinari. Ma è notevole che una delle spiegazioni più diffuse fra questi popoli, nata anzi presso di loro — quella che ricorre all'azione di grandi voragini sottomarine, che assorbono e rigettano alternativamente l'acqua — non ammette di necessità un'influenza della luna. Come tale spiegazione potesse sorgere qui, si capisce agevolmente, considerando che tali voragini esistevano realmente, o meglio eran creduti tali i numerosi gorghi sul tipo del Maëlstrom, e che come già si disse l'azione di tali voragini sottomarine è ammessa comunemente nel Medio Evo ed è anzi fondamento principale di una teoria assai diffusa sull'origine delle sorgenti; ma che d'altra parte alla incontrastata accettazione di questa spiegazione si opponesse appunto il fatto manifesto della concordanza fra il corso della luna e la marea, lo dimostrano i tentativi di accoppiare l'influenza lunare all'azione delle voragini, dando luogo ad una teoria abbastanza complessa.

In confronto alla copia di osservazioni originali e alla diffusione di una spiegazione che può dirsi endemica, sta la scarsezza delle notizie attinte a fonti classiche. Se Beda ed Onorio si servono di Plinio e il Neckam cita i versi di Lucano, si può dire quasi che essi formino un'eccezione di poca importanza; il solo Guglielmo di Conches è notevole per aver risuscitato una vecchia spiegazione classica, dimenticata dall'epoca di Macrobio; tuttavia egli non ha mancato di modificarla seguendo idee proprie.

In conclusione si può dire che le osservazioni e gli studî degli scrittori settentrionali che abbiamo seguito passo passo, arrecano parecchi elementi nuovi alla dottrina della marea, alcuni dei quali resteranno come patrimonio di conoscenza generale, altri avranno poco seguito e tra questi anche la caratteristica *ipotesi delle voragini*, che ritroveremo menzionata nel secolo XIII soltanto da Duns Scoto che la combatte. Ma questi elementi nuovi ci appaiono tanto più notevoli quando li confrontiamo con quelli arrecati contemporaneamente dai dotti arabi che ci prepariamo a passare ora in rassegna.

VIII.

Le conoscenze dei popoli orientali
(dal secolo IX in poi).

Contemporaneamente alla cultura nordica, ma con caratteri totalmente diversi, più vivida, più rumorosa, si svolge nel Sud la cultura orientale, che sogliamo chiamare cultura araba dal nome del popolo che più la ha divulgata in Occidente. Essa molto più che la normanna è penetrata nel nostro mondo medioevale, talchè nessun capitolo di Storia della Scienza nel Medio Evo potrebbe passar sotto silenzio l'influenza araba.

Quanto l'astronomia e la geografia descrittiva fossero diffuse fra questo popolo, è inutile ripetere; riguardo al fenomeno che particolarmente c'interessa, che i pensatori arabi se ne occupassero a lungo e diligentemente ci risulta da parecchie prove. Se non che negli studî fatti dagli scienziati arabi sulla marea occorre fare una distinzione. Riguardo all'andamento del fenomeno in generale, al suo diverso modo di presentarsi nelle diverse spiagge, ai suoi effetti esteriori, anche alle sue relazioni col corso della luna, noi troveremo osservazioni diligenti, anche troppo minuziose, distinzioni elaborate, faticose, che attestano lo spirito osservatore di questo popolo. Ma tutt'altro deve dirsi delle spiegazioni. Agli Arabi, come a tutti gli Orientali in genere, mancava la concezione obbiettiva della natura, per cui presso di loro la geografia fisica fece scarsi progressi; per rispetto al flusso e riflusso, gli scrittori più serî si contentaron per lo più di additare la luna come causa del fenomeno; quelli che tentarono d'indagar più profondamente il problema caddero il più sovente in fantastiche speculazioni o combinazioni strane di concetti diversi che ci parrebbero ridicole, ove non ponessimo mente alle condizioni di vita e di cultura del popolo presso cui sorsero.

Nelle dottrine arabe che verremo esponendo, troveremo parecchie novità degne di nota. Alcune di esse sono dovute ai luoghi dove gli Arabi fecero le loro osservazioni sul fenomeno. Mentre l'Oceano Atlantico presenta una strana regolarità rispetto al flusso e riflusso, mancandovi quasi interamente l'ineguaglianza diurna, nell'Oceano Indiano le maree sono irregolarissime; ad Aden, per esempio, il periodo semidiurno è apparentemente del tutto sconvolto (¹); a ciò si aggiunga l'influenza perturbatrice esercitata dai venti periodici. Queste varietà si rispecchiano in certa misura anche in talune vedute e opinioni che ora per la prima volta si riscontrano. Ma noi non potremo seguir qui uno per uno tutti gli scrittori arabi; nostro scopo è soprattutto di accennare alle idee e spiegazioni più divulgate fra gli Arabi e far parola brevemente degli scrittori che esercitarono maggior influenza in Occidente (²).

Tra i primi celebri filosofi che si siano occupati della marea, abbiamo da menzionare Al-Kindi (Abû Jûsuf Ja'qûb bin Isḥâq al Kindî, fiorito fra l'813 e l'841, morto verso l'870), il più dotto arabo del suo tempo in ogni ramo di scienza e passato ai posteri col titolo di « Filosofo degli Arabi » (³). Tra le sue numerosissime opere filosofiche e scientifiche il catalogo di Fihrist ricorda le due: *Sopra i due fenomeni che si verificano nell'acqua* e *Sul flusso e riflusso*, che forse non sono

(¹) Darwin, op. cit., pag. 223 e 163.

(²) Non è senza esitazione che ci accingiamo ad esporre le dottrine arabe sulla marea. Un capitolo qualsiasi di storia della scienza araba, è cosa ben difficile a scriversi da chi non conosce la lingua. Molte importanti opere arabe attendono ancora di essere tradotte, molte traduzioni, specie tra le antiche, sono di scarso valore. Nell'arduo compito mi prestarono aiuto, soprattutto con indicazioni bibliografiche, i professori C. Nallino e G. Gabrielli e particolarmente il chiar. prof. Celestino Schiaparelli, che con squisita cortesia mi fornì anche parecchi volumi dalla sua ricca biblioteca; a tutti rendo i migliori ringraziamenti. Fra i libri che mi furon di maggior sussidio ricordo: Suter, *Die Matematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*. Abhandl. zur Gesch. der matem. Wissensch., fasc. X, e XIV; Dieterici, *Die pholosophie der Araber in X Jahrundert*. Lipsia, 1876; Brockelmann, *Gesch. der arab. Litteratur*. Weimar, Felber, 1897-1902, 2 vol.

(³) Su di lui cfr. Flügel, *Alkindi, genannt der philosoph der Araber*. Abhand. für Kunde des Morgenland. Vol. I, fasc. 2.

che la ripetizione di una medesima (1). Oggi una lettera di Al-Kindî ad alcuni amici sul flusso e riflusso si conserva in un codice bombicino della Biblioteca di Oxford (2). Secondo quanto riferisce Mas'ûdî, egli avrebbe sostenuto l'opinione che la marea fosse dovuta all'azione del vento, ma la sua spiegazione non si applica che al periodo annuo della marea. Quando il sole è a nord dell'equatore, si ha un vento di Nord dominante sull'Oceano, per cui durante la state l'acqua si accumula nelle parti meridionali, e diminuisce nelle settentrionali dell'Oceano; il contrario accade nel nostro inverno. « Ora lo spostamento delle acque del mare nelle due direzioni settentrionale e meridionale è precisamente ciò che si chiama flusso e riflusso, perchè è da notarsi che ciò che è flusso a nord, è riflusso a sud ». Così scrive Mas'ûdî (3); ma la spiegazione è monca e insufficiente. L'azione della luna, anzi del calore lunare, entrerebbe solo ad aumentare l'azione del vento, quando la luna venga ad incontrarsi con un pianeta durante uno di questi spostamenti delle acque (4). Comunque l'influenza del vento è più volte chiamata a render ragione della marea dagli scrittori arabi.

Contemporaneo di Al-Kindî è il famoso Abû Ma'šar (Albumasar degli autori medioevali: Abû Ma'šar Ǧa'far b. Muḥammed b. 'Omar al Balḫî, morto nell'886), uno dei maggiori astronomi arabi, il padre delle conoscenze medioevali sulla marea. Narrano ch'ei fosse grande nemico di Al-Kindî, di cui derideva la filosofia, e che questi gli inviasse segretamente persone che gli resero gradito lo studio dell'Aritmetica e dell'Astronomia, alle quali ben presto si rivolse Abû Ma'šar, lasciando gli studî storici che prima lo avevano occupato, e divenne così l'autorità più riverita forse nel Medio Evo, in fatto soprattutto di astrologia. Morì nell'886, più che centenne. La sua opera più nota, il Gran Libro dell'Introduziono all'Astronomia (Kitâb al mudḫal ilâ ìlm aḥkâm an nuǧûm), in otto libri o parti, così diffusa in Occidente e fonte di tanti libri astronomici, astrologici e geografici, ci è oggi giunta soltanto in unà cattiva traduzione latina dovuta a Johannes Hispanus (5). Vi si parla della marea nei capitoli 4 a 8 del III libro. Noi riassumeremo i punti principali delle dottrine espostevi, senza per altro seguire l'ordine dall'autore tenuto nell'esposizione, che ci sembra poco opportuno (6).

(1) Suter, *Das Mathematikerverzeichniss im Fihrist* etc. Zeitsch. für Mathem. und Physik. (Schlömilch — Cantor), XXXVIII Suppl. pag. 10 sg.

(2) Uri, *Bibliothecae Bodleianae codicum ..... Catalogus*. I, pag. 190. Il codice porta il n. 877; è miscellaneo. La lettera di Al-Kindî è la 12a. Ignoro purtroppo il contenuto di questa lettera.

(3) Maçoudi, *Les prairies d'or*. Texte et traduction par C. Barbier et Paret de Courteille. Paris, 1861, vol. I, cap. XI.

(4) Maçoudi, op. cit., loc. cit.

(5) Ne esistono tre edizioni: Augusta, 1489; Venezia, 1489; ibid., 1506. Mi sono servito della prima. « Introductorium in Astronomiam| Albumasaris abalachi octo continens libros partiales ». in fine: « Opus introductorii in Astronomiam Albumazaris abalachii explicet feliciter. |Erhaldi Ratdolt mira imprimendi arte qua nuper Venetiis nunc Augustae| Vindelicorum excellit nominatissimus. VII Idus Februarii MCCCCLXXXIX ». Quasi identica è l'edizione del 1506. — Cfr. Suter, op. cit., pagg. 28-30. — Oltre quest'opera Abû Ma'šar aveva scritto il Piccolo Libro dell'Introduzione, tradotto in latino da Atheiard di Bath. (manoscr. a Oxford).

(6) La traduzione di Joh. Hispanus, oltre ad essere scorretta, è anche abbreviata; le vedute del nostro astronomo ci risultano quindi ben spesso oscure. In piccola parte ci aiutano ad intenderle

La luna è in principio *ammessa* come causa della marea: come cioè il sole influisce sulla temperie e sulla composizione delle cose, così la luna sui moti del mare, sulle trasformazioni dei corpi, sulle germinazioni, sugli odori ecc. Ma la marea si produce soltanto col concorso di tre fattori: prima di tutto la natura del luogo, che deve essere un mare ampio, profondo, impervio, col fondo e le rive accidentate e scogliose; poi la *habitudo* delle acque, che debbon essere, in primo luogo, in tal copia che non vi si avverta l'effetto del tributo recato dai fiumi, e poi dense, calde, salate, ricche di vapori; infine, fattore più importante, il moto della luna.

L'esposizione del periodo semidiurno della marea è fatto chiaramente e alla maniera di molti altri scrittori precedenti; e l'autore nota che, dal fatto che la luna, in uno stesso istante, mentre per un luogo si trova allo zenith, per un altro è all'orizzonte, e così via, deriva, per essere la terra rotonda, che per un luogo comincia il flusso, quando in un altro si ha il riflusso ecc. Ma non sembra che Abû Ma'šar ammettesse questo periodo semidiurno per tutti i mari, distinguendo dai mari in cui il fenomeno si presenta così, quelli dove la marea non si verifica affatto, e quelli in cui si avverte solo un periodo mensile [1]. Queste diversità, come pure quelle dovute alla diversa natura e *habitudo* delle acque, han fatto sì che in differenti paesi nascessero diverse opinioni su questo fenomeno e che alcuni perfino negassero che la luna fosse causa di tali moti [2]. A ciò si aggiunge che la marea si presenta affatto diversamente per chi la osserva in alto mare e per chi la vede dalla riva; pei primi infatti il flusso è avvertito, secondo l'autore, come un ribollimento delle acque che commuove tutto il mare; mentre i rivieraschi veggono, durante il flusso, senza alcun commovimento, le acque invadere le rive, per allontanarsene nel riflusso. E sembra anche che il nostro autore conoscesse che la natura piana o dirupata della spiaggia e la diversa inclinazione con cui essa scende in mare possono influire sul modo di presentarsi del flusso e riflusso [3]. Per ottenere la durata del flusso in un dato giorno, Abû Ma'šar dà una semplice regola ripetuta anche da Alberto Magno; essa consiste nel computare in gradi l'arco percorso dalla luna sull'orizzonte nel giorno dato (il che si può ottenere fissando la posizione della luna al momento del sorgere e del tramontare e tenendo conto della latitudine), e dividere il numero dei gradi per 15 con che si ottengono le ore e le frazioni di ore del cammino lunare: la metà di queste ore rappresenta la durata del flusso, l'altra metà la durata del riflusso diurni; lo stesso si dica per l'arco notturno.

A queste considerazioni sul fenomeno in generale, l'autore aggiunge la curiosa notizia che le acque del mare sono più calde durante il flusso, più fredde durante il riflusso: « in accessu namque ex imis abyssis ebulliunt, in recessu forinsecus expansae

e completarle gli accenni che si trovano in scrittori posteriori. Cfr. ad es. i riassunti delle opinioni di Abû Ma'šar fatti da Alberto Magno e da Vincent de Beauvais, di cui si parlerà nel capitolo seguente.

(1) Nel testo questa distinzione manca, ma si trova in Alberto Magno e in Vincent de Beauvais, che attingono quasi interamente al nostro. Vedi il cap. seg. pagg. 461-62.

(2) Cfr. cap. 4 in fine.

(3) Cfr. Alberto Magno, *De Proprietat. Element.*, lib. I, tratt. II, cap. 4, in fine.

infrigidantur ». Tale notizia, che troveremo ripetuta in seguito, ha il suo fondamento nella credenza che nel fondo del mare regni una temperatura molto elevata, credenza di origine antichissima e che vedremo anche in seguito più volte affermata come verità indiscutibile.

Per natura, dice l'autore, in qualunque luogo e in qualunque tempo i flussi e i riflussi, così diurni, come notturni, dovrebbero essere uguali fra loro in durata e in entità, e uguale il momento d'inizio di ogni fase; ma a ciò si oppongono alcune circostanze accidentali, che noi potremmo chiamare cause di perturbazione; e l'autore ne enumera otto. In primo luogo è da considerarsi la posizione relativa della luna e del sole, che determina le vicende mensili della marea. Nel novilunio tanto il flusso che il riflusso sono assai forti: « addit enim sol coniunctus in his lunae vicibus »; dal novilunio al primo quarto la violenza dei flussi diminuisce, mentre cresce quella dei riflussi, vicenda che s'inverte nel periodo che va dal primo quarto al plenilunio; nella seconda parte del mese si ripete la stessa alternanza. Se non che in tutto il periodo che va dalla luna nuova alla piena, l'influenza lunare è più efficace che nell'altra metà del mese. Da ciò deriva una certa complicazione nel periodo mensile, ma in fondo resta sempre fermo che questo periodo è doppio, ossia che i fenomeni di flusso e riflusso vanno durante il mese (lunare) da un minimo a un massimo, poi di nuovo a un minimo e poi ad un nuovo massimo, come durante il corso del giorno [1]. Ciò è opportuno notare perchè troveremo più tardi diffusa fra gli autori arabi l'opinione che il periodo mensile sia invece semplice. L'influenza del sole in queste vicende mensili non è disconosciuta dall'autore: « est enim et soli in accessu maris nonnulla vis »; ma su di essa egli non si sofferma più oltre.

Le altre cause di perturbazione non ci sono ricordate che con molta brevità e poco chiaramente; si accenna però alla variazione nella declinazione lunare (causa della cosiddetta ineguaglianza diurna), alle diverse posizioni della luna nel suo circolo eccentrico, alla sua variabile distanza dalla terra, alla posizione rispetto ai segni zodiacali, ecc.; infine anche alla diversa durata dei giorni e delle notti, in cui entra di nuovo, come fattore di ineguaglianza, il sole. Infatti, quando il giorno è più lungo della notte, il flusso diurno è più lungo e più forte del notturno, e viceversa; e la influenza del sole si rispecchia anche nel periodo annuo della marea, secondo il quale i fenomeni di flusso e riflusso sono diversi nei solstizî e negli equinozî. Ma di tutto ciò l'autore parla, almeno nel testo a noi pervenuto, con ben poca chiarezza. Un'ottava causa di perturbazione, ma questa affatto accidentale, sono i venti, alcuni dei quali, secondo l'autore, favoriscono il flusso, altri il riflusso, come più diffusamente spiegherà più tardi Alberto Magno; ma quest'ultimo fattore non dev'esser confuso con gli altri che sono di ragione astronomica.

E veniamo alla seconda parte della trattazione di Abû Maʿšar. Qual'è la causa della marea?

[1] « Ut igitur infra mundi conversionem, id est diem unum... gemini accessus geminique recessus, sic infra lunae reditum, id est mensem unum, gemina crementa geminaque decrementa fiunt, illic inter caeli, hic inter lunae a sole cardines ». Cap. 6 verso la metà; e più oltre, nello stesso capitolo: « Sicque per singulos menses bina utrorumque (di flusso e riflusso) augmenta et decrementa fieri apparet ».

In principio l'autore ha detto che le opinioni sono diverse, ora afferma che la sentenza più universale è questa: le acque del mare nel flusso seguono accompagnano la luna, nel riflusso non fanno che ritornare naturalmente al posto d'onde la luna le ha tratte via. La luna dunque provoca nel mare una perturbazione: il flusso; successivamente le acque ritornano alla posizione normale: riflusso (¹). Ma non tutti la pensano così. Secondo alcuni il movimento di marea non è provocato da nulla, è un movimento *naturale* del mare come sarebbe, per esempio, il respiro nell'uomo (²). È curioso conoscere con quali argomenti il nostro autore confuti questa idea della *spontaneità* della marea. In primo luogo, dice, se questo moto fosse spontaneo, sarebbe sempre uguale a sè stesso, sempre regolare, e invece si sono già ricordate tante irregolarità; in secondo luogo, se il flusso, che è un riversamento delle acque del mare oltre i limiti che le contengono, fosse naturale, non ci sarebbe altro modo di concepirlo, se non pensando che tali limiti non fossero più sufficienti alla quantità delle acque; e allora perchè poi le acque ritornano in sè stesse nel riflusso? In terzo luogo finalmente, la tendenza spontanea delle acque è di andar sempre verso i luoghi più bassi; il flusso invece è un moto in senso contrario, un sollevamento; esso non è dunque un moto naturale. Quest'ultima obiezione, che vedremo anche in seguito riprodotta, dovette sembrar la più grave. Ma i contradittori dell'opinione che fa la luna causa della marea dicono: « Se la luna provoca un tal moto nelle acque marine, come non lo provoca anche nei fiumi, nelle sorgenti ecc.? ». Abû Ma'šar risponde che le acque del mare sono di qualità diversa da quelle dei fiumi, le prime essendo « confluae, densae, salebrae », le seconde « diffluae, subtiles, dulces » (³); si può, anzi, si deve ammettere che la luna abbia influenza sulle prime e non sulle seconde. In conclusione dunque il movimento di marea non è spontaneo, ma provocato dalla luna.

A quanto consta *apud philosophos* l'influenza della luna non è senza effetto in nessun mare, ma a questo riguardo i mari si comportano in tre modi differenti, secondo la loro natura. Esporremo questa triplice distinzione perchè essa ritorna frequentissimamente in altri scrittori posteriori. Ci sono mari che non hanno marea; altri che la hanno senza che si possa constatare; altri che la hanno in modo visibile. Alla prima categoria appartengono: 1° i laghi e le paludi; 2° i mari troppo distanti dal circuito lunare e ai quali perciò l'influenza della luna non arriva (i mari delle plaghe prossime ai poli); 3° i mari che hanno il fondo e le rive molli e labili, che cedono all'impulso dell'acqua nel flusso. Alla seconda categoria appartengono: 1° i mari le cui spiagge sono disabitate, per cui niuno vi ha mai controllato il fenomeno della marea; 2° i mari le cui rive sono a picco, sì che nel flusso l'acqua non ha luogo ove espandersi; 3° le acque di bacini aperti verso altri mari, le quali, nel

(¹) Da ciò si trae come necessaria una conseguenza degna di nota: che cioè per Abû Ma'šar il livello normale delle acque non è un livello medio tra l'alta e la bassa marea, bensì è il più basso livello che le acque raggiungono nel riflusso, dacchè questo non è che il ritorno delle acque alla loro posizione normale.

(²) Questa comparazione non si legge in Abû Ma'šar, ma ben presto la troveremo presso altri.

(³) Dovette sembrar ragionevole pensare che nei fiumi il movimento continuo delle acque da monte a valle *coprisse* il moto alternante del flusso e riflusso, sì da renderlo inavvertibile.

flusso, in luogo di inondare le rive, si spingono nei mari vicini e comunicanti [1]. Alla terza categoria appartengono i mari come il Persico, l'Indiano, il Cinese [2], il Gallico ecc., i quali sono ampî, profondi, ricchi di scogli, isole e promontori, presso cui è più visibile il fenomeno.

Che sorta d'influenza esercita la luna sul mare? Qui l'astronomo non dà una risposta diretta: « Motus autem lunae... saepius repetitus *cognata virtute* aquas trahit » dice in un luogo; da cui deve ricavarsi soltanto che la luna ha una speciale influenza sulle cose umide: « Demonstratum autem est — così scrive verso la fine dell'VIII capitolo — inferiores mundi corporum motus privios caelestium itus atque reditus *archanis quibusdam naturae vinculis trahentes* sequi, ut inter ipsa etiam terrestria corpora exemplis superius patefactum est; ad hunc itaque modum et luna maria naturae suae congrua, ad aequum distantia, *archana quadam cognatione trahit* ». E il capitolo IX è interamente consacrato all'esposizione delle influenze della luna sugli animali, vegetali, minerali, sulle malattie ecc. Ma ch'egli non avesse palesemente dichiarato di qual natura fosse l'influenza della luna sul mare, già si erano accorti i successivi scrittori medievali, e apertamente lo notava tra gli altri Ruggero Bacone [3]; Duns Scoto poi afferma che secondo Abû Ma'šar la luna « habet virtutem quandam sibi connaturalem ad attrahendum ad se aquas maris sicut magnes trahit ferrum » [4], ma questo paragone è probabilmente aggiunto dallo Scoto mancando nel testo e non avendosene menzione in altri scrittori che abbiano attinto al nostro, e in nessun altro autore arabo.

Ma accanto alla luna, anche il sole esercita, come abbiamo detto, una certa influenza sulla marea. Ad essa è dovuto che il mar Persico e l'Indiano, sebbene formino un tutto unico, si comportino diversamente rispetto al loro stato di quiete e di navigabilità; ma qui entra in campo più che altro l'azione del vento. Infatti il mar Persico è burrascoso da quando il sole entra nel segno della Vergine fino a quando entra nei Pesci, ed è calmo pel restante periodo dell'anno; il massimo di tempestosità si ha col sole in Sagittario, il massimo di quiete col sole in Gemini; tutto il contrario avviene nel mare Indiano. Il sole aiuterebbe la marea con riscaldare le acque di fondo [5], sebbene l'autore non si pronunci su ciò chiaramente. Infine anche alle stelle non è negata un'azione sulla marea, sempre nel senso di aiutare l'influenza lunare [6].

Tali, esposte in succinto e nel miglior modo possibile, le idee del famoso astronomo. In esse non mancano contraddizioni ed errori, ma le parti vere e le errate ci

(1) Così mi pare che si debba intendere il brevissimo passo: « Terciae speciei sunt aquae aliis influentes; hi namque accessus hora quibus influunt, accedunt ». Questo passo dà un'idea della oscurità del testo.

(2) Il testo ha *Scintum*. da emendarsi in *Sinicum* (*Scyticum*?).

(3) *Opus Majus*, Venezia, Pitteri, 1750, pagg. 63-64. Cfr. al capitolo seguente.

(4) Jo. Duns Scoto, *In Secund. librum Sententiar.* Distinctio XIV, Quaest. 3ª, Lugduni in aedib. Joh. Crespin MDXXX.

(5) « Sol... aquas calefaciens ex imis abyssis undas evocat ».

(6) « Est enim et soli in accessu maris nonnulla vis, sicque quotiens *luna stellis humidis iungitur* ».

sembra appaiano chiare senza bisogno di commento: le une e le altre ritroveremo presso gli scrittori posteriori di Occidente, pei quali Abû Ma'šar è molto spesso fonte diretta o indiretta specialmente per ciò che riguarda le osservazioni sulle apparenze esteriori e sul modo di presentarsi del fenomeno.

Noi abbiamo parecchie prove che gli Arabi consideravano come in relazione col periodo annuo della marea i fenomeni che si manifestano nell'Oceano Indiano in seguito all'alternarsi semestrale dei monsoni. Un accenno di ciò si ha già in Al-Kindî, ma documento ben più notevole è un passo importantissimo di Ibn Ḥordâḏbeh ('Obaidallâh ibn 'Abdallah ibn Ḥordâḏbeh Abû'l Qâsim) che scrisse fra l'844 e l'848 il suo *Libro delle strade e delle provincie*. Egli scrive: « Abd-el-Ghaffar il marinaio, originario di Siria, interrogato sul flusso e riflusso, ne diede la seguente spiegazione. Questo fenomeno si manifesta nel mare di Persia, al levare della luna (novilunio?); nell'oceano esso si divide in due stagioni: l'una di estate, in direzione di Est-Nord-Est durante sei mesi; a quest'epoca il mare si alza nelle regioni orientali, come la Cina, e si abbassa nella regioni occidentali; l'altra d'inverno, nella direzione di Ovest-Sud-Ovest, durante altri sei mesi; il mare si eleva allora nella parte di Occidente » (1). Mi sembra che da questo passo risulti chiaro che i rivieraschi delle Indie estendevano, per così dire, il concetto della marea a fenomeni che con essa non hanno niente che fare e si riferiscono invece all'azione dei venti. È naturale che da ciò nascesse la spiegazione che fa la marea effetto di venti, e difatti Ma'sûdî, che nel capitolo prima citato ripete quasi *ad literam* il passo di Ḥordâḏbeh, immediatamente aggiunge quanto abbiamo riferito sopra sull'opinione di Al-Kindî, che evidentemente era fondata su queste osservazioni dei fenomeni semestrali del mare Indiano, osservazioni non estranee neppure ad Abû Ma'šar, come si rileva dagli ultimi periodi del capitolo VIII.

Qui sarebbe ora da citare, in ordine di tempo, il grande filosofo ed astronomo Alfarabi (Muḥammed b. Muḥ. b. Tarchân b. Auzlag Abû Naṣr al Fârâbî, circa 870-950) (2), ma nelle opere di lui pubblicate non posso trovare che un breve accenno, contenuto nell'opuscolo: *Sul valore dell'astrologia* (3), in cui l'influenza della luna sul mare è fatta analoga a quella dello stesso astro sulle erbe, sugli animali, sull'uomo ecc., secondo le idee professate anche da Abû Ma'šar.

Invece importantissima è per noi la trattazione che alla marea consacra il geografo Mas'ûdî (Abû'l Hassan Alî b. Hossein al Mas'ûdî, morto il 956) più volte ricordato, perchè in essa sono riferite molte altre spiegazioni del fenomeno, che altrimenti ignoreremmo, ed esposte tutte con perfetta neutralità da parte dell'autore (4).

Dopo aver fatto, riguardo al modo di comportarsi dei diversi mari, la stessa triplice divisione fatta da Abû Ma'šar, lo scrittore dice che sulla causa del flusso e riflusso regna una grande discordia. Secondo alcuni, la luna, essendo omogenea con

(1) *Le livre des routes et des provinces d'Ibn Khordadbeh*, pubbl. e trad. da C. Barbier de Meynard. Journal Asiatique. serie VI, tomo 5°, 1865, pag. 293.

(2) Suter, op. cit., pagg. 54-56.

(3) Alfarabis, *Philosophische Abhandlungen*, trad. Fr. Dieterici. Leiden, 1892. *VIII. Ueber den Wert der Astrologie*, pagg. 179-80.

(4) Maçoudi, *Prairies d'or*, I, 11, già citato.

l'acqua, la riscalda e la dilata, come avviene di una pentola messa al fuoco, in cui l'acqua, che prima riempiva una parte sola del recipiente, si eleva a poco a poco fino a travasare. « Ora il fondo del mare, essendo costantemente ad una temperatura assai elevata, l'acqua dolce che vi si genera, si trasforma a poco a poco e si riscalda come accade nelle cisterne e nei pozzi. Quest'acqua, una volta riscaldata, si dilata e aumenta di volume, perchè le sue molecole si spingono e si premono a vicenda; poi la sua superficie si estende, esce dalle profondità dell'abisso e cerca un letto più largo del suo ». Questi fenomeni sono soprattutto sensibili al tempo della luna piena; essi non si avvertono nei fiumi, salvo che presso le rive.

Questa opinione va soggetta ad una formidabile obiezione. Se l'azione della luna sul mare è essenzialmente calorifica e paragonabile a quella del fuoco su di una pentola, perchè il calore molto più potente del sole non produce lo stesso effetto? Per ciò questa opinione è abbandonata da molti che ricorrono ad un'altra ipotesi, secondo cui il flusso sarebbe prodotto da vapori che, originatisi nell'interno della terra, eserciterebbero una pressione sulle acque sollevandole, fino a che essi non abbiano trovato un'uscita, dopo di che le acque tornerebbero alla loro posizione primitiva; nè la luna nè il sole avrebbero la minima influenza sul fenomeno, e neppure le stagioni. « L'occhio stesso — scrive Ma'sûdî — può assicurarsi della verità della spiegazione, perchè è manifesto che il riflusso non ha mai raggiunto il suo termine, allorchè il flusso comincia, e viceversa. È che in realtà le esalazioni si producono senza interruzione e che, appena dissipate le une, altre se ne generano al loro posto; e non può essere altrimenti, perchè tutte le volte che l'acqua si abbassa e ritorna nel suo letto, questi vapori esalano dalla parte della terra che è a contatto con l'acqua. Così ogni ritorno dell'acqua genera le esalazioni, ogni riversamento le fa svanire ».

Mentre alcune persone religiose asseriscono che la marea è uno dei fenomeni che non ha altra causa che l'azione e la volontà di Dio, altri paragonano il comportarsi della marea a quello di alcuni temperamenti. « Come si vedono i temperamenti sanguigni, biliosi ecc. agitarsi e in seguito calmarsi, allo stesso modo alcune sostanze, distendendo successivamente la superficie delle acque, le danno una forza che la fa gonfiare; poi essa si calma a poco a poco, e le acque ritornano nel loro letto ». Questa ipotesi coincide forse in sostanza con quella combattuta da Abû Ma'šar, che può chiamarsi della spontaneità della marea e che vedremo altre volte riprodotta.

Mas'ûdî riporta ancora altre due spiegazioni. L'una è quella di Al-Kindî già riferita; secondo l'altra, l'aria che posa sull'Oceano si trasforma continuamente; « questa trasformazione aumenta il volume dell'acqua, che gorgoglia e poi trabocca; è ciò che si chiama flusso. L'acqua a sua volta, trasformandosi per la evaporazione, si cambia in aria, e l'acqua ritorna nel suo letto; è ciò che si chiama riflusso. Questi due fenomeni si susseguono senza interruzione alcuna, e ora l'acqua si trasforma in aria, ora l'aria in acqua ». Le più forti maree del plenilunio sono dovute a ciò che a quell'epoca i turbamenti dell'atmosfera sono maggiori; perciò l'influenza della luna accresce l'intensità della marea, ma non la provoca.

Quest'ultima spiegazione differisce sostanzialmente da tutte le altre riferite da Ma'sûdî, anzi da tutte quelle ricordate finora, perchè vede nel flusso un vero *aumento della massa delle acque marine*, nel riflusso una diminuzione. È una spiegazione

probabilmente assai antica, di cui è ignoto l'autore, ma è forse la più rozza di quante ne abbiamo finora trovate; ed è a meravigliarsi anzi, che non solo l'autore la abbia messa qui accanto alle altre, ma che si trovi anche più tardi ripetuta (1).

Nelle spiegazioni tutte riferite da Maʿsûdî si nota facilmente lo spirito fantastico degli Arabi e quella tendenza che li spingeva a divagazioni più o meno scientifiche piuttosto che a indagini positive. Poco importa se della maggior parte di queste spiegazioni non conosciamo l'autore primo; certo è che il diligente Maʿsûdî riporta le idee più diffuse al suo tempo, e dall'insieme di esse emerge un fatto degno di nota. L'influenza della luna, ammessa senz'altro e difesa da Abû-Maʿšar, comincia quasi a passare in seconda linea o almeno ad esser posta a lato ad altre influenze date come causa della marea con ipotesi molto stravaganti. Infatti, poco dopo Maʿsûdî, nel *Libro della creazione e della storia* di un certo Mutaḥar ibn Ṭâhir al Maqdisī (fine del secolo X) (2), colla semplice frase: « tra gli astronomi ve ne sono *alcuni* che spiegano il flusso col corso della luna e il riflusso col suo decorso (*sic*) », la ipotesi dell'influenza lunare è messa accanto alla ipotesi di Aristotele che fa causa della marea il sole che muove il vento, ad un'altra secondo cui il flusso è dovuto al riversarsi dei fiumi al mare, il riflusso al loro ritrarsi (3), ad una terza che fa della marea un moto spontaneo dell'Oceano. Notevole è la conclusione di Maqdisī: « Alcune leggende riferiscono che Dio ha un angelo preposto ai mari; quando esso tuffa la sua mano nel mare, esso si gonfia, e si abbassa quando ne la ritrae. Se ciò fosse vero (e Dio solo sa meglio la verità!) varrebbe meglio credervi che volgersi a spiegazioni che non racchiudono la verità; e se qualcuno esprimesse l'idea che quest'angelo facesse soffiare i venti, causa del flusso, o aumentasse la portata dei fiumi, o producesse il fenomeno al tempo della luna crescente, in modo da conciliare le leggende e le opinioni filosofiche, sarebbe forse una buona dottrina; ma Dio sa meglio la verità! » (4). Anche considerando l'indole particolarmente religiosa del libro, questo rimpasto strano di religione e di scienza e questo tentativo puerile di accordarle insieme non possono non maravigliarci: ma l'elemento religioso domina largamente la scienza e la letteratura orientale, e ne vedremo presto altri esempî.

Nel secolo X, una nuova dottrina sulla causa della marea è professata dalla setta dei *Buoni Fratelli*, la cui filosofia fu studiata ed illustrata dal Diete-

(1) Un accenno a un'idea analoga trovasi peraltro, come già osservammo, in Guglielmo di Conches.

(2) Quest'opera, tradotta da Ch. Huart e pubblicata a Parigi (Leroux 1901) venne dal traduttore dapprima attribuita ad *Abû Saîd Aḥmed ibn Sahl el Balḫi*; ma sul vero autore di essa, che è questo Maqdisī, ignoto altrimenti, cfr. *Journal Asiatique*, 1901, t. II, pag. 16 e segg.

(3) Questa opinione è dallo scrittore attribuita ad un Kîmâos, che il traduttore identificherebbe con l'alchimista Kîmâs, citato dal Fihrist, o con Cumas, dottore della Scuola di Edessa. Ma nell'antichità quest'opinione fu attribuita, per quanto forse erroneamente, a Timeo (Τιμαῖος), e, visto che lo scrittore cita prima anche Aristotele, non è improbabile che qui si indichi, con nome corrotto, proprio questo antico storico e geografo, che è citato anche da Ibn-el-Vardi, come diremo tra poco. Anche questa spiegazione dovrebbe forse ascriversi alla categoria di quelle che vedono nel flusso un aumento nella quantità delle acque, sebbene non in modo così generale come nell'ultima spiegazione di Mas'ûdî.

(4) Op. cit., vol. II, pag. 43.

rici (1). Secondo essi questo movimento del mare sarebbe dovuto alla luna, ma i raggi lunari acquisterebbero il potere di *riscaldare* le acque marine e perciò di farle gonfiare e sollevare, solo dopo essersi riflessi nel fondo del mare. Quivi esisterebbero roccie e pietre dure e rigide; quando la luna risplende su un dato luogo, i suoi raggi giungendo a quelle roccie, vi si rifletterebbero riscaldando l'acqua, la quale alleggerita, cercando un più largo spazio, invaderebbe le rive. Ciò accadrebbe fino a che la luna sale nel cielo; ma quando essa comincia, dalla sua culminazione, a calare, il mare a poco a poco si quieterebbe e le particelle di acqua, raffreddate, tornerebbero alla loro posizione normale, finchè la luna raggiunge il punto ovest. Ma anche le altre stelle eserciterebbero qualche influsso sul mare, specialmente allorchè si trovano in congiunzione con la luna. Questa spiegazione non dà peraltro ragione del secondo flusso diurno che si ha quando la luna si trova al nadir del luogo e non può perciò esercitare la sua azione calorifica; inoltre manca qualsiasi accenno a un periodo quindicinale.

Altre notizie importanti e curiose ci vengono fornite riguardo a credenze indiane sulle cause del flusso, da Albêrûnî, uno dei maggiori scienziati arabi (Muḥammed b. Aḥmed Abû'l Rî'ân el-Bîrûnî; 973-1048) che in un libro famoso descrisse la vita e la cultura indiana del suo tempo. « Per ciò che concerne la marea nell'Oceano Indiano — scrive —... noi diciamo che secondo le conoscenze del popolo indiano, c'è un fuoco chiamato Vaḍarânala nell'Oceano, che brucia in eterno. L'alta marea è causata dal fuoco che soffia ed è fatta salire dal soffio del vento, e la bassa è causata dall'aspirazione prodotta dal palpitare del fuoco. Mânî è venuto ad una simile credenza dopo aver saputo dagli Indù che c'è nel mare un demonio le cui espirazioni ed aspirazioni causano la marea. Gli Indù istruiti determinano le fasi quotidiane delle maree, segnate dal sorgere e dal tramontar della luna, le fasi mensili, segnate dal suo crescere e calare, ma la causa fisica di questi due fenomeni è loro sconosciuta... Tutte le volte che la luna si leva o tramonta, l'acqua dell'Oceano si alza e inonda il luogo in questione (una spiaggia dove sorge un idolo di pietra detto *Somânâth* o « signore della luna »); quando la luna arriva al meridiano di mezzodì o di mezzanotte, le acque si ritirano, e il luogo ritorna visibile. Così la luna era occupata continuamente a servire l'idolo e a bagnarlo, per cui il luogo era considerato sacro alla luna » (2).

Ma in un'altra sua opera, lo stesso Albêrûnî ci espone le proprie vedute sul fenomeno, affermando chiaramente che del flusso e riflusso sono causa i moti della luna; egli accenna esattamente al periodo semidiurno, ma riguardo alle vicende mensili dice che il flusso è più violento nella prima metà del mese lunare, più debole nella seconda senza aggiungere altro, dal che non s'intende chiaramente se egli la pensasse come Abû Ma'šar, o ritenesse, come poi altri scrittori arabi, che il periodo

(1) Fr. Dieterici, *Die Philos. der Arab. im X Jahrh.* (Lipsia 1876). Cfr. per ciò che interessa a noi, Parte 1ª, *Makrokosmos*, pagg. 210-11; Id., *Die Naturanschauung und Naturphil. der Araberim X Jahrh.*, pag. 69 e 74-75.

(2) Alberuni's, *India. An account of the religion, phylosophy, literature, geography, chronology, astronomy, customs, laws and astrology of India about A. D. 1030.* Ediz. inglese con note e indici per E. Sachau, Londra 1888, vol. II, cap. 58.

mensile fosse semplice, anzichè doppio; egli avverte infine che anche il sole ha influenza sul fenomeno, senza peraltro soffermarsi su ciò [1]. Verso la stessa epoca il famoso medico Avicenna (Abû Ali al Hassein ibn ʿAbdallah ibn Sînâ 980-1037), rintracciando le cause delle crisi nelle malattie, dice che alcuni ne fanno causa la luna, la quale esercita un'influenza sui corpi umidi, come si rileva specialmente dal flusso e riflusso del mare e dall'accrescersi dei cervelli al plenilunio e al novilunio in particolar modo [2].

Noi troviamo dunque che, accanto a spiegazioni le quali si posano, come la maggior parte di quelle riferite da Masʿûdî, su fantasticherie poco interessanti per lo scienziato, si perpetua anche la dottrina della diretta influenza lunare, propugnata da Abû Maʿšar, che dà luogo talora ad ipotesi meno strane. A questa categoria sembra doversi ascrivere quella contenuta in un trattatello speciale sulla marea del secolo XI o XII, che si conserva manoscritto nella Biblioteca dell'Escuriale [3], in cui l'autore anonimo, dopo aver riferito e confutato le spiegazioni dei suoi predecessori e dopo aver esposto ciò che si può osservare nella marea, *mediante il senso della vista*, spiegava una teoria che forse si avvicina a quella che si trova accennata nella *Theorica Planetarum* dell'arabo Alpetragio, di cui parleremo tra poco.

Un accenno alla marea si legge anche nel *Libro del Re Ruggero*, compilato per Ruggero II dal famoso Edrisi (Abû ʿAbdallâh Muḥammed b. Muḥ. b. ʿAbdallâh b. Idrîs äs Šarîf al Idrîsî; 1099-1154). Geografo completo e positivo, per molti riguardi il maggiore fra gli Arabi, Edrisi, la cui opera ricorda, a molti secoli di distanza, quella di Strabone, rifugge dalle idee e dalle notizie fantastiche. Egli conosce per sentita dire che la marea ha luogo nei mari delle Indie e della Cina, e che nel Golfo Persico ha un periodo semestrale, così come riferisce Masʿûdî, ma egli si ferma e si basa su ciò che ha veduto coi propri occhi nell'Atlantico, e su di ciò costruisce la sua ipotesi, che si accosta a quella di Aristotele, da lui pur riferita, secondo cui la marea è dovuta a venti suscitati dal sole [4].

Nell'Atlantico dunque Edrisi ha potuto osservare che il flusso comincia ad aver luogo dopo la seconda ora del giorno, fino alla nona; segue il riflusso per sei ore fino al tramonto, poi un nuovo flusso e un nuovo riflusso di uguale durata. La causa di questo andamento risiede nel vento che solleva il mare a principiare dalla terza ora del giorno e dura finchè il sole sale all'orizzonte; più tardi il vento cade e comincia il riflusso. Di notte si ha un egual vento che s'inizia appena il sole è tramontato. Le più alte maree hanno luogo dalla 13ª alla 16ª notte di ogni mese lunare,

(1) *The chronology of ancient nations, an english version of the arabic text of the Athâr-ul-bakiya of Albêrûnî.* Pubbl. e trad. con note e indici da E. Sachau, Londra 1879, cap. XIII, pag. 260.

(2) Avicenna, *Canon medicinae*, lib. IV, Fen. II, Tract. II, cap. 2. Venezia, Giunti, 1562.

(3) N°. 1631 del catalogo di Casiri. Il prof. Nallino, dandomi notizia dell'esistenza di questo trattato, mi ha cortesemente favorito i titoli dei 30 capitoli in cui esso è diviso.

(4) Al nome di Aristotele, Edrisi associa quello di Archimede; cita poi l'opinione di un Satoîos secondo cui il mare cresce e decresce con la luna. Mi servo della traduzione di Edrisi fatta dal Jaubert (Parigi 1836), sebbene ne sia nota la generale inesattezza, non essendovene altra per ora. Cfr. tomo I, pagg. 94-95.

quindi una volta sola nel corso di un mese lunare. Tutti questi fatti si osserverebbero all'evidenza, secondo Edrisi, sulle coste del Marocco, ov'egli era nato (¹).

Ecco un'altra spiegazione non nuova a noi, che già l'abbiamo trovata nell'antichità, ma nuova, a quanto si sappia, fra gli Arabi e da aggiungere alla lunga serie di quelle già riferite; noi non avremo più occasione di citarla in questo capitolo, ma certo l'autorità di chi l'emise avrà fatto sì ch'ella godesse un certo credito fra i posteri. Questa stessa considerazione dovrebbe farsi forse anche per un'altra spiegazione dovuta ad uno dei filosofi che godettero più autorità nel Medio Evo, ad Averroe (Abû Welîd Muḥammed b. Aḥmed b. Muḥ b. Rošd, n. a Cordova circa il 1126, morto il 1198), il quale ne parla in un accenno, purtroppo oscuro e breve, contenuto nel commento alla *Meteorologia* di Aristotele. Il passo della *Meteorologia* (lib. II, cap. I, § 11-12), a noi già noto, parla di argomenti attinenti alle correnti marine e accenna anche ad una specie di librazione (*ταλάντωσις*) delle acque negli stretti, che, come già dicemmo a suo tempo, difficilmente può intendersi come un fenomeno collegato con la marea (²). Il commento di Averroe, che, per la grande autorità dello scrittore riferiamo integralmente, ben inteso nella versione latina, suona così: « Et ex hoc mari (l'Oceano universale) est principium omnium fluminum et marium: fluminum autem propter humiditatem ascendentem ab ipso; marium autem, quia ipsum movetur a medio eius ad omnia maria et omnia maria moventur ad ipsum. Maria autem quae sunt altiora ipso, moventur aquae quae sunt in ipsis ad eum, propterea quia continens est inferius ipso, ad hoc mare autem continens movetur ad ipsum propter expulsionem partium eius per id quod causatur in ipso ex motu invento in ipso per se ex ascensione undarum eius, ascensione inventa in aqua, quasi motus venti; et ille motus vocatur apud Arabes motus extensionis seu dilatationis. Maria autem quae sunt inferiora, dispositio in ipsis est e contrario modo, *seu quod si quae moventur a mari inferiori ad ipsum per ascensionem propter ventum generatum in ipso a caliditate lunae*; ipsum autem movetur a mari inferiori naturaliter, cum desinit seu cum quiescit mare inferius ab isto motu » (³). Questo passo è assai oscuro e accenna in breve a parecchie cose differenti; ma che nelle ultime righe si alluda alla marea o a fenomeni con essa connessi, mi pare s'intenda senza molta difficoltà (⁴). Interpretando nel modo che mi sembra più piano, Averroe vuol intendere che tutti i movimenti dei diversi mari fanno capo a quelli del mare Oceano, di quello cioè che circuiva l'abitabile tutta, secondo un'idea allora generalmente accolta; essi sono causati da differenze di livello fra l'Oceano e i mari secondarî che ne dipendono, onde si gene-

(¹) A questa spiegazione pare si accostasse anche Jaq'ut (circa 1175-1225) autore di un famoso *Dizionario Geografico*; sul quale cfr. *Notices et Extraits des Manuscrits des Bibliothèques* etc., vol. II, pag. 506.

(²) Sui commenti a questo passo torneremo ancora. Fu già notato che nessuno dei commentatori più antichi intende che vi si parli di marea.

(³) Aristotelis, *De Coelo, De Generatione et Corruptione, Meteorologia, de Plantis, cum Averrois Cordubensis variis in eosdem commentariis.* Venezia, Giunti, MDLXII; pag. 427, verso, col. 2ª.

(⁴) Oscuro lo trovarono anche alcuni scrittori del Medio Evo stesso. Cfr. Ant. Ferrariis, *De Situ Elementorum*, nel vol. IV della « Collana di opere scelte inedite e rare di scrittori di Terra d'Otranto ». (Lecce 1868), pag. 9. Questi non dubita affatto peraltro che qui si parli di marea.

rano correnti dagli uni all'altro e viceversa, come dice anche Aristotele (e questo non ha a che vedere con la marea); in particolare poi nei mari il cui livello è inferiore a quello dell'Oceano (eccoci all'argomento delle ultime righe) si dovrebbe avere, secondo Averroe, una corrente continua dall'Oceano a quelli, se non che un vento generato in quei mari dal calor della luna, ne eleva talora il livello e fa sì che essi riversino di quando in quando a lor volta le acque nell'Oceano. Non è improbabile che l'autore voglia alludere a fenomeni che si osservano sulle coste dello stretto di Gibilterra, accennati anche da altri scrittori arabi e generalmente connessi coi movimenti di flusso e riflusso. La frase *propter ventum generatum in ipso a caliditate lunae*, è in sè stessa ben chiara; se non che non si comprende come la luna possa col suo calore suscitar venti *entro il mare* come si intende alla lettera. Nasce perciò il dubbio se qui non si debba intendere la parola *ventum*, forse mal tradotta, nel senso di buffi d'aria o di vapore, che la luna susciterebbe dal fondo del mare e che solleverebbero le acque stesse in modo da far loro vincere le differenze di livello esistenti fra mare e mare; spiegazione non nuova, e, nelle sue linee generali, non estranea agli Arabi. Comunque, da questo solo passo ci sembra impossibile trarre altre conclusioni, e, mancandoci altri accenni, dobbiamo rinunciare a conoscere il pensiero preciso del grande filosofo.

Contemporaneo all'incirca di Averroe è l'astronomo e astrologo Alpetragio (Abû Isḥâq Nûr ed-dîn el Beṭrûǧî, di Pedroche presso Cordova, vivente intorno al 1200), che per la prima volta svolgeva un'ipotesi originale e strana sulla causa della marea nella sua opera sui moti celesti, nota agli Occidentali per la traduzione che ne fece il famoso Michele Scot, e a noi giunta invece in stampa nella versione posteriore di un ebreo napoletano Kalonymos bin David, col titolo di *Theorica Planetarum* [1]. In questo libro egli esponeva una nuova teoria sul moto dei pianeti, che suscitò anche in Occidente molte dispute; la sua teoria della marea appare come un corollario di quella. Il mare segue, al pari dell'aria e di tutti gli altri corpi, eccetto la terra, il moto del primo cielo da Oriente ad Occidente; se non che l'acqua, essendo per la sua posizione il corpo più lontano dal primo mobile (anche più lontana dell'aria che le sta sopra), si muove più lentamente di tutti. Inoltre il moto dell'acqua non è perfetto, cioè in un circolo completo, perchè a ciò si oppone la pesantezza o gravità dell'acqua medesima che fa sì che essa, dopo aver iniziato il suo movimento circolare seguendo l'andamento del cielo, sia riportata subito dopo alla sua posizione primitiva dalla gravità. Il flusso, che si propaga da Oriente ad Occidente, non è altro che l'inizio del moto regolare dietro al primo cielo, il riflusso è il ritorno dell'acqua alla sua posizione primitiva per influenza della gravità.

[1] Cfr. Suter, op. cit., pag. 131. La traduzione di Michele Scot, eseguita già nel 1217, si conserva manoscritta nella Biblioteca di Parigi; quella di Kalonymos, fatta nel 1529, deriva non direttamente, ma bensì da una precedente versione ebraica fatta da Moses bin Tibben sulla metà del secolo XIII. L'edizione, credo unica, del 1531 porta in principio: Theorica Planeta|rum phisicis rationibus probata Al | petragii Arabi nuperrime ad Latinos translata | a Calo Calonymos Ebreo | Neapolitano. Venetiis in aedib. Lucantonii Juntae Florentini A. D. MDXXXI. Il passo che c'interessa è a carta 5 R.

Poichè Alpetragio non ignorava — come del resto non era possibile — le opinioni che ponevano a fondamento del fenomeno l'influenza lunare, in questa sua nuova spiegazione non si deve veder altro che un tentativo di coordinare anche i movimenti dell'acqua al moto del primo mobile, cui obbedivano tutti indistintamente gli altri corpi celesti. E l'astronomo avrà forse in altre opere meglio esposta e delucidata la sua teoria che nella traduzione a noi rimasta è solo brevemente e oscuramente accennata. In Occidente questa ipotesi fu bensì tenuta in una certa considerazione, ma venne generalmente combattuta dagli scrittori del secolo XIII; se fosse seguita in Oriente non si sa, ma si dovrebbe dedurre da un passo di Alberto Magno, che, confutata la teoria di Alpetragio (ch'ei chiama Alpatiatius) dice che essa aveva pur molti seguaci [1]: a noi peraltro di essi non è più giunta notizia, e negli scrittori seguenti vediamo ancora dominare l'idea di un'influenza lunare.

Per Moisè bin Maimun (1135-1204), filosofo ebreo tra i più noti del Medio Evo, il cui libro *La guida dei dubbiosi*, fu celebre presso i contemporanei, il mondo inferiore è retto interamente dal superiore; e in particolare, la sfera della luna muove l'elemento dell'acqua, la sfera del sole il fuoco, le sfere degli altri pianeti l'aria, la sfera delle stelle fisse, la terra. Sull'azione particolare della luna « insegnano i filosofi che la luna abbia una virtù sua propria sull'elemento acqueo, del che è prova il fatto che al crescere della luna crescon anche i mari e i fiumi, al suo decrescere, decrescono. Crescon infatti i mari quando la luna sale (nel cielo) e decrescono quando cala, ossia secondo l'ascesa e la discesa di lei nei quadranti della sfera (celeste) come è noto a quelli che si occupano di tale argomento » [2].

All'azione della luna si richiama anche, per spiegare il fenomeno che ci occupa, Qazwînî (Zakarîjâ b. Muḥammed b. Maḥmûd al Qazwînî; 1203-1283) il quale per altro compila la sua opera geografica, conosciuta sotto il nome di *Cosmografia*, su fonti in gran parte a noi già note [3]. Riguardo al periodo semidiurno, egli si esprime su per giù come Abû Ma'šar, ma quanto alle vicende mensili riferisce invece, sulla fede dei rivieraschi, che il mare cresce dal novilunio (congiunzione) al plenilunio (opposizione), e cala durante l'altro mezzo mese; opinione che sembra fosse molto diffusa, perchè l'abbiamo già trovata in Edrisi e s'intravede anche in Moisè Maimonide e, se vogliamo, in Mas'ûdî che parla di maree più violente solo in corrispondenza del plenilunio. Da Abû Ma'šar ripete pure le notizie sul diverso modo di presentarsi della marea sulle coste e in alto mare. Quanto alla causa della marea, egli non fa che riprodurre la spiegazione di cui dicemmo parlando della setta dei Buoni Fratelli, ma in altro luogo accenna pure, sulle orme di Mas'ûdî, all'idea che questo moto del mare sia qualche cosa di analogo ai turbamenti degli uomini eccitati e biliosi, senza curarsi

(1) « Dimittamus autem nunc dicta Alpatiatii, quia, cum naturaliter voluit loqui, erravit, et in errorem suum induxit *multos alios se sequentes* ». Alb. Magno, *De Proprietat. Elementor.* Lib. I, Tratt. II, cap. 7. Cfr. *De Causis et Processu uni*, Lib. I, Tratt. IV, cap. 7 in fine. Vedi del resto al capitolo seguente.

(2) Moises Maimonides, *Doctor Perplexorum*, Pars II, cap. X. Mi servo dell'edizione di Basilea 1629 con versione latina di Joh. Buxtorfius.

(3) Mi servo della traduzione tedesca di H. Ethé: Zakarîjâ ben Muh. ben Mah. el Kazwînî's, *Kosmographie*. Lipsia, 1868. Vedi a pagg. 39-41; 212; 232-34.

peraltro di tener distinte queste due diverse vedute. Con Ḥordadbeh egli ha in comune il passo relativo ai fenomeni semestrali del mare delle Indie, e con Abû Maʿšar le notizie, ch'egli attribuisce ad un certo Ibn-Elfe-kîh, sul diverso contegno del mar Persico e dell'Indiano nel corso dell'anno. Infine lo spirito religioso aleggia anche sulle pagine di questo geografo, come ci mostra la citazione del Corano: « L'angelo deputato alla sorveglianza dei mari pone il suo piede sul mare e allora avviene il flusso; poi di nuovo lo solleva e allora avviene il riflusso ».

Al pari di Qazwînî, anche Scems-ed-Din di Damasco (Šamsaddîn Abû ʿAbdallâh Muḥammed ibn abî Ṭâlib al Anṣâri aṣ Ṣûfî ad Dimâsqî; 1256-1327) non ha un'opinione propria sulla marea. Nella sua opera cosmografica (1), compilata sulle orme di Mašʿûdî, al Bekri, Ibn H'auqal, Edrisi, ecc., ricorda qua e là più volte il flusso e riflusso nell'Atlantico settentrionale (2), nell'Oceano Indiano e nel Golfo Persico (3), negli stretti di Malacca, ove si ha quattro volte nel corso di un giorno (4), e infine nel Mediterraneo, che si comporta come l'Oceano (5); tutti i mari, egli dice, hanno la marea, eccetto il mar Caspio (6). In quest'ultimo luogo accenna che il flusso e riflusso sia un movimento naturale, come il gonfiarsi e il decrescere del ventre degli animali, della pupilla del gatto ecc., ma questo passo manca in alcuni manoscritti. Altrove parla di un'attrazione del sole sui mari, la quale spiegherebbe perchè l'emisfero australe sia interamente coperto di acqua, come allora generalmente si credeva: il sole, nella sua corsa annuale intorno alla terra, si avvicina, secondo l'autore, di più a quest' ultima nel tempo della sua permanenza nei segni australi, e perciò attrae l'acqua maggiormente e l'accumula nell'emisfero sud, ritraendola dall'emisfero nord, dal quale si mantiene più lontano durante il suo percorso nei segni settentrionali (7). Questa ingegnosa spiegazione, sebbene non abbia, a quanto sembra, relazione diretta col fenomeno che ci occupa, ci mostra però che l'autore credeva ad un'attrazione del sole sul mare, attrazione che del resto poteva anche esercitarsi sulle acque dolci (8). Solo a proposito del golfo Persico egli accenna isolatamente che « il flusso e il riflusso dipendono dal levare e tramontare della luna e dal suo passaggio al meridiano » (9).

Evidentemente Scems-ed-Dîn non fa che ripetere quello che legge qua e là nelle opere che gli servono di fonte, senza occuparsi perciò di dare una spiegazione unica e chiara del fenomeno e neppure di metter d'accordo le varie opinioni, e non sembra meritare quindi l'attenzione cui pare l'abbia fatto segno il Peschel (10).

(1) Shems-ed-Dîn, *Manuel de Cosmographie du Moyen Âge*. Trad. di A. F Mehren. Kopenaghen, 1874.

(2) Op. cit., pag. 174.

(3) Op. cit., pag. 223 e 230.

(4) Op. cit., pag. 198.

(5) Op. cit., pag. 182.

(6) Op. cit., pag. 195.

(7) Op. cit., pag. 4.

(8) Op. cit., pag. 169. La stessa spiegazione dell'emersione della terra nel nostro emisfero si ha in Qazwînî (op. cit., pagg. 210-11), ma qui non è l'*attrazione* del sole che agisce, bensì il suo potere riscaldante. Può darsi del resto che anche Scems-ed-Dîn la intendesse così.

(9) Op. cit., pag. 223.

(10) Peschel, *Geschichte der Erdkunde*, pag. 152.

Anche Ibn-el-Vardi (morto nel 1349) nella sua vasta opera geografica e cosmografica che s' intitola *Pietra preziosa delle maraviglie* e *Perla delle cose mirabili* parla della marea, senza peraltro dir nulla di nuovo. Egli riferisce le spiegazioni attribuite ad Aristotele ed a Timeo, come già accennammo; inoltre quella che fa la luna causa della marea e l'opinione di coloro che la fanno derivare dalla volontà di un angelo da Dio preposto ai mari e che comanda anche ai venti, i quali pure avrebbero parte nel fenomeno della marea all'epoca del plenilunio (¹).

E qui potremmo chiudere la già lunga serie degli scrittori arabi, se non ci avvenisse di trovare ancora un brano degno di nota in un geografo assai posteriore, ma ben conosciuto, in Maq'rîzî (morto il 1441), autore di una famosa *Descrizione dell' Egitto* di cui ora possediamo una bella traduzione francese (²). L'autore vi riassume, tra l'altro, un libro nel quale la ben nota piena annuale del Nilo era spiegata con l'azione della marea. I periodi semidiurno, semimensile e annuo sono ricordati con grande esattezza. A proposito del secondo di questi si nota che delle due maggiori maree sizigiali, è più forte quella della congiunzione (³); e ciò è tanto più degno di nota in quanto, come abbiamo veduto, da molti scrittori arabi precedenti, le vicende mensili della marea sono esposte in modo alterato e confuso. Riguardo al periodo annuo si ha che il flusso comincia quando il sole è agli equinozî, e il riflusso quando il sole è in corrispondenza dei solstizî; se durante i flussi equinoziali la luna è in sizigie, si sommano le due azioni e si hanno maree più forti; così pure se qualche pianeta si trova in prossimità dei due astri agenti.

Il flusso diurno che si produce nell'Oceano non fa sentire il suo effetto nei mari che ne dipendono, a distanza maggiore di un grado, laddove i fenomeni mensili ed annuali si avvertono su tutta l'estensione dei mari secondarî e ne impediscono talora il libero deflusso nell'Oceano (producendo quei turbamenti caratteristici di alcuni stretti); al flusso annuo infine sarebbero dovute le inondazioni del Nilo e dell' Indo.

Per ciò che riguarda la causa del fenomeno, Maq'rîzî comincia dall'esporre e confutare l'opinione aristotelica, riferendo quindi le vedute proprie. Secondo queste, la causa della marea starebbe nei raggi lunari che hanno il potere di riscaldare e per conseguenza dilatare l'acqua marina. Per spiegare come ciò sia possibile, l'autore ricorre al paragone curioso di una bottiglia piena d'acqua, attraversando la quale i raggi solari si concentrano in modo da divenir capaci di dar fuoco ad un batuffolo di cotone; essendo la luna un corpo trasparente, i raggi luminosi che la traversano acquistano un analogo potere calorifico, onde muovono le acque del mare. Bisogna peraltro ammettere che i raggi del sole, attraversando la luna, acquistino uno speciale potere sulle acque, altrimenti non si comprenderebbe perchè i raggi solari diretti non producano ugualmente la marea.

(¹) *Notices et Extraits des Manuscripts* etc., vol. II, pagg. 54-55.

(²) Maqrizi, *Déscription topographique et historique de l'Egypte.* Trad. di U. Bouriant, in Mém. publ. par la Mission archéol. franç. du Caire, 1895, pag. 151 e segg.

(³) Non esiste in realtà differenza di entità fra la marea della congiunzione e quella dell'opposizione, o se teoricamente ve ne è pure una minima, essa è affatto insensibile alle osservazioni più accurate, e negletta anche nel calcolo.

In tal modo abbiamo passato in rapida rassegna le opinioni di geografi, astronomi, filosofi arabi sul fenomeno della marea, sul quale certo essi portarono assiduamente la loro attenzione. I fatti raccolti mediante l'osservazione dai dotti arabi, fornirono agli Scolastici dell'Occidente il materiale di tutte le discussioni, giacchè di osservazioni originali non si ha, come vedremo, quasi nessun esempio nei secoli dal XIII al XV nell'Europa cristiana. Le osservazioni riferite da qualche scrittore sono spesso assai diligenti ed acute e vi si nota anche qualche elemento nuovo, come, ad esempio, la considerazione della natura e qualità delle acque. Quanto ai resultati di esse, si nota che manca spesso fra i diversi autori arabi un accordo perfetto, mentre presso gli scrittori del nord europeo sull'andamento generale del fenomeno trovammo regnare un relativo accordo. In particolare ci colpisce l'incertezza e il contrasto che si trova fra i varî dotti arabi riguardo alle vicende mensili; questo è dovuto probabilmente al fatto che la marea era da lora osservata, come già accennammo, in parecchi mari che si comportano alquanto diversamente fra loro, laddove l'Atlantico settentrionale e i mari dipendenti — campo d'osservazione dei popoli del Nord — presentano caratteri di grande uniformità.

Riguardo al valore scientifico delle spiegazioni proprie degli Arabi, esse vanno distinte in due classi: quelle che si appoggiano ad una base di osservazioni astronomiche, le quali possono esser poste a pari con quelle dominanti nell'Occidente; e quelle che dipendono da speculazioni fantastiche, tutte proprie dei popoli di Oriente. Ma accanto all'elemento originale non manca l'elemento classico; e in particolare sembra, dalle ripetute menzioni che ne abbiamo, che l'opinione di Aristotele fosse presa molto in considerazione.

Le vedute degli Arabi si diffusero molto in Occidente, attaccate a tutto quel corredo di cognizioni astronomiche e astrologiche che fu tramandato dai popoli orientali al mondo medioevale scolastico; perciò, prima di passare a questo, sarà opportuno riassumere quasi in una classificazione schematica le principali opinioni degli Arabi (¹).

I. La marea è un moto *spontaneo* del mare, analogo al respiro degli animali, all'agitarsi dei temperamenti collerici ecc. (Mas'ûdî, Qazwînî, Scems-ed-Dîn).

II. La marea è un moto provocato da corpi celesti:

1° Dal *primo mobile*, al cui moto obbedisce, ma parzialmente, anche la sfera dell'acqua (Alpetragio).

2° Dal *sole*, che esercita una generica attrazione sulle acque marine (Scems-ed-Dîn?), ovvero suscita venti periodici che mettono in moto il mare (Al-Kindi?; Ibn Ḫordadbeh; Edrisi; Jaq'ut).

3° Dalla *luna*. In particolare:

α) La luna esercita sulle acque un'azione calorifica (Mas'ûdî, Maq'rîzî; setta dei Buoni Fratelli; Qazwînî).

(¹) Tralasciamo le opinioni che vedono nella marea l'influenza diretta di Dio, come pure le credenze indiane di cui ci parla Albêrûnî. I nomi posti fra parentesi sono quelli degli scrittori presso cui *leggiamo* le singole spiegazioni, senza pregiudizio dell'autore primo di esse, che talora non ci è conosciuto.

β) La luna solleva dal fondo del mare vapori che gonfiano l'acqua medesima (Mas'ûdî; Averroe?). Questa spiegazione è analoga alla precedente.

γ) La luna muove il mare per una particolare influenza occulta che ha sulle cose umide (Abû Ma'šar; Albêrûnî, e, in maniera un po' divergente, Moisè ben Maimun).

III. Indipendente da tutte le altre spiegazioni è quella secondo cui la marea è dovuta all'alterno mutarsi dell'aria in acqua (flusso) e dell'acqua in aria (riflusso).

Di queste spiegazioni, prescindendo dalla prima, che si ritrova più tardi in Occidente, ma per tradizione classica e non per influenza di scrittori arabi, troveremo prese in considerazione e ripetute, talora con qualche alterazione, nel mondo scolastico *tutte* quelle che pongono, in qualunque modo e per qualunque via, la luna come causa della marea; e di più quella di Alpetragio che coordina i movimenti del mare a tutti gli altri moti originati dal primo mobile.

IX.

La Scolastica. Gli scrittori del secolo decimoterzo.

La nostra scorsa nel campo della scienza orientale, che abbiamo voluto fare ininterrotta, ci ha condotto fin verso la metà del secolo XV. Occorre ora tornare un poco indietro per vedere il contemporaneo svolgersi delle dottrine in Occidente, e penetrare nel seno della scienza scolastica. Ed è appunto col secolo XIII che la filosofia scolastica, uscendo dal ristretto campo della teologia e della morale, si allarga ad una vasta enciclopedia, comincia cioè ad abbracciare tutta intera l'umana conoscenza, suddividendosi e ramificandosi per comprenderne tutti i rami. Quale parte abbia avuto in questa trasformazione della Scolastica l'influenza degli Arabi, non è nostro compito ripetere, importandoci soltanto di mettere in rilievo questa tendenza enciclopedica che la Scolastica acquista ora, per ispiegare in precedenza perchè in queste pagine appariranno d'ora innanzi assai spesso nomi di scrittori generalmente noti come filosofi religiosi o teologi [1]. È che il teologo è in questo tempo bene spesso un enciclopedico, e di enciclopedici ne ha prodotti parecchi il secolo XIII che vide nascere due fra le maggiori intelligenze che il mondo ricordi: San Tommaso e Dante.

Fra i primi seguaci del nuovo indirizzo scolastico troviamo Guillaume d'Auvergne, Robert Greathead e Vincent de Beauvais che tutti e tre ci interessano per l'argomento speciale di cui ci occupiamo.

Guillaume d'Auvergne (Guilielmus Alverniensis), vescovo di Parigi, morto il 1245, è l'autore, fra l'altro, di un libro *De Universo* nel quale troviamo notizie interessanti anche riguardo alla marea; riassumiamo le sue idee più notevoli.

L'aumento e la diminuzione delle acque nel flusso e riflusso non sono che apparenti, e l'andamento del fenomeno è analogo a quello dell'acqua in una pentola messa sul

[1] Cfr. Werner, *Die Scholastik des späteren Mittelalters.* Vienna, 1881-83 e Ueberweg, *Grundriss der Gesch. der Philos. der patristischen und scholatischen Zeit.* (8ª ediz., Berlino, 1898).

fuoco. Qui i vapori che il calore suscita in seno all'acqua la agitano e la fanno salire su nel vaso che la contiene, finchè essa trabocca, e allora si scorge che in realtà la quantità dell'acqua è diminuita. Qualche cosa di simile accade nel mare: il suo fondo è pieno di fori, d'onde escono vapori che provengono dalle viscere ardenti del globo, i quali gonfiano e agitano il mare stesso. Quest'agitazione è maggiore nei mari poco larghi e poco profondi, dove tali vapori non hanno libera uscita, come in vasi di bocca ristretta; mentre nei mari estesi e profondi i vapori si svolgono più liberamente e provocano perciò minori commovimenti. Con questo è spiegato non solo l'andamento alterno della marea, ma ancora la causa di essa, non però la coincidenza coi fenomeni della luna. Ora l'autore avverte quanto ha scritto Abû Maʿšar nella sua Introduzione all'Astronomia, cioè che l'andamento della marea si regola sul corso della luna, ma « questo — confessa candidamente Guglielmo — io per me non l'ho sperimentato » dimostrandoci così ch'egli non è mai stato spettatore del fenomeno e che quanto scrive è portato di pura speculazione. Pure, prestando fede all'autorevole scrittore arabo, egli si domanda qual sorta d'influenza può esercitare la luna, ed emette a questo proposito, come soltanto possibile, un'idea la cui importanza non può sfuggire ad alcuno. « Si verum est (che il mare si regola sul corso della luna), *quod ego utique non probavi*, non reputo longe a veritate si quis dicat, quod mare assurgit ei, tamquam duci suo, vel alias virtutem et potestatem habenti supra ipsum, vel ex aliquo aspectu, *qualem diximus esse inter ferrum et lapidem magnetem*, de quo manifestum est quod magneti ascendenti (ferrum) quasi assurgens coascendit, etc. » [1]. Questa idea che ebbe una singolare fortuna, e fu più tardi tante volte ripetuta fino ai tempi di Keplero che vi ricamò sopra assai, si legge dunque per la prima volta, a quanto si sappia, in questo teologo francese del secolo XIII, e dal modo con cui egli scrive poco dubbio ci può restare che l'idea non sia veramente sua, e ch'egli vi sia giunto soltanto col riflettere quale potesse essere questa influenza lunare che Abû Maʿšar non aveva determinato. Se non che negli scrittori arabi, se questa idea non è mai, ch'io sappia, specificata, vi sono tutti gli elementi che le han dato origine. L'influenza esercitata dai pianeti in genere sul nostro mondo, è più volte paragonata a quella del magnete sul ferro, già da Messahallaḥ che scriveva: « Simile est ergo opus planetarum in hoc mundo lapidi magnetis et ferro » [2] e poi da Ibn Ḫordadbeh già citato, e fu anche oggetto di discussione, pur essendo in generale ammessa [3]. Se ora Moisè ben Maimun avea messo l'influenza della luna sul mare allato a quella del sole, dei pianeti e delle stelle sul fuoco, sull'aria e sulla terra [4], il paragonare quest'azione speciale della luna sulla marea a quella del magnete sul ferro, non ci appare più che quasi una applicazione particolare di quel concetto generale comune a molti scrittori arabi. Possiamo dire che nella mente del Maimonide e di altri ancora, l'idea espressa

[1] Guillelmus Alvern., *De Universo*. Pars I, Sectio I, cap. 50. (*Opera omnia*, Venetiis Ex Offic. D. Zenari MDLXXXI, pagg. 632-33).

[2] Masciallah, *De ratione circuli*, cap. I, stampato insieme a: Julii Firmici Materni, *Astronomicon libri VII*, Basilea, 1533, vol. II, pag. 113.

[3] Steinschneider, *Intorno ad alcuni passi di opere del Medio Evo relativi alla calamita*, in « Bull. di Bibliogr. e Storia delle Scienze Matem. e Fis. » di Boncompagni, vol. IV, pagg. 276-78.

[4] Cfr. cap. precedente, pag. 450.

poi da Guillaume d'Auvergne dovea già esistere e solo è a maravigliarsi che fra gli arabi non se ne trovi, a quanto sembra, menzione. Del rimanente il nostro autore, non solo non si è reso conto della particolare importanza della sua idea, che del resto vedremo non esser tale quale sembrerebbe a primo aspetto, ma non ci si è neppur soffermato; chè anzi, seguitando le sue riflessioni, dice che si potrebbe anche intendere per virtù della luna il suo potere raffreddante: « possibile tamen est ut per virtutem lunae intendatur frigiditas »; è noto infatti « quia frigiditas coagulat vapores in guttas fluviales, ex quibus fiunt inundationes pluviarum, generationes torrentium et augmenta fluviorum et fluminum » e quindi anche l'aumento del mare. Durante il novilunio, il sole, essendo in congiunzione con la luna, ne impedisce quest'azione, perchè è noto che l'influenza del sole è contraria a quella della luna, cosicchè, secondo l'autore, le minori maree si hanno al novilunio e le maggiori al plenilunio, quando la luna esercita liberamente il suo influsso così sul mare, come sugli animali, sulle piante ecc. Chè se poi alcuno volesse asserire che è invece il sole che produce la marea col suo potere riscaldante, anche ciò potrebbe stare; e allora nel novilunio sarebbe la luna che impedirebbe la *virtus calefactiva* del sole *super terras et maria*, mentrenel plenilunio il sole, essendo alla massima distanza dalla luna, eserciterebbe la sua piena influenza. In ogni modo si ricava da ciò, che per Guillaume d'Auvergne, come per molti scrittori arabi, il periodo mensile va da un massimo nel plenilunio a un minimo nel novilunio, è un periodo semplice, anzichè duplice. Ma un'altra cosa si ricava ancora dall'intera trattazione del nostro autore, cioè ch'egli non ha probabilmente osservato mai il fenomeno in natura e discorre per così dire astrattamente, mostrandosi indifferente verso l'una o l'altra spiegazione.

Ben diversa è la spiegazione che per la marea escogita Robert Greathead, vescovo di Lincoln (Robertus Lincolniensis, detto anche Grosseteste, 1175-1253), uomo di larghissima cultura e molto famoso al suo secolo. La sua spiegazione, sebbene richiami alcuni concetti non nuovi particolarmente fra gli Arabi, può nondimeno dirsi pressochè originale ed è certamente per la prima volta chiaramente espressa e determinata in modo da servire di base per ulteriori costruzioni di successivi pensatori [1].

Il fondamento di tale spiegazione è il seguente. I raggi lunari penetrando nell'acqua del mare — che è completamente trasparente — si riflettono nel fondo, che è

[1] Di Roberto Lincolniense cita Duns Scoto (*Meteorol.*, lib. II, Quaest. 2ª, Art. 2º) un opuscolo *De Refractionibus Radiorum*, a me ignoto; ma ciò che da esso riporta lo Scoto, si trova invece identicamente nel *Tractatus de Natura locorum* che fa parte di una collezione di *Opuscula* di Roberto (Venezia 1514), opera rarissima ch'io ho potuto consultare nell'esemplare posseduto dalla Biblioteca Universitaria di Padova, per cortesia del prof. T. Levi-Civita. L'edizione porta in principio: « Ruberti Linconiensis bonarum | artium optimi interpretis | opuscula dignissima | nunc primum in lucem | edita et accuratissime emen | data ». Segue il prospetto dei 19 opuscoli. In fine: « Expliciunt opuscula subtilissima omnium fere septem ar | tium principia perstringentia domini Linconiensis in omni discipli | narum genere profundissimi nunc primum in lucem edita | optime recognita cunctisque mendis expurgata. Man | dato et impensis heredum nobilis viri domini Octaviani Sco | ti civis Modoetiensis et sociorum summa diligentia impressa | Venetiis per Georgium Arrivabenum anno reconciliatae nati | vitatis MDXIV die IV Februarii. — Su Roberto Lincolniense vedi: Perry, *Life and times of bishop Grosseteste*. Londra, 1871.

assai più caldo che non la superficie (1), e riscaldano le acque di fondo, le quali si trasformano in vapore e salgono in bolle verso la superficie (2). Ora, quando la luna sorge, i suoi raggi traversano l'atmosfera per un più lungo cammino, sono più obliqui e si rifrangono maggiormente, ed hanno perciò scarsa efficacia, per cui essi sollevano bensì vapori dal fondo del mare, ma non hanno forza sufficiente per trarli fino alla superficie, onde il mare ribolle e si gonfia senza che tali vapori possano uscirne: è il flusso. Quando invece la luna è alta sull'orizzonte, i suoi raggi hanno, per le opposte ragioni, maggior efficacia e valgono a trarre i vapori dal fondo del mare fino alla superficie, ove si levano nell'aria; cessa perciò la causa del ribollimento, e « le acque del mare tornano naturalmente al loro luogo, affinchè non si faccia il vuoto »; è il riflusso (3).

Ma questa spiegazione non rende ragione del flusso che si verifica contemporaneamente nell'emisfero opposto, non potendosi qui invocare l'azione diretta dei raggi lunari. Alcuni pensano, dice l'autore, che i quadranti opposti della terra siano di uguale commistione (commixtio), per cui subiscono gli stessi effetti, ma l'autore, respingendo questa idea assurda, spiega il fenomeno con la riflessione dei raggi lunari. Questa riflessione avviene ad angolo retto nel cielo cristallino, che è un corpo solido, per cui i raggi riflessi vengono si direbbe quasi a dar l'immagine di un'altra luna nel punto del cielo precisamente opposto a quello ove la luna sta; e questa *luna riflessa* agisce sul mare come la luna vera. Richiamandosi ad un suo trattato *De Speculis*, egli convalida con parecchi esempî la sua teoria, che in questa parte è veramente originale.

È opportuno osservare peraltro che nella spiegazione data da Roberto, il periodo semidiurno della marea risulta del tutto invertito: basti notare che, mentre secondo l'opinione comune (Abû Ma'šar ecc.), quando la luna è alla sua culminazione il flusso è alla massima altezza, secondo il nostro autore invece, in quell'istante, avendo la luna la sua più gran forza nell'aspirare i vapori dal mare, cessa ogni causa di ribollimento, e ha luogo il riflusso. Malgrado ciò, presso gli scrittori posteriori la sottile spiegazione del Lincolniense ebbe notevole fortuna, accettata, come vedremo or ora, non solo da Bacone, scolaro ed ammiratore del nostro, di cui disse: « Solus unus scivit scientias ut Lincolniensis episcopus » (4), ma anche da Duns Scoto e da altri; come fosse più tardi combattuta, vedremo in seguito.

Più che filosofo, Vincent de Beauvais (Vincentius Bellovacensis, morto il 1264) è un enciclopedista, e nella trattazione che nel suo *Speculum Naturale* (5) consacra alla marea, riferisce solo vedute altrui, senza preoccuparsi se alcune di esse sono in contraddizione con altre, e di solito si attiene molto strettamente alle sue fonti. Comincia col riferire l'opinione di Guglielmo di Conches sull'andamento mensile della marea (cap. 14), indi (cap. 18) la spiegazione del medesimo autore del flusso e riflusso in generale, e ciò con notevole esattezza. Cita poi un passo di Isidoro,

(1) Questa credenza che il fondo del mare abbia una temperatura elevata, che abbiamo già accennata e che ritroveremo più volte, è antichissima: se ne ha cenno anche in Platone.

(2) *Tractatus de impressionibus elementorum*, carta 9, verso col. 1ª.

(3) *Tractatus de natura locorum*, carta 11, verso col. 1ª.

(4) Bacone, *Opus Tertium*, cap. X, Londra, 1859, pag. 33.

(5) *Speculum Naturale*, lib. V, cap. 14 e capp. 18-21. Duaci MDCXXIV.

uno di Plinio, dove afferma che la marea è dovuta alla luna e al sole, poi un'opinione attribuita da Plinio stesso ad Aristotele (¹) e un brano di Onorio. Nel capitolo 19 infine fa un riassunto della trattazione di Abû Ma'šar, di cui riferiremo i punti principali, in vista della manchevolezza del testo a noi giunto del grande astronomo arabo. Comincia col distinguere fra i mari in cui la marea ha solo un periodo mensile di flusso dal novilunio al plenilunio e di riflusso nel restante tempo, e i mari che hanno il comune flusso e riflusso giornaliero. Quest'ultimo è spiegato lungamente, ma con poca chiarezza: Vincenzo ripete che le ore d'inizio come pure la durata delle singole fasi sarebbero le stesse in ogni luogo, ove non intervenissero cause di perturbazione; come ad es. se la luna percorre un arco diurno maggiore del notturno, il flusso diurno dura più del notturno. Oscuramente accenna a quelle acque che per esser troppo mobili come i fiumi, o per aver comunicazione con altre acque, non hanno maree, ma solo ondazione; invece spiega il fatto affermato da Albumasar che l'acqua è calda nel flusso e fredda nel riflusso, dicendo che, uscendo dal profondo del mare, ove è molto calore, l'acqua è più calda, e si raffredda solo venendo in superficie (²). Ricorda infine che l'efficacia della luna è accresciuta dal trovarsi essa in congiunzione col sole o con altri pianeti.

In complesso la trattazione di Vincent de Beauvais, nulla più che un centone di brani altrui, scelti senza troppo criterio, ha una ben scarsa importanza, perchè rappresenta solo parzialmente e molto imperfettamente l'insieme delle idee più accreditate al suo tempo.

Prima di entrare nel cuore della Scolastica ed esaminare le opinioni dei giganti di questo secolo, consideriamo ancora poche altre vedute che ci pervengono dalla scienza laica. Il gran Ruggero Bacone (1214-1294) (³) segue nel suo *Opus Maius* le orme del suo maestro Roberto di Lincoln, allorchè applica alla spiegazione della marea la teoria della *Multiplicatio specierum* che forma il fondamento di tutte le sue dottrine fisiche (⁴). Alpetragio aveva fatto dipendere il moto dell'acqua dal moto del primo mobile, asserendo che, per esser l'acqua il corpo più lontano dal primo mobile, essa si muove più lentamente e più irregolarmente, e questo moto produce il flusso e riflusso. Ma a Bacone non piace questa spiegazione, che non tiene conto della irregolarità del fenomeno e della sua dipendenza dalla luna; egli la refuta dicendo che la virtù del primo cielo è così scarsa sull'acqua che su di essa prevarrebbe la gravità, che la tiene al suo luogo, se non intervenissero altre influenze. La marea è prodotta invece dalla luna. E qui Bacone, richiamandosi ad Albumasar che avea determinato « omnes

(¹) « Aristoteles nullum animal nisi aestu recedente expirare affirmat. Observatum est id multum in gallico oceano maximeque in homine compertum ». Plinio, *Hist. Natur.*, II, § 220.

(²) Quest'asserzione insieme ad altri accenni che si trovano in altri scrittori del tempo, getta luce su un fatto degno di esser notato. Molti autori medioevali concepiscono il gonfiarsi del mare nel flusso come un'ascensione delle acque dal profondo in superficie. Nell'ignoranza completa dell'attrazione lunare, quest'ascensione delle acque, perfettamente in opposizione con la teoria moderna, poteva considerarsi come l'effetto più immediato dell'influenza della luna.

(³) Su di lui, specialmente: Werner, *Kosmologie und Naturlehre des R. B.*, in Sitzungber. der kais. Akad. der Wissensch. Vienna, Classe Storico-filol. 1879.

(⁴) Werner, op. cit., pag. 585 e segg. e 597 e segg.

differentias fluxus et refluxus » in relazione con la luna, nota giustamente che l'astronomo arabo non avea detto la causa vera della marea, ma soltanto che la luna era la causa ([1]). Ma la spiegazione data da Bacone è tolta di peso da Robertus Lincolniensis e riferita quasi con le stesse parole, tanto per ciò che si riferisce all'azione dei raggi diretti della luna, quanto per ciò che riguarda la riflessione dei raggi lunari nel cielo cristallino, che Bacone chiama *multiplicatio reflexa* ([2]). Nondimeno presso gli scrittori posteriori Bacone passò per l'inventore di questa spiegazione, ed egli stesso se ne gloria molto, affermando, non senza qualche spudoratezza, di aver per primo spiegato questo fenomeno, uno dei più difficili che la natura presenti ([3]). Ma in realtà una sola aggiunta originale del nostro autore si trova, diretta a spiegare perchè nè il sole nè le altre stelle, ma solo la luna, producano la marea. Il calore del sole è sempre troppo potente e non vale che a consumare le acque marine riducendole in vapori: mentre cioè il calore lunare in certi casi non basta che a far levare vapori dal fondo del mare senza poterli estrarre fino alla superficie, producendo così quel ribollimento che è il flusso, il calore del sole in ogni caso produce il fenomeno ben noto dell'evaporazione. Quanto alle stelle la loro azione è troppo debole per la straordinaria distanza. La sola luna può dunque produrre la marea, che, secondo questa spiegazione, potrebbe dirsi dunque l'effetto di un'evaporazione delle acque di fondo abortita o almeno ritardata ([4]).

Noi vedremo in seguito che una delle obiezioni fatte alla spiegazione baconiana si basa sul fatto che, se veramente fosse la luce della luna la causa della marea, i flussi e i riflussi dovrebbero mancare nel novilunio, alla qual epoca invece sono massimi. Ora, secondo Ludovico Boccaferri (1482-1545) che scrisse un autorevole commento alla *Meteorologia* di Aristotele di cui diremo più tardi, Bacone avrebbe egli stesso eliminata questa obiezione dicendo che nel novilunio la luna invia i suoi raggi sul sole, a cui volge infatti la faccia illuminata, e il sole li riflette nuovamente sul mare, onde essi possono ugualmente agire sulle acque. Questa strana spiegazione non si legge in Bacone e non risale certamente a lui, senza di che non si capirebbe l'accusa che a lui rivolge proprio a questo riguardo Pico della Mirandola ([5]); ma a chi si debba

([1]) « Albumasar in maiori Introductorio Astronomiae determinat omnes differentias fluxus et refluxus et narrat quod accedunt omni die et nocte secundum quod luna est in diversis partibus sui circuli et respectu solis. Sed non dicit nobis causam, nisi quod luna est causa et quod quando luna est in uno loco, tunc est fluxus, quando in alio, tunc est refluxus ». *Opus Maius*, § 85. Venezia, Pitteri, 1750, pagg. 63-64.

([2]) A maggiore intelligenza di questa spiegazione giova notare che per Bacone la luna splende di luce propria, non riflessa dal sole, contro il parere di Vincent de Beauvais e di altri. Cfr. *Opus Tertium*, cap. 37.

([3]) « Unum de famosioribus et maximis exemplis in rebus et de difficilioribus, scilicet de fluxu et refluxu maris explicavi, assignans causam huius per multiplicationem radiorum lunae secundum lineas et angulos, et per reflexiones radiorum, ubi valde pulchra accidit consideratio sapientiae et toti vulgo ignotae, *in qua pulchre potestis conferre cum omni sapiente* ». *Opus Tertium*, cap. 37. L'*O. T.* è scritto in forma di epistola diretta a Clemente V.

([4]) L'influenza della luna è del resto da Bacone estesa a moltissimi altri corpi organici e inorganici, secondo un'idea allora quasi universale. Cfr. *Opus Maius*, ediz. cit., pag. 181.

([5]) Cfr. più innanzi al Cap. XI.

questo ulteriore perfezionamento, se così si può chiamare, dell'ipotesi che diremo baconiana, mi è ignoto.

Scarse informazioni ci danno a riguardo della marea i dotti laici d'Italia. Ne tace Ristoro d'Arezzo nella sua *Composizione del Mondo*, e brevi parole soltanto vi dedica Brunetto Latini (morto intorno al 1295) nel suo *Trésor*, pur composto in francese, ma assai presto divulgato in Italia in quella versione che si attribuisce al Giamboni. Il Latini conosce i fenomeni di marea delle Sirti e dell'Oceano, particolarmente « nelle parti d'India » e riferisce le due più diffuse spiegazioni: « E di ciò dottano li savi perchè il mare Oceano fa cotali marosi e mandali fuori e poi li ritrae tra dì e notte due volte senza finare. E sono state genti che hanno detto che 'l mondo ha anima, e che egli è composto di quattro elementi e però conviene ch'egli abbia spirito, e dicono che quello spirito ha sue vie nel profondo del mare ov'egli ispira fuori, e quando egli ispira fuori e dentro, fa l'acqua del mare andare suso e stare come monte, e poi tornare in entro secondo che il suo espiramento va dentro e fuori. Ma gli astrologhi dicono che non è se non per la luna, perciò che l'uomo vede li marosi crescere e menimare secondo il crescere e menimare della luna di sette in sette dì, che la luna fa le quattro volte in ventotto dì per li quattro quartieri del suo cerchio di cui lo conto ha detto tutto l'essere » (1). L'ipotesi della spontaneità della marea è qui espressa nettamente col classico paragone del corpo vivente e del suo respiro; ma l'autore non sembra propendere per questa spiegazione, perchè già prima, parlando dell'influenza che la luna esercita sulla terra, per la sua vicinanza, ha scritto: « Che quando ella (la luna) cresce, si conviene che tutte le midolle crescano dentro l'ossa, e arbori e piante e tutti animali e pesci crescono loro midolli. E medesimamente lo mare ne cresce, che allora gitta grandissimi frangenti (2). E quando ella menoma, tutte le cose che sono sopra la terra menomano e diventano minori che dinanzi » (3).

Pietro d'Abano (1250-1310), medico e filosofo ben noto, nel suo *Conciliator* parla anche, fra molti argomenti di fisica, di cosmografia e di astronomia, del flusso e riflusso del mare, seguendo le idee di Avicenna e di Abû Ma' šar, ch'ei cita col nome di Geofar (4). La luna esercita un'influenza su tutti gli umori, anche su quelli contenuti nei corpi organici e nell'uomo, anzi questi ultimi interessano sopratutto all'autore, che ne vuol dedurre delle conseguenze sull'andamento di parecchie malattie. Ma il mare, per esser la più estesa congregazione di acque, mostra più chiaramente di tutti la dipendenza dalla luna. E qui l'Aponense, attingendo ad Abû Ma'šar parla delle tre condizioni necessarie al prodursi della marea: la *natura loci*, l'*habitudo aquarum* e infine l'influenza della luna « cuius dominium est super humida »; essa attira e commuove le acque, come il magnete trae a sè il ferro (5). Egli accenna

(1) Latini, *Il Tesoro volgarizzato da Bono Giamboni*, lib. III, 4. La fonte di tali notizie è Solino.

(2) Il testo francese ha *flos*.

(3) Op. cit., lib. II, cap. 47. Confronta, per idee analoghe, l'altra enciclopedia anonima, nota col titolo di *Libro di Sidrac*, pubblicata da Adolfo Bartoli (Bologna, 1868), pag. 154.

(4) *Conciliator Differentiarum quae inter philosophos et medicos versantur*. Venetiis apud Juntas, 1565. Vedi soprattutto la Diff. 88, ma anche le Diff. 114 e 168.

(5) « Potiores enim aquarum ita moventur attractae a luna, sicut plura naturalium se concitant et attrahuntur; magnes enim ferrum evellit ad se ». Diff. 88.

chiaramente al periodo semidiurno e anche, men bene, al periodo semimensile, affermando che le fasi lunari che più interessano sono la congiunzione e l'opposizione. Conosce anche che tra il flusso e il riflusso è interposto un periodo di quiete, ma non in base all'esperienza, bensì per l'affermazione di Aristotele che fra due moti contrarî intercede sempre una breve quiete. Non distinguendo egli la marea dagli altri flussi degli umori d'ogni corpo, non si cura di assegnarle e di discuterne la causa; essa risiede nella luna, che presiede a queste variazioni delle sostanze umide, come il sole e altri pianeti presiedono ad altre mutazioni del mondo inferiore ([1]). Egli dice infine che i periodi esatti dei fenomeni di flusso e riflusso così del mare, come degli altri umori, non si possono determinare con esattezza per le perturbazioni indotte da altre cause secondarie, come le congiunzioni di altri pianeti ecc. Ne conseguita che i periodi delle varie malattie (che dipendono da inquinamento di umori) non son sempre uguali, ma variano da morbo a morbo; peraltro in media i periodi ordinarî di flusso e riflusso durano sei ore ([2]).

Venendo ora ai grandi scolastici del secolo XIII, sui quali, per la loro grande e generale autorità, bisogna pur soffermarci un poco, possiamo notare come carattere comune la chiarezza e l'ordine con cui di solito espongono le loro idee: pregi, che, oltre al facilitarne l'esposizione e l'intendimento, ci danno anche miglior agio di ricercarne le fonti.

Alberto il Grande di Colonia (Doctor Universalis, 1193-1280) espone le sue vedute sulla marea nel trattato *De proprietatibus elementorum* ([3]). Esse non differiscono gran fatto, anche per l'ordine in cui sono esposte, da quelle di Abû Ma'šar sulle orme del quale è condotta l'intera trattazione: se non che Alberto v'introduce qualche modificazione in rapporto alle sue idee sulla natura dell'influenza lunare, non specificata da Albumasar, e che il nostro concepisce in modo assai analogo a Roberto di Lincoln e a Bacone ([4]).

In un primo capitolo l'autore premette alcune notizie generali, e in primo luogo la spiegazione del perchè il sole e la luna soltanto esercitino un'influenza sulle acque; ciò avviene, secondo l'autore, per tre ragioni: primo, perchè soltanto questi due astri emettono raggi capaci di produrre un'ombra sulla terra; secondo, perchè la luna è il corpo più vicino alla terra, mentre il sole poi è come il cuore che somministra a tutti le forze; terzo, perchè la luna, corpo di natura acquea, muove gli umori, e il sole, fonte di calore, li fa bollire. E qui si noti che Alberto parla qui nel principio così del sole come della luna, mentre in seguito l'influenza del sole è affatto taciuta. Segue una distinzione, che deve risalire ad Abû Ma'šar ([5]), fra i mari che

([1]) Si richiama all'autorità di Messahallah. Diff. 88.

([2]) Diff. 88. Cfr. Ferrari Sante, *I tempi, la vita, le dottrine di Pietro d'Abano*. Genova, 1900. pagg. 270-71.

([3]) Libro I, Trattato 2°, capp. 4-8. Cito l'edizione delle opere di A. M. del Jammy (Lugduni, 1651) il cui testo peraltro non è sempre corretto.

([4]) Al contrario di Vincent de Beauvais, Alberto non cita Abû Ma'šar che una sola volta, sulla fine, a proposito delle particolarità dei mari persico e indiano rispetto alla marea; ma è pur chiaro ch'egli dovette aver sempre davanti l'opera dell'astronomo arabo.

([5]) Vedi indietro al cap. precedente, pag. 439.

non hanno marea, mari che presentano il solo periodo mensile di flusso dal novilunio al plenilunio, e di riflusso nel restante tempo, e mari che hanno il regolare periodo diurno. Le altre notizie contenute in questo capitolo riguardano il periodo della marea in relazione al corso della luna ([1]), le differenze di fase fra un luogo e l'altro, la diversità del fenomeno in alto mare e sulla spiaggia e poi nelle diverse spiagge, notizie desunte tutte o quasi dalla trattazione di Abû Ma'šar e già da noi riferite.

Il secondo capitolo, che si propone di spiegare la causa della marea, comincia coll'esporre le tre condizioni necessarie perchè il fenomeno si produca: *dispositio aquae, positio loci, situs lunae*, identicamente a quanto aveva scritto l'astronomo arabo. Solo, parlando della qualità dell'acqua, l'autore aggiunge un cenno sui segni dai quali si può prognosticare l'inizio del flusso: uno di questi è il puzzo che si leva dal mare, quando questo comincia a crescere, ed è prodotto dai vapori che salgono dal fondo; un altro sono i venti, di cui già ha avvertito alla fine del capitolo precedente che, quanto più forti essi sono, tanto più violento sarà il flusso ([2]). Segue poi un brano originale: « Mirabilis autem est effectus lunae in humido elemento, quoniam de longinquo trahit et movet eam (sott. aquam), *sicut magnes ferrum*, eo quod ipsa est prima causa humidi aquei..... per hoc quod ipsa est quasi secundus sol, ex hoc quod lumen accepit a sole ⟨et⟩ facit vaporare verum ⟨vaporem?⟩ qui est in profundo maris ». E qui viene un accenno alla vera causa assegnata dall'autore al fenomeno. Il calore della luna fa dilatare il vapore o gas che si trova nel fondo del mare; questo perciò, dilatandosi, deve cacciare all'insù (extrudere) le acque del mare e ciò produce il flusso; quando poi il vapore è arrivato alla superficie allora « non per lunam, sed *per naturam propriam*, revertitur aqua ad locum suum, et haec vocatur recessio maris (riflusso) ». L'unica differenza, del resto di poco momento, fra Alberto e il Lincolniense è che questi suppone che la luna faccia evaporare le acque di fondo, mentre, secondo Alberto, pare che tali vapori già si trovino nel fondo del mare — forse uscenti dalle viscere della terra — e la luna abbia solo virtù di attrarli verso la superficie, come già esponeva Solino. Ma ciò che manca nel nostro autore è la spiegazione del flusso antipodale, che costituisce la parte più originale della trattazione del vescovo di Lincoln.

Il resto del capitolo è tolto di peso dal fonte arabo; vi si parla della prevalenza del flusso diurno sul notturno quando la luna percorre più di mezzo cerchio sull'orizzonte, e viceversa; vi si dà la regola per trovare la durata del flusso, e, dopo la menzione dello strano comportarsi di alcune acque dolci dell'Arabia, vi si afferma che le acque sono più calde durante il flusso che durante il riflusso; ma la spiegazione di questo fatto ci è data in relazione alle vedute proprie dell'autore: « Cum (aqua) accedit, expirat cum ea vapor inclusus, qui calidus est et corruptus, et ideo illud vocatur a nautis aestus maris et foetor. Cum autem revertitur tunc aqua dilatata super litora, refrigerata est, et ideo frigidior est et minus fortis ⟨foetens⟩ ».

Il terzo capitolo, che è il sesto del Trattato, è consacrato, come il sesto di Abû Ma'šar, all'esposizione dei fattori che *confortano*, come si esprime Alberto, questo

([1]) Il flusso, cominciando, secondo espone l'autore, per un dato luogo, quando la luna tocca il punto Est, è perciò un movimento che si propaga da oriente verso occidente.

([2]) Una correlazione fra la marea e i venti non è nuova; si riscontra già, ma in senso inverso, in Teofrasto.

moto del mare, ossia le cause di perturbazione dell'astronomo arabo, che sono per quest'ultimo sette, cinque sole per il nostro autore.

La prima è la diversa distanza della luna dal sole, che produce il periodo mensile; questo è esposto assai confusamente, sulle orme di Abû-Ma'šar; se non che l'autore, affermando che durante il crescer della luna, l'aumento del mare è maggiore che nel tempo opposto, finisce col dire che il mare cresce per mezzo mese, e decresce per l'altro mezzo « quia aqua eius est spissa et non potest moveri nisi lumine crescente in luna, et non lumine decrescente » [1]. Il secondo fattore di perturbazione (terzo di Abû Ma'šar) è la posizione della luna nel suo epiciclo; il terzo (quarto di Abû Ma'šar), la distanza della luna dallo zenith del luogo, che influisce sulla obliquità dei suoi raggi; il quarto (settimo di A. M.) è la diversa durata dei giorni e delle notti, che si riferisce al sole, per cui dall'equinozio di primavera all'equinozio d'autunno il flusso diurno è più forte nel notturno, e nell'altra metà dell'anno il contrario. Il quinto fattore è dato dall'influenza che può esercitare sul mare la congiunzione della luna con altri corpi celesti o colle varie costellazioni dello zodiaco: ad esempio, quando la luna si trova in pesci o in aquario, *signa aquatica*, la sua azione sul mare è più energica, come pure se si trovi in congiunzione con le Pleiadi che sono stelle molto umide.

Un altro fattore di carattere non astronomico, accennato da Abû Ma'šar e dichiarato da Alberto, sono i venti: siccome il flusso si propaga, come fu detto, da oriente a occidente, un vento d'oriente lo favorisce, un vento d'occidente lo contrasta.

Infine un'azione importante esercitano anche, secondo il nostro autore, la natura del fondo, la presenza di isole e scogli, la conformazione delle coste. Riguardo a quest'ultima, non è priva di valore l'osservazione che, se la costa fa una curva o convessità verso mare, l'impeto del flusso vi si ottunde, mentre al contrario se la costa è concava, o in altri termini se forma un golfo, ivi il flusso acquista una maggiore altezza per l'angustia del luogo che gl'impedisce di espandersi lateralmente; fatto che, come è noto, si verifica assai di frequente, e a cui sono realmente dovute le straordinarie altezze che raggiunge il flusso nel fondo di alcuni golfi stretti e profondi.

Il quarto capitolo della trattazione di Alberto Magno è diviso in due parti: nella prima si combattono due false spiegazioni della marea; nella seconda si accenna all'influenza della luna su altri corpi e fenomeni terrestri. Assurda è anche per il nostro autore l'opinione di Alpetragio, secondo cui il moto del mare segue il moto generale del primo mobile; chè, se ciò avvenisse, il mare ogni giorno presenterebbe un movimento continuo da oriente ad occidente, senza mai rifluire su sè stesso, come gigantesca corrente che cuoprirebbe la terra emersa compiendo il suo circolo al disopra di essa. La confutazione dell'altra opinione, quella della spontaneità della marea, è copiata da Abû Ma'šar (cap. VII) per cui non occorre fermarcisi. Ed egualmente attinta al cap. IX dell'astronomo arabo è l'esposizione delle altre influenze della luna, che sono enumerate con molta minuzia e che, non potendo noi riferire perchè in gran parte

[1] Il testo ha, per errore di stampa: « nisi lumine decrescente in luna et non lumine decrescente! ».

estranee al nostro argomento, segnaliamo tuttavia perchè si trovano qui nella loro espressione più completa.

L'ultimo capitolo distingue, ancora sulle orme di Abû Maʿšar, tre categorie di mari. Alla prima categoria — mari che non hanno marea — appartengono per l'astronomo arabo come per il nostro autore gli stagni e lagune, i mari troppo distanti dall'orbita della luna, e i mari che hanno le rive e il fondo molli e labili, sì che non possono, dice Alberto, contenere i vapori che si generano dal fondo, ma li mandano alla superficie a poco a poco, via via che si producono, senza perciò provocare un sensibile ribollimento (¹). Alla seconda categoria — mari che hanno in sè le condizioni per la marea ma non presentano visibilmente questo fenomeno — appartengono pure tre specie di mari, che non sono però quelle stesse accolte da Abû Maʿšar: in alcuni, per la grande distanza che intercede fra le due sponde opposte, la luna non esercita in un dato momento la sua influenza che da una sponda sola, movendo una sola parte dell'acqua, che si sovrappone all'altra senza dar luogo a marea, come accade nel mare Pisano (²); in altri mari il flusso non apparisce perchè le coste sono ripide e l'acqua non può sormontarle (cio anche in Abu Maʿšar); in altri mari infine la marea non si verifica, a quanto sembra, perchè l'uscita dei vapori dal profondo avviene con troppa rapidità. Alla terza categoria appartengono i mari dove la marea si verifica regolarmente, come il mare Indiano, il Persiano, il Mediterraneo orientale (quod est inter Constantinopolim et Venetias) e il Baltico (gumphus Oceani in aquilone iuxta quod habitamus nos).

Infine Alberto Magno ripete la descrizione del meraviglioso contegno dei mari Persico e Indiano, che, pur essendo comunicanti e vicini, si comportano in modo al tutto opposto riguardo alla marea; perchè il mare di Persia è tranquillo e navigabile dal momento in cui il sole entra in Pesci fino a che entra in Vergine, e burrascoso nel resto dell'anno, il mare Indiano invece si comporta precisamente all'opposto. E qui il nostro autore, trovando troppo vaga la spiegazione data da Abû Maʿšar, che invocava l'influenza del sole, crede di aver rintracciato la vera ragione nella maggiore densità (grossities, spissitas) del mare Indiano che perciò tarda a risentire l'azione degli astri, laddove le acque del mar Persico sono leggere e sottili. Ma è chiaro che simili differenze fra le condizioni di navigabilità dei due mari non possono derivare che dall'andamento dei monsoni, senza che vi abbia alcuna parte il fenomeno che ci interessa. Chiude la trattazione di Alberto Magno l'osservazione sul comportarsi del mar Morto e del mar Rosso, i quali non hanno marea; il che deriva pure, secondo l'autore, dal fatto che le acque di quei due mari sono straordinariamente dense, talchè la luce non vi penetra ad elevare i vapori dal fondo.

Tale, in una esposizione minuziosa, la trattazione di Alberto il Grande, la cui importanza dipende solo dalla grande autorità che godette l'autore. Le poche parti che non sono attinte ad Abû Maʿšar hanno scarso valore; la sua teoria sulla causa

(¹) Si osservi qui come Alberto modifichi e completi alcune delle osservazioni della fonte araba, per metterle d'accordo con le sue vedute sulla causa della marea diverse da quelle di Abû Maʿšar; lo stesso egli fa più tardi a proposito delle particolarità dei mari Persico e Indiano.

(²) Non è certo facile capire che cosa precisamente abbia inteso di dire qui l'autore, e in ogni modo sorprende la menzione del mare Pisano, poco appropriata in questo caso.

del fenomeno ci appare assai meno elaborata che non sia quella di Roberto Lincolniense, a cui si avvicina, e richiama — come già abbiamo detto — l'antica esposizione di Solino. Qui, come presso tutti i teologi scolastici in genere, mancano i dati dell'esperienza personale; la intera trattazione è condotta con metodo dialettico sulla autorità di scrittori precedenti; e se Alberto non ha l'ingenuità di confessare, come Guglielmo d'Alvernia, di non aver mai assistito al fenomeno, il che non è neppur probabile, pure è certo ch'egli non sente alcun bisogno di fondarsi su dati di fatto copiosi e sicuri.

Con San Tommaso d'Aquino (Doctor Angelicus; 1225-1274), si entra assolutamente nel campo delle disquisizioni astratte e astruse proprie della Scolastica. Secondo quanto egli scrive nell'opuscolo *De occultis operibus naturae*, tutti i corpi o gli oggetti che sono alla superficie della terra si muovono e si trasformano seguendo l'influsso di agenti superiori, ma questa azione può derivare dagli agenti celesti in due modi: o secondo la forma e virtù da questi impressa sui corpi terrestri, o secondo la sola virtù del moto derivato dall'agente celeste. « Si qua.... elementaria corpora a superioribus agentibus aliquas actiones vel motus participant, oportet altero dictorum modorum hoc esse, scilicet quod tales actiones consequantur aliquas formas vel virtutes impressas corporibus elementatis a superioribus agentibus, vel quod tales actiones consequantur *solam motionem* elementorum corporum a dictis agentibus » (1). L'acqua del mare nel flusso e riflusso segue l'influenza lunare nella seconda delle dette forme; in altri termini il fenomeno della marea è generato dalla luna col suo moto. Ne segue che il flusso dell'Oceano non è un movimento contrario alla natura dell'acqua, per quanto questa nel suo moto naturale tenda sempre verso il basso; poichè nel nostro caso interviene un agente superiore (2).

Non diversa è l'idea che S. Tommaso esprime nel Commento ad un passo ben noto della *Meteorologia* di Aristotele, dove si parla di quella *ταλάντωσις* delle acque marine, visibile più che altro negli stretti e nei luoghi angusti. Il commentatore afferma che del « fluire » del mare sono molteplici le cause, una delle quali è che « mare fluit propter eius angustiam, ubi ex magno pelago restringitur in modicum spacium ». E soggiunge: « Aqua autem maris saepe movetur huc et illuc et maxime secundum consequentiam ad motum lunae, quae secundum naturam propriam habet commovere humidum: haec autem aquae commotio in magno mari et amplo est immanifesta, sed ubi obtinent parvum locum propter angustiam terrae, magis apparent » (3). Qui dunque ci è data anche la ragione perchè il mare segua, nel suo moto, proprio la sfera della luna; ciò accade perchè, secondo l'autore, la luna ha per virtù propria di commuovere i corpi umidi. Questa opinione è in perfetto accordo con ciò che S. Tommaso dice altrove: che cioè ciascun corpo celeste, oltre la luce, che è comune a tutti, ha una « virtutem determinatam consequentem suam speciem », come quella di inumidire, raffreddare, ecc. (4).

(1) Opuscolo 37 nel vol. XVII delle *Opere* di S. Tommaso. Roma, 1570. Cfr. *Summa*, I, Quaest. 110, art. 3.

(2) *Summa*, I, Quest. 105, art. 6; II, Secund., Quaest. 2, art. 3.

(3) *Comment. in Arist. Meteorol.* nel vol. III, p. 1ª delle *Opere*, (Parigi, 1650), pag. 40.

(4) *In Secund. Sententiar*, Distinctio XV, art. 2 nel vol. VIII delle *Opere*, (edizione di Parigi). pag. 142.

In conclusione dunque la luna agisce sul mare per una *virtus* o ***potentia*** **insita** in lei, che non è la luce e neppur propriamente il moto, ma un'influenza speciale che fa sì che il mare segua il moto della luna ([1]).

Con Egidio Colonna (Doctor Fundatissimus; 1247-1316), fondatore della scuola agostiniana, la questione del flusso e riflusso del mare viene a connettersi con altre questioni assai dibattute, e perciò la spiegazione ne risulta oltremodo complicata; ed è ventura che l'autore abbia una maniera di esprimersi assai chiara, senza di che la sua ipotesi non ci sarebbe certo facilmente intelligibile.

Occorre premettere che Egidio Colonna s'immagina che la terra abbia una forma rotonda, eccetto una grande gibbosità nell'emisfero nord che costituisce l'abitabile, emergendo dall'acqua che ricuopre tutto il resto della sfera terrestre; in questa gibbosità si trovano peraltro grandi avvallamenti in cui l'acqua s' insinua a formare il nostro Mediterraneo e gli altri mari secondarî, congiunti da bracci con l'Oceano universale che si diffonde tutto all'intorno della gibbosità stessa e su tutta la rimanente terra. A questa concezione l'autore stesso avverte che si possono opporre parecchie obiezioni, a distruggere le quali egli consacra alcune pagine: ora una di queste obiezioni è il fatto del flusso e riflusso del mare perchè, com'egli si esprime « si aqua non ascenderet (super terram), non videretur quod mare posset fluere et refluere »; in altri termini la sua concezione dell'abitabile suppone che l'acqua del mare non debba ascendere ad un livello superiore a quello della terra, il che accade invece, secondo l'opinione più comune, nel flusso ([2]).

Per superare questa obiezione Egidio afferma che il flusso del mare non è una ascensione dell'acqua ad un livello più alto di quello della terra, ma un vero aumento della quantità delle acque del mare, come il riflusso è una diminuzione. Ed ecco apparire in Occidente una idea già da noi trovata fra gli Arabi! Questo aumento e diminuzione delle acque marine, l'autore lo attribuisce in sostanza all'azione dei corpi celesti, mostrandosi per altro indifferente fra due spiegazioni. Una di esse vede la causa di ciò nel sole; in certi luoghi cioè, dove il sole sta a lungo sull'orizzonte, l'acqua si evapora (che è quanto dire si trasforma in aria) e perciò ivi le acque del mare diminuiscono; in altri luoghi, come nelle plaghe settentrionali, l'aria al contrario per il freddo si condensa in acqua e perciò le acque del mare crescono. Questa spiegazione, sebbene l'autore non lo dica, può applicarsi alle vicende diurne della marea, ottenendosi però che la quantità delle acque marine diminuisce nel giorno, cresce nella notte. L'altra spiegazione attribuisce il flusso e riflusso (sempre intesi nel senso di aumento o diminuzione della massa delle acque) alla luna « per cuius augmentum et deminutionem augmentantur et deminuuntur omnia humida, propter quod credendum est quod Luna existente plaena plus inspissatur de aëre et plus

([1]) Vedi peraltro ciò che dice nel *Comment. in Aristot. de Coelo et Mundo*, I, lectio IV *b*, (*Opere*, vol. II, P. 2ª, pag. 8) dove ammette che l'acqua segua il moto dei corpi celesti al pari del fuoco e dell'aria, ma secondo una « circolazione incompleta », avvicinandosi in tal guisa, almeno nella forma, all'opinione di Alpetragio.

([2]) Vedi, su questa intricatissima questione dell'acqua e della terra, le due dotte Memorie di Giuseppe Boffito: *Intorno alla « Quaestio de Aqua et de Terra » attribuita a Dante*; in Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, 1901 e 1902.

convertitur de aēre in aquam et fit maior generatio aquarum et fluxus maris est fortior et vehementior quam ea existente non plaena » [1]. Ciò che si dice della luna può applicarsi anche ad altre stelle, alcune delle quali sono calde e fanno evaporare l'acqua, altre sono fredde e fanno condensare l'aria.

Da queste spiegazioni, che risalgono a cause celesti, deriva anche per Egidio Colonna che un tal moto del mare non è contrario alla natura dell'acqua, che, di regola, tende verso il luogo più basso. Se non che nè la prima spiegazione, nè, a quanto sembra, anche la seconda, danno ragione del doppio flusso e riflusso giornaliero, arrivandosi con esse — certamente almeno con la prima — ad ammettere un solo flusso e un solo riflusso per giorno. Ma Egidio Colonna conosceva che l'alternarsi della marea in ventiquattro ore è duplice, e per conseguenza egli è condotto ad un'ipotesi stranissima e direi quasi unica. Egli ammette cioè che la spiegazione data finora (una delle due, a scelta) serva a dar ragione di uno dei due flussi e riflussi giornalieri, mentre l'altro avrebbe una causa del tutto differente, e di tutt'altro genere, cioè il moto generale del cielo. La sfera del fuoco segue, secondo Egidio, il moto del cielo incondizionatamente; la sfera dell'aria lo segue in parte, in quanto che alcune porzioni dell'atmosfera chiuse tra monti restano ferme; la sfera dell'acqua lo segue ancor meno in quanto che soltanto la parte superficiale dell'Oceano riceve la impressione del moto celeste, e in quanto quella tal gibbosità che costituisce la terra emersa si oppone al moto circolare dell'acqua [2]. Ciò è appunto la causa del flusso e riflusso. Poichè l'acqua del mare, seguendo naturalmente il moto del cielo da oriente ad occidente, urta contro una sponda della terra emersa e contro di essa si accumula e anche accidentalmente inonda una parte della riva (flusso), poi per la sua gravità e anche per influenza del moto celeste (?) ritorna indietro urtando contro la sponda opposta; così si ha anche per questa causa un flusso e un riflusso al giorno. Evidentemente le idee così originali di Alpetragio avevano attirato l'attenzione del dotto agostiniano, giacchè questa sua ultima ipotesi non è che l'applicazione della dottrina di quell'astronomo arabo sul moto della sfera acquea ad un globo dove l'abitabile aveva la strana forma assegnatagli da Egidio.

Tale la teoria completa di Egidio Colonna, da lui esposta nelle Questioni sul secondo libro delle Sentenze di Pietro Lombardo [3]. L'originalità di essa risulta, non dalle spiegazioni in sè stesse — che non sono nuove — ma dall'aver combinato due spiegazioni diverse per spiegare i due flussi e riflussi diurni [4]. Quale astrusa e lambiccata teoria ne risulti è evidente a ciascuno, come è evidente anche il motivo che

[1] In questo brano l'autore si riferisce, com'è manifesto, alle vicende mensili e non si vede chiaramente come questa spiegazione potrebbe attagliarsi a quelle diurne.

[2] Queste idee sono proprie di tutta la scienza scolastica e risalgono indirettamente ad Aristotele stesso.

[3] Aegidii Columnae Romani, *In secundum librum Sententiarum Quaestiones*, Pars I, Venetiis apud Franc. Zilettum MDLXXXI. Distinctio XIV, Quaest. 1ª, art. 3 (pag. 597); id., Quaest. 2ª, art. 1, (pagg. 601-603).

[4] È da notarsi peraltro che l'autore emette questa ipotesi come un semplice tentativo di accordare il fenomeno della marea con le sue vedute sulla forma della terra e la posizione dell'acqua. È prova di ciò il passo con cui si chiude la digressione sulle cause del flusso e riflusso:

le ha dato origine: il voler accordare in ogni modo i dati di fatto sul fenomeno della marea con un sistema di vedute già formato e ordinato sulla reciproca relazione della terra e del mare, anzichè costruire una spiegazione sui dati stessi dell'esperienza e su questi soli. Difetto questo quasi generale in tutti gli scrittori dell'epoca medioevale.

Alla scuola di San Tommaso e dei suoi seguaci (tomisti) si oppone, nel campo filosofico-teologico, la scuola capitanata da Giovanni Duns Scoto (Doctor Subtilis: 1265?-1308), invero uno dei più sottili dialettici che la filosofia scolastica ricordi. Del fenomeno della marea si occupò più volte, specialmente nel suo commento alla *Meteorologia* di Aristotele, ove con ordine e con chiarezza ne tratta assai più diffusamente che non avesse fatto San Tommaso [1]. Si può dire che la sua trattazione sia fatta interamente per via di sillogismi; certo in nessun autore è più rigorosamente applicata la dialettica scolastica alla discussione di questo problema.

Alla domanda se il mare abbia un flusso (utrum mare fluat) parrebbe a primo aspetto doversi rispondere negativamente per parecchie ragioni che importa conoscere. In primo luogo, o questo moto sarebbe naturale o violento; ma non violento, perchè allora non potrebbe durare a lungo, non naturale, perchè un elemento ha un solo moto naturale e quello dell'acqua è il moto verso il basso. In secondo luogo, gli altri elementi non hanno flusso e riflusso, quindi neppur l'acqua; altre acque non hanno questo moto, quindi neppur il mare; il Mediterraneo non l'ha, quindi neppur l'Oceano. Infine, ogni corpo sta in quiete nel suo luogo naturale; il mare sta nel suo luogo naturale, dunque deve stare in quiete. Contro tutto ciò sta l'autorità di Aristotele, da cui si rileva che il mare ha un flusso, onde la questione e la necessità di una spiegazione.

Passando a premettere alcune osservazioni generali, l'autore comincia a distinguere il flusso del mare che si verifica da Nord a Sud continuatamente [2], dal flusso seguito da riflusso che si verifica due volte al giorno; questo soltanto ci interessa. Segue poi la triplice suddivisione dei mari stabilita da Abû Ma'šar, che Duns Scoto ripete, attenendosi più strettamente all'originale di ciò che non faccia Alberto Magno; soltanto, parlando dei mari ove il fenomeno si verifica regolarmente, accenna al Mediterraneo, che, secondo lui, non ha maree per ragioni che spiegherà più tardi. Parlando poi del periodo diurno, avverte che esso non comprende un giorno esatto, ma qualche cosa di più, in modo che in un mese non si ha un numero di flussi doppio

---

« Hoc ergo modo *poterit forte* salvari duplex fluxus et refluxus maris in una et eadem circulatione primi mobilis: unum propter augmentum et diminutionem aquarum, et alium propter motum primi mobilis ».

(1) *Meteorologicorum*, lib. II, Quaest. 2ª; in Joh. Duns Scoti, *Opera*, Lugduni, 1639, vol. II, pagg. 63-66.

(2) È opinione comune di questi secoli che il mare si muova continuamente dal polo verso l'equatore. La ragione di questo moto è di solito ricercata in ciò che verso il polo, per il grande freddo, molta aria si condensa in acqua e si ha perciò un eccesso di acque che si dirigono verso l'equatore per compensare il difetto ivi prodotto dalla soverchia evaporazione. Ma un'altra ragione sta anche nella credenza che la terra fosse più alta nelle regioni settentrionali, credenza che è antichissima. Cfr. Aristot., *Meteorol.* II, 1.

del numero dei giorni, ma due di meno, ossia 58 ([1]). Ancora bisogna premettere che nel mare esistono grandi voragini che assorbono e rigettano l'acqua con un ritmo corrispondente a quello dei flussi e dei riflussi. Infine l'autore fa notare che la marea subisce variazioni regolari nel corso del mese e dell'anno: nel corso del mese in quanto « in prima septimana fluxus decrescit, in secunda crescit, in tertia decrescit, in quarta crescit »; nell'anno, in quanto « in hyeme fluxus iste est maior quam in aestate et adhuc maior circa Aequinoctium quam in hyeme vel aestate »; durante le eclissi di luna i flussi sono minori ([2]).

E si passa alla causa della marea. In primo luogo l'autore refuta molto brevemente alcune false ipotesi sul flusso e riflusso, delle quali due sono particolarmente importanti. Secondo una, la marea sarebbe causata da ciò che l'acqua sospinta dal vento urterebbe contro una costa, causando il flusso, e poi respinta e quasi rimbalzando andrebbe ad urtare contro una costa opposta cagionando quivi il flusso, mentre nella prima spiaggia si avrebbe in questo istante il riflusso; un tale moto di va e vieni o di continua altalena dell'acqua fra due coste, continuerebbe così indefinitamente. Una simile spiegazione accennava nel V secolo Eumenio, come vedemmo a suo tempo, e forse risale ad Aristotele, ma ci riesce al tutto nuova in quest'epoca, e, così com'è riferita dallo Scoto, anche puerile; egli infatti la confuta dicendo che questo moto di va e vieni dovrebbe pur finire una volta e in ogni caso non sarebbe mai a periodi così regolari come il flusso e riflusso. L'altra ipotesi ribattuta dal nostro autore è quella, a noi ben nota, che invoca a spiegare il fenomeno l'azione di voragini sottomarine, che ritmicamente attraggono e respingono l'acqua del mare. L'esistenza di tali voragini non nega Duns Scoto, ma osserva giudiziosamente che difficilmente tali voragini potrebbero essere così grandi o profonde da contenere tutta l'acqua che il mare *perde* nel riflusso, ed in ogni caso resterebbe sempre la questione del perchè quelle voragini emettono ed assorbono l'acqua a periodi così esattamente determinati; la questione sarebbe soltanto spostata, non risoluta ([3]).

L'autore ammette che causa della marea è la luna, come prova da un lato la concordanza perfetta fra tal movimento del mare e il corso dell'astro, dall'altro l'influenza che la luna stessa esercita sui corpi umidi (cervello, midolle degli animali, sangue, pinguedine, ecc.). Sul modo d'agire della luna accetta interamente, come abbiamo già avuto occasione di dire, la spiegazione di Roberto di Lincoln, che ripete con scrupolosa fedeltà. Se non che tra le conseguenze ch'egli trae da questa spiegazione vi è quella che l'influenza lunare sia di natura diversa dalla luce, sebbene si propaghi in una coi raggi lunari ([4]). Altra conseguenza è che al polo non si hanno

([1]) Beda aveva asserito invece 57. Sulla ragione, assai ovvia, del fatto, vedi quanto fu detto a proposito di Beda.

([2]) Quest'ultimo fatto è in relazione con le vedute dell'autore sulla causa del fenomeno. Durante le eclissi lunari le maree dovrebbero teoricamente esser più forti, almeno nelle regioni equatoriali.

([3]) « Adhuc staret difficultas quare voragines determinatis temporibus aquam emittunt ed determinatis absorbent ». Op. cit., loc. cit.

([4]) « Tertio sequitur quod fluxus et refluxus maris fit per aliquam influentiam specialem Lunae, aliam ab influentia luminis »: loc. cit.

maree, perchè i raggi della luna giungono ivi troppo obliquamente e non sono capaci di suscitar vapori, salvo forse una volta l'anno, quando la luna è alla massima declinazione, ossia, per il nostro emisfero, in Gemini.

Infine anche il sole e gli altri pianeti sono *concause* della marea, in quanto che i flussi sono più o meno violenti, secondo che la luna si trova in congiunzione col sole o altra stella, ovvero in uno o in un altro dei segni zodiacali.

L'ultima parte della trattazione di Duns Scoto è consacrata alla soluzione di alcuni dubbî. Il primo riguarda proprio quelle voragini sottomarine la cui esistenza l'autore, come abbiamo detto, non nega, ma la cui azione egli dichiara come effetto del flusso e riflusso e non come causa, supponendo che tali voragini abbiano una comunicazione sotterranea col mare, in modo da agire nella stessa guisa di alcuni pozzi noti anche agli antichi posti in vicinanza del mare e presentanti variazioni di livello in corrispondenza del flusso e del riflusso. Sembra che dopo Duns Scoto questa caratteristica spiegazione della marea abbia perduto la sua diffusione, sebbene la si ritrovi riportata, tra tante altre, anche da scrittori molto posteriori [1].

Il secondo dubbio riguarda il modo di comportarsi del mare Mediterraneo, che, secondo l'autore, non presenta i fenomeni di marea, quantunque sembri che la luna debba influire su questo come sugli altri mari. Ma una spiegazione determinata a questo riguardo lo Scoto non sa darla e dice che ciò può avvenire sia perchè il Mediterraneo sia troppo profondo perchè i raggi lunari possano giungervi, sia perchè la luna abbia una speciale influenza sull'Oceano che non ha sui mari che ne sono quasi separati, sia perchè il Mediterraneo abbia in realtà la marea, senza che ciò appaia, per la grandezza (?) del mare stesso [2].

Anche riguardo al perchè i fiumi e i fonti non abbiano marea, l'autore offre parecchie spiegazioni senza decidersi per nessuna; o che le acque dolci, per essere più sottili e leggere, siano più restie all'azione lunare, o perchè la luna abbia un'influenza particolare sulle acque del mare che non ha sulle acque dolci, o perchè in realtà si verifichi anche nei fiumi e nei fonti il flusso, ma in proporzioni così modeste da non potersi da noi percepire.

Un'altra più breve e meno sistematica esposizione dei fenomeni della marea si trova anche nei Commenti al secondo libro delle Sentenze di Pietro Lombardo, dello stesso autore [3], ma poco o nulla di nuovo vi è contenuto. Merita di esser segnalata una maniera moderna di presentare il periodo semidiurno della marea, che è nuova in Duns Scoto. Il flusso in un dato luogo si ha (o si dovrebbe avere in teoria) quando la luna passa al meridiano del luogo, in modo che la congiungente il centro della terra col centro della luna passa per il punto di massima altezza delle acque, ossia per il

(1) Cfr. quanto si dirà nel capitolo di conclusione.

(2) « Aliter potest dici quod illud mare fluit et refluit, tamen *propter magnitudinem illius* fluxus non apparet nobis »: loc. cit. Ma forse in luogo di *magnitudinem* si dovrà leggere diversamente.

(3) Joannis Duns Scoti, *In secundum librum Sententiarum,* Distinct. XIV, Quaest. III. Lugduni; in aedib. J. Crespin, MDXXX, pag. 143 V, col. 1ª-144 V, col. 2ª. Le stesse osservazioni, molto più in breve, nelle *Quaestiones Reportatae Parisienses.* Lib. II, Dist. XIV, Quaest. III, Schol. 1°; in Scoti, *Opera*, vol. XI, parte 1ª, pagg. 341-342. Lugduni 1639.

centro della intumescenza di marea (tumor aquarum); perciò questo rigonfiamento si sposta con la luna, ossia fa il giro di tutta la terra in tanto tempo quanto ne impiega la luna a fare il suo giro nel firmamento, cioè in circa 25 ore, o più esattamente, secondo i calcoli dell'autore, $24^h\ 52'$. Siccome Duns Scoto ammotte e spiega il flusso antipodale, ne deriva ch'egli deve ammettere di necessità un altro rigonfiamento diametralmente opposto al primo, risultandone la concezione di quella deformazione ellissoidica dell'involucro acqueo del nostro globo, con l'asse maggiore rivolto sempre verso il centro della luna, con cui si suol presentare anche oggi, nella teoria statica, il fenomeno fondamentale della marea.

Altre brevi osservazioni sul flusso e riflusso nel Mediterraneo e nei mari comunicanti con l'Oceano c'interessano meno. Sulla causa del fenomeno non si hanno ulteriori spiegazioni; solo che l'autore, attribuendo ad Abû Ma'šar l'opinione che la luna attragga il mare « propter virtutem quandam sibi connaturalem » ripete il paragone del magnete che attrae il ferro [1], e non si mostra alieno dall'accettare l'opinione dell'astronomo arabo, che del resto in fondo non era diversa dalla sua, poichè egli ammetteva che la luna influisse sul mare per una virtù speciale diversa dalla luce. In conclusione Duns Scoto è uno dei più chiari e completi scrittori di questo tempo, e le sue opinioni rappresentano forse quanto di meglio si poteva dire allora, e per l'autorità dello scrittore, non furono senza influenza su quanti vennero dopo.

Assai simile per la forma e in parte per la sostanza alla trattazione contenuta nella *Meteorologia* di Duns Scoto è l'esposizione che fa della marea un Timone Anglo, scrittore della seconda metà del secolo XIII, nelle sue Questioni sulla Meteorologia di Aristotele [2]. Anch'egli comincia la sua esposizione col dire che a prima vista parrebbe che il mare non dovesse aver flusso e ne dà le ragioni, quelle stesse già date dallo Scoto e altre due che non occorre ripetere; riporta in contrario le parole di Aristotele secondo cui si attribuiscono al mare movimenti di flusso, e indi distingue varie specie di questi flussi: ossia quello continuo da Nord a Sud, quello prodotto dal vento (ondazione) e infine il flusso e riflusso che avviene due volte al giorno. Di questo solo ci occupiamo.

Dopo aver notato che questo movimento è proprio dell'Oceano solamente, espone, al pari dello Scoto, il periodo semidiurno, e osserva anch'egli che il tempo in cui si compiono esattamente i due flussi e i due riflussi è più lungo del giorno naturale, e perciò in un mese non si ha un numero di flussi doppio del numero dei giorni, ma *cinque* di meno. Inoltre la marea varia anche secondo le stagioni « quare in autumno et in hyeme sunt maiores fluxus quam in aestate » sempre in relazione al corso della

(1) Non si devo peraltro probabilmente intendere da ciò che tal paragone si leggesse in Abû Ma'šar.

(2) L'edizione da me consultata contiene prima i commenti alla Meteorologia e altri trattati di S. Gaetano Tiene, di cui si dirà in seguito; poi il Commento di Timone, che comincia: « Incipiunt questiones super quatuor libros | Metheororum compilate per doctissimum phi|losophio professorem Thimonem » — In fine: « Opuscula hec impressa fuerunt Venetiis|nutu ac impendio heredum quondam| nobilis viri domini Octaviani Scoti|civis Modoetiensis ac sociorum. Anno salutis MDXXII. Die XXVI Novembris ». — L'autore ha scritto anche un Commento alla Sfera del Sacrobosco, per il quale vedi Boffito, *Intorno alla Quaestio* etc. I, pag. 120.

luna « secundum cursum lunae ». Da tutto ciò deriva che causa di questo moto non può esser altro che la luna: « luna propter vim vel influentiam quam habet super mare oceanum..... est causa elevationis aquarum partium maris et rarefactionis earum ». L'azione lunare si esplica mediante la luce e mediante una particolare sua influenza; e a questo riguardo anche Timone riporta l'intera spiegazione di Roberto di Lincoln con notevole esattezza. Se non che egli si dichiara poi apertamente contrario a questa spiegazione e la confuta osservando che i raggi lunari hanno pochissimo potere calorifico, talchè non solo non valgono a far sollevare le acque marine dopo la riflessione nel cielo cristallino, come ammette Roberto per spiegare il flusso antipodale, ma non producono sul mare nessun effetto anche quando lo percuotono direttamente. Se ciò fosse, egli dice, cioè se la luna avesse qualche potere di dilatare l'acqua marina, prendendo una secchia d'acqua dall'Oceano e facendovi battere i raggi della luna, si dovrebbe veder l'acqua espandersi, il che non è affatto vero; ed è noto anche che, raccogliendo in uno specchio concavo i raggi lunari, non se ne ottiene alcun calore sensibile. Per conseguenza non ha valore quella ipotesi che si vale di un calore qualsiasi prodotto dalla luna. Ma neppur vuole ammettere l'autore che il mare si sollevi per un'influenza particolare della luna o di stelle alle quali la luna possa trovarsi congiunta, perchè in ogni caso una secchia d'acqua marina dovrebbe al pari del mare risentire quelle influenze e perciò presentare fenomeni analoghi a quelli di flusso e riflusso. In questo modo, escludendo l'influenza lunare, l'autore sembra che venga a trovarsi in contradizione con ciò che prima ha asserito, che cioè la concordanza fra i fenomeni dell'Oceano e il moto della luna facesse concludere necessariamente in pro di un'azione di questa su quello. Ma Timone non si ferma qui; egli propone una nuova spiegazione sua propria, la quale peraltro è esposta così malamente che poco se ne può raccapezzare. Per quanto sembra rilevarsi, appare certo ch'egli invochi come causa precipua il sole, il quale senza dubbio esercita un potere calorifico tale da far bollire l'acqua sopra la quale batte, particolarmente nelle regioni poste fra i due tropici, ove i suoi raggi giungono più perpendicolarmente. Quando dunque il sole sorge, le acque delle regioni orientali bollono e si dilatano tendendo a convertirsi in aria: si ha il flusso che dura fino al mezzodì; e questo flusso, che è più che altro un ribollimento del mare, si propaga da oriente a occidente seguendo nella sua corsa il sole. Con ciò peraltro non si ottiene affatto un periodo diurno quale l'autore lo ha esattamente descritto in principio; se non che entra qui in campo l'azione della luna, alla quale di nuovo si attribuisce una *virtus creativa aquae* che si esplica nelle regioni settentrionali dove fa molto freddo. Sembra che Timone voglia intendere che allorchè il sole è in occidente, e nelle regioni orientali si dovrebbe avere il riflusso, perchè l'acqua prima riscaldata e posta in ribollimento dal sole, è ora evaporata, si ha invece un nuovo flusso, perchè l'acqua generata dalla luna nel settentrione, va a riempire il vuoto prodottosi là ove l'acqua si è evaporata. Entrerebbe dunque in campo quella corrente dell'Oceano in direzione meridiana, che era credenza diffusa e comune in tutto il Medio Evo e che i navigatori del secolo XVI e della fine del XV cercarono in realtà nell'Oceano Atlantico.

I fenomeni di flusso e riflusso si osservano, secondo l'autore, meglio di tutti nel mare occidentale perchè « viae maris sunt ibi strictae sicut inter Angliam et Flian-

driam et inter Galliam et Hispaniam ». Chiude la trattazione di Timone una rapida e incompleta spiegazione riguardo a quelle obiezioni che in principio erano state fatte contro il flusso e riflusso del mare.

Come si vede, la trattazione del nostro autore, oltre ad esser molto confusa, è tutta intera un tessuto di contradizioni, poichè Timone, dopo avere, almeno apparentemente, dimostrata l'influenza lunare sull'Oceano, viene poi a negarla in ogni riguardo, senza sapersene da ultimo disfare, allorchè emette una spiegazione sua propria del fenomeno; ciò spiega perchè le sue idee non sembra avessero eco (1).

Prima di chiudere questo capitolo, possiamo ricordare ancora due altri scrittori inglesi, ecclesiastici, della fine del secolo XIII. Uno è frate Bartolomeo Anglico di Glanvilla, che intorno al 1300 scriveva un suo trattato: *De proprietatibus elementorum*, che godette una certa fama (2). Nell'esposizione del periodo diurno egli si richiama peraltro ad un certo Marcio, secondo cui pare che questo periodo fosse semplice: quando cioè la luna sorge, si ha il flusso nelle parti orientali, il riflusso nelle occidentali; al tramonto le fasi s'invertono (3). Il periodo mensile è riferito secondo l'autorità di Macrobio (4).

Riguardo alla causa della marea, si afferma al solito il generico potere della luna sui corpi umidi, e in seguito l'azione della luna sulle acque è paragonata a quella magnetica: « sicut adamas trahit ferrum post se, sicut luna movet et trahit post se oceanum ».

Domenicano, della contea di Norfolk, è invece Nicola Triveth (circa 1258-1328) secondo il quale la luna ha speciale influenza sui corpi umidi per la sua natura particolare e per la sua vicinanza alla terra. La ragione della sua azione sul mare ci è data sulle orme di Roberto di Lincoln che doveva esser ben noto al dotto domenicano (5).

Questa scorsa attraverso gli scrittori del secolo XIII avrà mostrato quanto si fossero fatte più vive in questo tempo le discussioni sul fenomeno della marea, accese certamente soprattutto per influenza degli Arabi. Quanto credito godessero in Occidente le speculazioni di questi — e in prima linea le dottrine di Abû Ma'šar — si rileva facilmente dall'esame delle trattazioni dei maggiori Scolastici i quali tutti prendono le mosse più o meno direttamente dalle vedute di scrittori arabi. Tra le idee prevalenti in Occidente nei secoli precedenti, quando predominava nel nostro campo la cultura nordica, e le speculazioni dei nuovi Scolastici sulle orme degli Arabi, vi è una notevole differenza, ma sarebbe vano parlare di progresso. Le discussioni che siamo andati riassumendo in questo capitolo presentano un carattere comune che me-

(1) Cfr. al capitolo seguente, ciò che si dirà di Alberto di Sassonia.

(2) Explicit Tractatus De Proprietatibus Elementorum editus a | fratre Bartholomeo anglico ordinis fratrum mino|rum. Impressus per industriosum virum Athonium | Korburger inclytum Nurembergae civem. Anno | Salutaris gratiae MCCCCLXXXXII. XX die Junii.

(3) « Unde in suo ortu intumescit mare et crescit ex parte orientali et decrescit ex parte occidentali. Et e converso quum est in occasu crescit mare ex parte occidentis et decrescit ex parte orientis ». *De Propr. Elem.*, lib. VIII, cap. 29.

(4) *De Propr. Elem.*, loc. cit.; e lib. XIII, cap. 21.

(5) Jourdain Ch., *Des Commentaires inédits de Guill. de Conches et de Nicolas Triveth sur la Consolat. de la Philos. de Boèce*; in Notices et Extraits de Manuscr. des Biblioth. ecc., vol. XX, Parte Occidentale, pag. 65.

rita di esser segnalato: esse sono quasi affatto teoriche, astratte, come conveniva, oltre che all'indole dei tempi, anche a quella delle persone che vi si dedicavano, in massima parte persone di Chiesa. Onde non ci desta maraviglia il genere di opere in cui tali dispute trovano posto, che sono, al di fuori degli scritti enciclopedici, quasi sempre commenti più o meno diretti di opere aristoteliche o commenti ai famosi libri delle sentenze di Pietro Lombardo.

La causa della marea è ricercata quasi sempre nella luna, e l'opinione più divulgata è quella che si richiama al calore trasmesso dai raggi lunari, opinione che, inaugurata da Roberto di Lincoln, trovò presto credito fra i dotti, dal momento che il suo autore era riuscito con molto acume a render ragione anche del flusso antipodale mediante la riflessione dei raggi lunari nel cielo cristallino. Il solo Duns Scoto modifica questa spiegazione nel senso di ritenere l'influenza della luna diversa da quella della radiazione, avvicinandosi all'opinione emessa già da Guglielmo d'Alvernia, che, primo, almeno fra gli Occidendali, e seguito poi da altri, paragonava l'influenza lunare alla occulta azione del magnete sul ferro. E già abbiamo rilevato come le idee dello Scoto rappresentino nel complesso quanto di meglio ci offra questo secolo.

Accanto a queste, un'altra spiegazione appare abbastanza diffusa, se non troppo accreditata, in questo tempo: quella dell'arabo Alpetragio, vivente ancora al principio del secolo XIII, il quale, conseguente ad una sua generale teoria sul moto dei cieli, che si vantava di avere per primo svelato nel suo vero essere, si sforzava insomma di ricondurre anche il moto del mare all'obbedienza, sia pur parziale, di quel moto universale cui obbedivano, secondo credenze molto divulgate allora, altri due elementi, l'aria e il fuoco, e sola si sottraeva, nella sua eterna immobilità, la terra. Combattuta da Bacone e da Alberto Magno, questa spiegazione non è veduta di mal occhio da San Tommaso e vi accede in parte Egidio Colonna nella sua astrusissima ipotesi sulle cause del flusso e riflusso.

Unità di vedute non regna affatto dunque in questo secolo; anzi, se dalle idee generali scendiamo alle spiegazioni di fatti particolari, notiamo una gran copia di osservazioni e notizie diverse e spesso astruse, puerili e contradittorie.

Ci resta a vedere adesso quale sorte avessero tutte queste discussioni nel secolo seguente in cui, con la decadenza della Scolastica, comincia ad aleggiare e a farsi sempre più vivo uno spirito di cultura e di tendenze nuove.

X.

Opinioni vecchie e nuove nel secolo XIV.

Nel secolo XIV, accanto ai continuatori dell'antico indirizzo scolastico, troviamo gli inizî di quella rivoluzione del pensiero che sogliamo chiamare Umanesimo, nei letterati e nei poeti, da Dante al Boccaccio. È un secolo confuso e intralciato, e intralciata riuscirà anche la narrazione delle vicende ch'ebbero in questo tempo le varie dottrine sul flusso e riflusso. Sebbene nel Trecento i preludî del moto umanistico si manifestino sopratutto nelle lettere e nell'arte e non ancora nella scienza, pure, dovendo

accennare in questo capitolo anche a qualcuno tra i più noti letterati e poeti del tempo, preferiamo volgerci prima ai tardi rappresentanti della Scolastica che ha nel secolo XIV i sui principali campioni in Jéan de Buridan, Alberto di Sassonia, Marsilio von Inghen e Pietro d'Ailly.

Jéan de Buridan (Joannes Buridanus), il cui nome è anche oggi sulle bocche di tutti per la nota storiella dell'asino, rettore dell'Università di Parigi nel 1327, morto dopo il 1350, si era occupato certamente della marea, ma in nessuna delle sue opere che mi fu dato di consultare, se ne trova il minimo accenno. La sua opinione si legge peraltro brevemente esposta nell'importante commento alla *Meteorologia* di Aristotele di Lodovico Boccaferri bolognese, già da noi ricordato ([1]), e appare analoga a quella di San Tommaso. Il flusso e riflusso del mare è suscitato dalla luna, ma non con la sua luce nè col suo moto, bensì con un'altra virtù sua propria che è detta influenza e che è analoga a quella per cui il magnete attrae il ferro. Questa opinione doveva essere molto diffusa allora, perchè nel nostro commento si legge che insieme al Buridano si accostava ad essa tutta la scuola di Parigi: « omnes Parisienses ». Essa si fondava sull'asserzione comune e generale che la luna fosse dominatrice dei corpi umidi. Se questo è, si diceva, la luna deve avere una virtù propria diversa da quella degli altri astri, per cui muove il mare e gli altri corpi umidi: chè se non avesse altra virtù che la luce e il moto, la sua azione sul mare dovrebbe essere alla pari di quella degli altri astri. Ma a dimostrare l'esistenza di questa occulta *influenza* della luna diversa dalla luce e dal moto, il Buridano e i suoi seguaci aggiungevano a questa prova generica una curiosa prova particolare. Se la luna, come in genere tutti i pianeti, non agissero sulle cose inferiori altro che con la luce e col moto, essi non dovrebbero avere alcuna influenza sulla nascita di un bambino in una stanza ben tappata dove non potessero penetrare nè la luce nè il moto; ma poichè invece *l'esperienza prova il contrario*, è accertata così l'esistenza di una virtù diversa dalla luce e dal moto. Questo ingenuo ragionamento, che però non pareva ingenuo nel secolo XIV, ci mostra che questa influenza della luna sul mare era ritenuta simile a quella per cui la luna stessa e gli altri pianeti influiscono sulle nascite delle creature; non deve perciò trarci in inganno il paragone, spesso ripetuto, di questa influenza lunare all'azione del magnete, paragone che potrebbe farci credere che si concepisse la virtù della luna come una sorta d'attrazione simile alla magnetica, il che sarebbe lontano dal vero, poichè quel paragone è solo diretto ad indicare il fatto di un'azione occulta, che si esercita a distanza, e senza influenzare il mezzo che attraversa.

Noi non istaremo qui a ripetere gli argomenti con i quali il diligente Boccaferri refuti questa opinione, argomenti che tuttavia ci mostrano che le idee del Buridano erano ancora prese sul serio in pieno secolo XVI, quando quegli scriveva il suo pregevole Commento.

([1]) Ludov. Boccaferri, *Lectiones in secundum ac tertium Meteororum Aristotelis*. Venetiis apud Hyeron. Scot. 1570, cc. 13 verso, col. 1ª. Queste lezioni del Boccaferri si trovano anche raccolte, certo per opera di un suo scolaro, in un manoscritto del secolo XVI, posseduto dalla Biblioteca Casanatense di Roma e catalogato col n. 1508. Le lezioni sul flusso e riflusso sono cinque così nel manoscritto come nel testo a stampa, ma il primo è assai più diffuso e spesso più chiaro. Cfr. quanto diremo del Boccaferri e del suo manoscritto nell'ultimo capitolo.

Lo stesso Boccaferri nelle sue lezioni sul flusso e riflusso ci apprende l'opinione di Alberto di Sassonia, che insegnò a Parigi fra il 1350 e il 1360 e di cui ci restano, accanto alle Questioni sulla logica dell'Occam, l'opera sua più nota, una serie di commenti aristotelici, in nessuno dei quali peraltro si leggono accenni alla marea (1).

Isolato fra gli scrittori di questo tempo, Alberto di Sassonia riteneva che la causa della marea fosse il sole: poichè quando il sole ascendeva dall'oriente verso il mezzo del cielo, il suo calore faceva bollire l'acqua e vi generava vapori che la facevano gonfiare; quando invece il sole calava verso l'occaso, l'acqua ritornava al suo primitivo stato, e per il quietarsi dei vapori e per il raffreddamento prodotto su di lei dall'aria circostante. La ragione dell'aver attribuito al sole piuttosto che alla luna l'azione sul mare, ci è chiaramente segnalata dal Boccaferri, a cui lasciamo la parola: « Dici oportet quod propter verba Aristotelis atribuitur iste motus soli et non lunae, quia supra dixit Aristoteles quod inter omnia astra Sol potentius et praecipue agit in ista inferiora, et omnis generatio et corruptio praecipue debet ascribi Soli propter magnitudinem eius et propter velocitatem eius motus, quia sol est maior tota terra 166 vicibus et etiam movetur velocius quam reliqui planetae inferiores quia in 24 horis circuit maiorem orbem et ideo praecipue agit in haec inferiora; ergo ei praecipue ascribitur iste motus aestus et magis quam lunae, *sed et aliquo pauco debet ascribi lunae*, tamen principaliter ascribitur soli ut causae principali huius aestus, quia sol sui accessu et recessu est praecipua causa generationis et corruptionis et alterationis horum inferiorum » (2). Il testo è chiaro e non lascia dubbio che la causa principale e generale della marea fosse da Alberto ricercata nel sole. Ma le parole scritte in corsivo ci mostrano che l'autore non poneva del tutto da parte la luna, e che quindi la sua teoria non doveva esser così semplice come si legge nel nostro manoscritto che qui deve essere incompleto. A conferma di ciò viene un passo del Commento alla Fisica di Aristotele, dove si parla dell'azione della luna sulle acque: « (Luna) non est augmentativa aquarum propter hoc quod influat frigiditatem, sed propter hoc quod influat caliditatem quae sufficit ad hoc quod faciat aquam tumescere et propter hoc dicimus quod *luna est domina aquarum*, non quod sit frigida, sed magis calida » (3). Di qui si rileva che l'influenza della luna era pur sostenuta da Alberto, anzi questo brano della Fisica sembrerebbe a primo aspetto andar poco d'accordo con ciò che apprendiamo dal Boccaferri, il quale pure è così chiaro e reciso da non potersi porre in dubbio; ma si osservi che qui Alberto sostiene, contro l'opinione più divulgata, che la luna influisce sull'acqua per il suo calore, idea la quale sembra aver per conseguenza necessaria che anche il sole, fonte massima di calore, eserciti, e con molta maggior potenza, lo stesso influsso, come appunto sostiene il dotto scolastico. Peraltro questa sua spiegazione doveva essere assai rozza, se, come si rileva ancora dalla esposizione del Boccaferri, essa non dava alcuna ragione dei

(1) È possibile che Alberto ne parlasse nel Commento alla Meteorologia di Aristotele, che probabilmente avrà scritto, ma che peraltro non mi risulta sia stato mai stampato.

(2) Cito da quel Man. Casanat. 1508, in cui si contengono pure le lezioni del Boccaferri come fu già detto. Vedi a cc. 16 verso. Cfr. a cc. 13 verso col. 2ª del testo a stampa che peraltro è più succinto e men chiaro.

(3) Alberti de Saxonia, *Physicorum*, lib. IX, Quaest. IV. Venetiis, apud Jacob. Pentium, MDIV.

flussi notturni (1); e qui troviamo forse il motivo principale per cui l'opinione del nostro autore non è, più tardi, mai più ricordata. Che poi il mare seguisse nei suoi movimenti il corso del sole, ciò era, come pur nota il Boccaferri, pienamente contradetto dall'esperienza.

Nei commenti ai Libri delle Sentenze del Lombardo, scritti da Marsilio von Inghen e da Pietro d'Ailly (1350-1425) non troviamo alcun accenno a spiegazioni del flusso e riflusso, di cui ci offrivano larga messe i commenti di San Tommaso, Duns Scoto e Egidio Colonna; e nella sua ben nota *Imago Mundi*, Pietro d'Ailly non fa che copiare semplicemente i pochi periodi che Isidoro di Siviglia scriveva sulla marea otto secoli prima, e anch'egli compilando da altri (2).

Abbandonando ora il campo della Scolastica e prima di far cenno dei letterati e poeti di questo secolo, dobbiamo considerare una spiegazione che per più riguardi richiama in modo speciale la nostra attenzione. Il suo autore Giacomo Dondi di Padova (1298-1359) si segnala su tutti gli altri scrittori fin qui esaminati, sia per aver scritto un vero trattato sul flusso e riflusso del mare, fondato, a quanto pare, su osservazioni personali, sia per avere emesso una spiegazione che contrasta, pel modo come è ideata e costruita, con tutte le altre di cui è piena la storia di questi secoli. È sommamente a deplorare che il trattato originale del Dondi sia andato irremissibilmente perduto, perchè in esso avremmo un cimelio notevole e curioso insieme di scienza medievale. Ecco intanto quanto scrive a questo riguardo Francesco Scipione de' Dondi in una Memoria consacrata ai suoi due antenati Jacopo e Giovanni Dondi dall'Orologio, attingendo ad una pergamena del privato archivio di casa sua: « Nel tempo della sua permanenza in Chioggia e in Venezia aveva raccolte molte osservazioni sul flusso e riflusso del mare, per la qual cosa ne scrisse egli un Trattato, nel quale, secondo le dottrine di quei secoli, cercò di spiegare e dilucidar quel fenomeno. « *Jacobus de Dundis* — dice la prelodata Pergamena — *D. Joh. Pater composuit Opusculum de causa accessionis et recessionis, atque Maris augmenti et decrementi* ». Del qual trattato concordano tutti gli autori patrii esserne egli l'Autore; e Bernardino Scardeone sopra gli altri [lib. II, col. 9, pag. 205, citato in nota] così parlando di Jacopo: *Is etiam Venetiis aliquando commoratus de fluxu et refluxu Maris per singulos dies sexta quaque hora diligentius quam quisque alius antea commentatus est.* Questa opera rimase manoscritta, nè per quante esatte ricerche io ne facessi, mi fu mai possibile di rinvenirla » (3). Da tutto ciò si rileva che lo scritto di Giacomo Dondi dovette godere una certa fama e che inoltre esso fu preceduto da un periodo di osservazioni sul fenomeno della marea fatte all'estremità settentrionale dell'Adriatico. Quali fossero queste osservazioni disgraziamente non sappiamo, ma di che genere potessero esserne i risultati ce lo apprende quanto leggiamo in un Codice veneto del secolo successivo (1443?) che offre ai naviganti dell'alto Adriatico alcune rozze informazioni sullo stato di quel mare, frutto certo di antica esperienza: « Le acque di

(1) Man. Casanat. 1508, cc. 17 v.

(2) *Imago Mundi*, capp. 49 e 52.

(3) Memoria di Mons. Franc. Scipione marchese De' Dondi Dall'Orologio, canonico della cattedrale: *Notizie sopra Jacopo e Giovanni Dondi Dall'Orologio.* Nei Saggi scient. e letter. dell'Accad. di Padova, anno III (1789), pag. 471.

questo porto (Venezia) si xè queste: quando la Luna xè in Ponente, e Levante, sono tutte le acque basse; e quando xè in Sirocco e Maistro, son mezze piene; e quando la Luna xè in Ostro, le acque son tutte piene; e quando la Luna xè in Greco e Garbin, le acque son mezze vode. Avvisote che le acque in fele comenza zorni quattro della Luna infin a zorni diese, e là xè a punta; e dai undese in suso sono acque seconde fino a zorni 19 della Luna; e da zorni 19 infin a zorni 25 sono de novo le acque in fele; e dai 25 infino a 4 della Luna sono crescenti. Avvisote che in una Luna sono dò Fele, e dò Seconde e dai 7 ai 9 l'acqua non xo move » (¹).

Quale fosse poi la spiegazione che del flusso e riflusso forniva il dotto padovano, ce lo apprende fortunatamente con sufficiente chiarezza Ludovico Boccaferri già più volte ricordato, a cui dobbiamo tante altre interessanti notizie già precedentemente esposte (²).

Jacopo Dondi vede la causa della marea nell'azione combinata della luna e del sole. Ma a questa così importante conclusione l'autore non è giunto affatto in base alle proprie osservazioni; bensì egli la pone a priori, analogamente ad Alberto di Sassonia, basandosi sull'affermazione di Aristotele, che, essendo tutto il mondo soggetto alle influenze dei corpi superiori, i due corpi celesti che più specialmente possono esercitare qualche influenza sono il Sole, per la sua grandezza e la velocità del suo moto, la Luna per la sua vicinanza; ad ambedue questi astri deve dunque ascriversi il fenomeno della marea. In tal modo con questa spiegazione l'autore si schiera in mezzo a quei numerosi che ricercavano la causa della marea in un qualunque effetto della luna, e a quegli altri, come Alberto di Sassonia e i suoi seguaci — se pur n'ebbe — che ponevano unico fattore di tal fenomeno il sole.

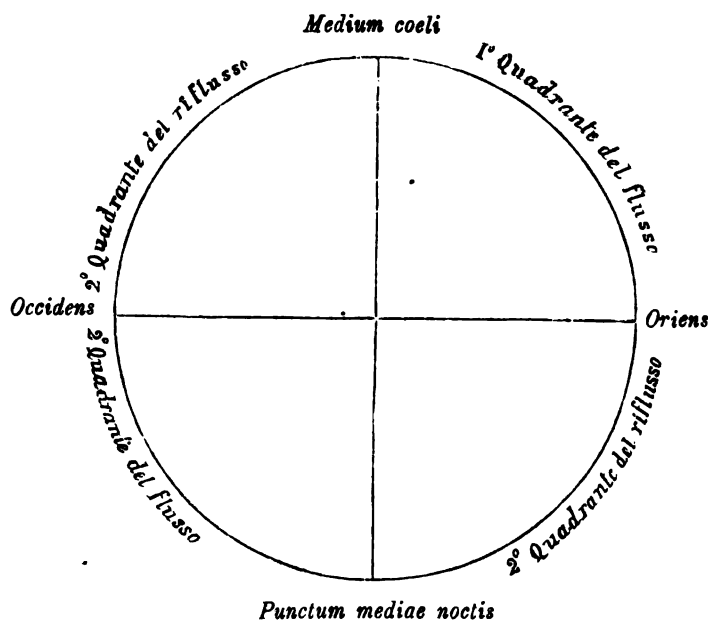
Jacopo comincia subito a notare che il moto della marea è straordinariamente irregolare — sia quanto al tempo, poichè talora il primo flusso comincia prima del sorger del sole e talora dopo, spostando così l'inizio delle altre fasi che si dovrebbero succedere alla distanza di sei ore — sia quanto alla velocità, che in certi casi è maggiore, in altri minore, importando una durata delle varie fasi variabile da tempo a tempo — sia infine riguardo all'altezza delle alte e delle basse maree. La cagione di questa irregolarità è triplice: in primo luogo la diversa posizione (habitudo) dei due astri fra loro; poi la diversa posizione di essi rispetto ad altri astri; infine la *obliquità* dell'orizzonte alle nostre latitudini (³).

(¹) Philosoph. Trans. of the Royal Soc. Londra, vol. LXVII (1777), pagg. 148-49, cit. da Cialdi, *Il moto ondoso del mare*. Roma, 1866, pagg. 402-03. *Acque di fele, mar di fele,* o anche semplicemente *fèle* o *fiele,* sono voci comuni su tutto il litorale dell'Adriatico settentrionale per indicare il flusso e il riflusso poco sensibili due o tre giorni dopo la luna nuova. Cfr. Gravisi, *Termini geografici dialettali raccolti in Istria* (Capodistria, 1904). « Dalli otto alli nove l'acqua non si move » è modo di dire popolare e diffusissimo, del pari che l'altro, altrettanto antico: « Dalli ventuno alli ventidue l'acqua non va nè in sù nè in zue ». Cfr. Riccioli, *Geogr. et Hydrogr. Reformata,* lib. X, cap. IV, § 8.

(²) Boccaferri, op. cit., cc. 13 v. - 14 r. Cfr. *Man. Casan.*, 1508, cc. 17 v. e segg.; cc. 22 r. e segg.

(³) All'equatore il cerchio dell'orizzonte taglia ad angoli retti i cerchi del moto diurno apparente dei corpi celesti; questa condizione speciale ha ricevuto il nome di *sfera retta* o *orizzonte*

La presente figura può aiutarci ad intendere le diversità prodotte dalla posizione variabile della luna e del sole. Quando i due astri sono in opposizione (plenilunio), essi si levano a 12 ore di distanza l'uno dall'altro, ossia quando il sole sorge, la luna tramonta e viceversa. Perciò, mentre il sole percorre il *primo quadrante del flusso*, la luna percorre il *secondo quadrante del flusso;* le due azioni si sommano, e i flussi sono massimi del pari che i riflussi. Quando i due astri sono in congiunzione (novi-

lunio), essi invece sorgono e tramontano insieme, e percorrendo insieme il loro cammino diurno influenzano contemporaneamente lo stesso quadrante: i flussi e i riflussi sono per ciò ancora grandissimi, ma tuttavia minori dei flussi e riflussi del plenilunio, per esser la luna priva di luce e perciò di scarsa influenza.

Nelle due quadrature il sole e la luna si levano e tramontano a sei ore di distanza l'uno dall'altra; perciò mentre il sole percorre un *quadrante di flusso*, la luna percorre un *quadrante di riflusso*; le loro azioni si sottraggono, i flussi e i riflussi sono minimi; si ha quello stato di mare particolarmente tranquillo che i naviganti sogliono chiamare *mar di fele* (¹).

Nei giorni intermedî fra queste quattro epoche fondamentali si hanno condizioni intermedie, essendo i flussi e i riflussi tanto più forti quanto più ci avviciniamo alle sizigie.

---

retto, in opposizione a *sfera obliqua* o *orizzonte obliquo*, che indicano la condizione comune a tutte le altre latitudini. Queste denominazioni risalgono ad Autolico e sono di uso comune nel Medio Evo. Cfr. Günther, *Handbuch der mathemat. Geographie* (Stuttgart, 1890), pagg. 194-96.

(¹) Nel Man. Casan. 1508, si legge: « Et iste motus dicit Jacobus Dominus Patavinus, qui fecit unum tractatum de fluxu et refluxu maris, quod a nautis dicitur *mar dificile* ». Vedi cc. 24v. La scorrettezza del testo è evidente.

Questa maniera di esporre il periodo semimensile della marea, supposto cognito il periodo semidiurno, ricorrendo alla rappresentazione dei quadranti del flusso e del riflusso, ci appare singolarmente perspicua.

La diversa *habitudo* dei due astri rispetto ad altri astri consiste in ciò che quando il sole o la luna si trovano in congiunzione con Venere o con Mercurio o con alcune delle maggiori stelle, si hanno flussi più potenti. Evidentemente si ricordano a questo riguardo Venere e Mercurio, come i due astri a noi più vicini dopo la luna, là dove da altri autori è citato in loro vece Saturno per la speciale virtù raffreddante che gli si attribuiva.

E vediamo ora l'influenza della obliquità dell'orizzonte che è, secondo l'autore, la causa principale di tutte le irregolarità nelle ore d'inizio dei fenomeni, irregolarità che possono arrivare fino al punto che si abbiano, in certe latitudini, ambedue i flussi di giorno e nessuno di notte, o viceversa. All'equatore si ha l'orizzonte retto, e quindi il giorno sempre uguale alla notte, laddove nelle nostre latitudini si ha l'orizzonte obliquo e quindi una disforme durata dei giorni e delle notti. Ma il fenomeno della marea, secondo Jacopo Dondi, *si regola sempre sull'orizzonte retto.* All'equatore quindi il primo flusso comincia al sorger del *sole*, che ha luogo alle sei del mattino, e raggiunge il suo massimo (alta marea) tre ore dopo; a mezzodì comincia il primo riflusso, alle tre del pomeriggio si ha una bassa marea; al tramonto, ossia alle sei pomeridiane, si ha il nuovo flusso con un massimo tre ore dopo, indi un nuovo riflusso con la seconda bassa marea tre ore innanzi l'alba. Questo il periodo diurno regolare della marea che si regola sul corso del sole, visibile soltanto all'equatore.

Alle nostre latitudini l'andamento è ben diverso in causa della diversa durata dei giorni e delle notti. Se in un dato giorno il periodo di luce è più lungo del periodo di tenebre, in modo che il sole sorga p. es. alle 4 ant. e tramonti alle 8 pom., noi vedremo durante il giorno iniziarsi ambedue i flussi, l'uno alle sei del mattino, quando cioè il sole è già sorto da due ore, l'altro alle sei di sera, quando mancano ancora due ore al tramonto. Così alla latitudine di 60° p. es., dove il giorno più lungo dura circa $18^h,30'$ e il sole sorge perciò alle $2^h,45'$ ant. e tramonta a $9^h,15'$ pom. si avranno durante il giorno, ossia durante le ore di luce, ambedue le alte e ambedue le basse maree.

Come si vede, l'autore ha presente il corso del sole secondo il quale si regola, nel suo modo di vedere, il periodo diurno, e da ciò risulta questa strana opinione sull'andamento delle maree, divergente così dalla teoria, come dalla realtà. Bisogna riconoscere tuttavia che la costruzione ideata da Jacopo Dondi è la più scientificamente elaborata di questo periodo, senza che peraltro si avvicini alla verità più di molte altre spiegazioni più astruse. In una sola cosa essa segna un progresso, almeno apparente, sulle altre: nell'invocare cioè a spiegare il fenomeno l'azione combinata del sole e della luna; se non che questa azione è combinata ben male. E riguardo alla natura dell'influenza esercitata da questi due astri, sembra che l'autore non si elevasse al di sopra delle idee comuni, ritenendo anch'egli che l'energia generatrice della marea risiedesse nella luce dei due astri. Su di ciò peraltro il Dondi non si sofferma e sembra che tal questione poco lo preoccupi. Per questo rispetto egli inizia la serie degli autori, di cui sarà poi specialmente fecondo

il secolo XVI, che cercano prevalentemente di render ragione di tutte le irregolarità del fenomeno in relazione alle sue cause celesti, di solito postulate, senza preoccuparsi molto della natura di tali cause, o meglio del genere d'influenza esercitata dagli astri.

Una scorsa attraverso i letterati e i poeti italiani di questo secolo, sebbene non ci apprenda, com'è naturale, nulla di nuovo, giova per altro a darci un'idea della forma sotto la quale gli strani concetti e le astruse spiegazioni del fenomeno penetrassero nel mondo delle persone colte bensì, ma non particolarmente dedite a studî scientifici.

Dante, che da un passo notissimo del Paradiso mostra di conoscere come il mare segua nel suo moto « il volger del ciel della luna » (1) non si sofferma peraltro mai sul fenomeno in particolare, se non in un passo, del resto assai breve, della *Quaestio de aqua et de terra* (2), della cui autenticità ancora si discute dai competenti, con maggior tendenza a ritenerla spuria, malgrado che nessun argomento decisivo sembri esser stato portato ancora al riguardo.

Più diffusamente Cecco d'Ascoli (circa 1270-1327), affermando che « de tute humidità la luna è matre » e ch'essa ha potere anche sugli affetti umani, ecc. (3), accenna poi al periodo semidiurno nei versi che qui riferiamo:

« . . . . omai te leva
Del tuo intelecto movendo le rime
Dicendo a me per chel mar si su leva
E poi sabassa fra la nocte el zorno
E per che alaqua salsa tu me spremi
De zo sentire asai gito atorno;
La luna dico *per sua forma occulta*
Da loriente finchè nel mezo celo
Tirando el mare nasce unda multa
Del mezo cielo fin che a l'ocidente
Si cresse (4) el mare per che non tel zelo
Che sua virtù in si non è possente
Da locidente al mezo poi difora
Rigonfia il mare uerso la luna alta
Da po se possa fin ala prima ora
Lasando el grosso; po l'aqua è salsa
E amara si che non se disolve » etc. (5).

(1) Dante, *Paradiso* XVI, vv. 82-84. Questi versi non han per noi nessuna speciale importanza, e avremmo forse fatto a meno di citarli, se non fossero di Dante. L'autore sembra credere che il *moto* della luna sia la causa efficiente del flusso e riflusso.

(2) « Aqua videtur maxime sequi motum lunae, ut patet in accessu maris ». *Quaestio*, § VII. Sulle supposte fonti di questo passo, cfr. Boffito, *Memoria II*, pagg. 33-34. Io osservo che l'opinione qui espressa va ben d'accordo con quella adombrata nei versi del *Paradiso*.

(3) Cecco d'Ascoli, *L'Acerba*, lib. I, cap. 7.

(4) Forse « *dicresse* ».

(5) *L'Acerba*, lib. IV, cap. 5. L'edizione da me consultata, mancante di frontespizio, porta in fine: « Finise il libro de Ciecho Esculano dicto | Lacerba. Impresso ne lalma patria de | Uenesia per maistro philipo de pietro ne | gli añi del MCCCCLXXVI.

Tra gli imitatori di Dante il figlio Jacopo (prima metà del secolo XIV) e Fazio degli Uberti (circa 1320-1370) hanno occasione di ricordare il fenomeno che ci interessa. Il primo accenna alle proprietà umefacenti della luna, che si rispecchiano così negli « human subgecti » come nel mare, che vediamo « scendere et montare — secondo i suoi scaglioni (fasi) — con aperte ragioni » (¹); il secondo si fa ripetere da Solino. sua guida nel viaggio avventuroso, quanto Solino stesso scrive nella sua opera, ma succintamente e molto oscuramente (²).

E qui sarebbero da citare, accanto agli imitatori di Dante, i suoi Commentatori, che parlano della marea a proposito del passo su riferito del Paradiso. Importantissimo, per la dottrina e chiarezza veramente notevoli, è il Commento di Jacopo Della Lana bolognese, scritto nei primi venti anni dopo la morte del Poeta, che riferiamo integralmente.

« Si è da sapere che sì come appare per astrologi e filosofi la luna si ha ad influire e fare sua operazione sovra tutti li humidi, sì che principalmente hae a muovere lo mare, e tiene questo ordine: quando ella ascende in oriente fino a che ella viene a toccare la linea meridiana, lo mare cede overo cresce, poi come ella declina della linea meridiana, infino che è in occidente, lo mare dicresce; da poi che ella è in occidente fino che ella tocca la linea opposita alla meridiana, che è appellata in astronomia lo angolo della terra, il mare cresce, e da quello angulo infino che ella torna in oriente, lo mare dicresce e così continuo tiene questo ordine. Ancora muove la luna lo mare in un altro modo, tutto che lo preditto sia universale; chè quando la luna è in lo auge del suo deferente, allora lo crescere e il decrescere si è in universale molto grande, e fa pure acqua grande; quando ella è nella opposizione della sua auge, similmente lo crescere e il dicrescere si è grande, ma universalmente fa acqua piccola (³). Quando ella è in le sue longitudini medie, allora non è 'l crescere e 'l dicrescere molto grande; anche pare che l'acque stieno ed è appellato presso lo volgo *acqua di fele*, tutto che in questi cresceri e discresceri si osservi la regola di prima. Ancora gli è la terza diversità che se la luna è congiunta o con Venus o con Jupiter o è in segno aereo od acqueo, allora essa con l'ajutorio di quelli, muove più lo mare; quando è con Marte o con Saturno, in segni ignei ovvero terreni, allora muove meno; e similmente muta modo per le varietadi degli aspetti ch'ella ha con li altri pianeti, e però s'ello non è facile cosa nè leggiera a saper lo corso del mare. Or tutte queste cagioni si vogliono considerare dalla parte attiva. Dalla parte passiva può essere differenzia per li luoghi, che secondo che 'l sito, si rasenterà [secondo che il sito, si risentirà] piuttosto il procedere che 'l decedere; sì come in la grande largura, dove non è impicci nè di isole nè di golfi, adesso sente lo mare la influenza superceleste; là dov'è isole o golfi si è imbrigata l'acqua sì che pare più brigare a sentire e così tarda ogni suo moto. Per esser manchevole in queste così fatte considerazioni, sono stati vitu-

(¹) Jacopo Alighieri, *Il Dottrinale*, Cap. XXIV, vv. 43-54 (ediz. Crocioni). Lapi, Città di Castello, 1895, pagg. 183-84.

(²) Fazio degli Uberti, *Il Dittamondo*, lib. V, cap. 16, vv. 1-15.

(³) Pare che voglia intendere che in questo caso (novilunio) i flussi e riflussi sono grandi, ma minori che nel caso precedente (plenilunio).

perati apresso li saggi già molti marinari, li quali per pratica s'hanno creduto sapere tutto » (¹).

Come si vede, l'esposizione fatta da Jacopo soverchia d'assai quella necessaria pel commento al breve accenno dantesco, il quale. come accade spesso in questi primi commenti, non è che un'occasione della quale il chiosatore approfitta per far sfoggio della sua erudizione. In breve, è qui contenuto un piccolo trattatello sulla marea: vi si distingue fra cause attive, ossia celesti, e cause passive, ossia risiedenti nella natura del mare stesso. Il periodo semidiurno e il quindicinale sono espressi con molta chiarezza al pari della influenza delle altre stelle. L'intera trattazione ci dà un'idea precisa delle notizie più divulgate nel secolo XIV sul fenomeno della marea, ed interessante è anche per noi — a cui certamente sfugge purtroppo una parte del movimento scientifico di queste epoche — l'accenno alle dispute vive e generali sulla marea e particolarmente alle contese fra teorici e pratici.

Giovanni Boccaccio (1313-1375) nella sua operetta *De Montibus*, *Silvis* etc., tocca brevemente del fenomeno dell'Euripo attingendo a trite fonti classiche, e al vocabolo *Oceanus* accenna anche al moto generale di flusso e riflusso « cuius... causas plures reddidere maiores: quas ego, quum alterius videantur considerationis, omittam » (²). E col Boccaccio chiudiamo questa serie dei letterati e poeti del secolo XIV; nel secolo seguente toccheremo di altri e più importanti, allorchè, al fiorire dell'Umanesimo, sorgeranno quelle caratteristiche luminose figure di letterati, di poeti e di scienziati, di cui è ricco il secolo XV e il seguente.

* * *

Colla nostra scorsa attraverso la scienza orientale siamo arrivati al secolo XV, e il secolo XV ci prepariamo ora a percorrere in Occidente, dopo avere indagato nei due secoli precedenti le dottrine dei pensatori d'Inghilterra e di Francia e di Germania e d'Italia. Ma in questi secoli fioriva ancora, assai isolata nel lontano settentrione, la civiltà scandinava e islandese, che, uscita dal periodo delle saghe e dei canti religiosi, aveva prodotto una letteratura non spregevole. Questa, nei secoli XIII e XIV è per vero già cominciata a decadere; ma tuttavia, poichè del secolo XIV, l'Islanda ci offre un testo famoso, il Rymbegla, dove si contengono anche notizie sul fenomeno che ci interessa, sarà forse prezzo dell'opera il riferirle in succinto (³).

L'autore riporta l'asserzione di Beda che la marea segue nel suo moto il corso diurno della luna, aggiungendo che di qui si spiega come il Mediterraneo scorra da oriente ad occidente e poi di nuovo ad oriente circuendo tutta la terra con una fascia

(¹) Jacopo della Lana, *Commento alla Divina Commedia. Parad.*, XVI, 82-84.

(²) Joannis Boccatii de Certaldo, *De Montibus, Siluis, Fontibus, Lacubus, Fluminibus, Stagnis seu Paludibus, de nominibus Maris.* Venetiis, MCDLXXXXVII.

(³) Il *Rymbegla* fu composto in Islanda verso il 1375. L'edizione di Copenaghen 1780: *Rymbegla, seu rudimentum computi ecclesiastici veterum Islandorum* (edidit Stephanus Biōronis) contiene anche la versione latina. Debbo la conoscenza di questo importante testo alla cortesia del dott. Axel. A. Biōrnbo della Biblioteca Reale di Copenaghen. Cfr. anche Thoroddsen, op. cit., vol. I, pag. 100.

o zona continua [1]; ma in seguito abbandona questa idea della influenza lunare, per presentarne un'altra nuova e più strana. Nel novilunio la luna, essendo interposta fra il sole e la terra, impedisce al sole di « seccare l'oceano » e nello stesso tempo manda giù le sue espirazioni umide, talchè per ambedue queste ragioni si hanno forti flussi e forti riflussi [2]. Nel plenilunio poi, essendo la luna opposta al sole, questo riscalda con tutta la sua forza il mare, e si hanno perciò nuovamente maree cospicue [3]. Questi fenomeni particolari delle sizigie sono detti *Missong*.

Come è facile vedere, vi è un'incoerenza inesplicabile nell'ammettere che le forti maree del plenilunio sieno dovute all'azione riscaldante del sole, mentre quelle parimenti violente del novilunio sarebbero dovute al fatto che la luna impedisce questa stessa azione solare [4]. Nelle quadrature i flussi e riflussi sono invece, secondo l'autore, di gran lunga minori.

Riguardo al periodo annuo si nota che i flussi sono minimi nel solstizio estivo (sole in Cancro), perchè allora il sole, essendo alla massima distanza dalla terra, non può esercitare la sua potenza. Negli equinozî invece le maree sono assai violente perchè i raggi solari giungono più normalmente; e in questo tempo i flussi e i riflussi del novilunio sono poi fortissimi per la combinata azione della luna che « precipita nell'Oceano più vapori del solito » [5].

Queste strane vedute ci mostrano che l'osservazione del fenomeno non aveva fatto progressi presso i popoli dell'estremo settentrione e sopratutto non aveva portato a spiegazioni più razionali; chè anzi rispetto alla trattazione di Beda o alla Kongskuggs-ja si potrebbe notare nelle dottrine del Rymbegla un certo regresso. Nè dal secolo XIV in poi la storia della geografia scandinava ci offre più alcun documento notevole pel nostro studio.

XI.

I progressi delle conoscenze fino al termine del Medio Evo.

Il secolo decimoquinto rappresenta, nella storia della scienza, un'èra di preparazione tumultuosa: aprendosi nel fervore di lotte fra la Scolastica già declinante, ma ancor vigorosa, e le nuove tendenze proclamate dall' Umanesimo, si chiude coll'inizio di gigantesche navigazioni che allargheranno alla mente degli scienziati l'orizzonte geografico portando un'intera rivoluzione nel campo della geografia.

(1) L'autore presenta sulla circolazione oceanica una concezione simile a quella di Guglielmo di Conches; se non che alla corona oceanica vien qui sostituito, a causa della sua estensione da Est ad Ovest, il Mediterraneo, sul quale l'autore doveva avere scarse conoscenze. Da questa fascia oceanica si diramano due braccia verso Nord e verso Sud, come dice anche Guglielmo; e con tale circolazione è anche qui collegata l'origine dei venti; ma non, a quanto pare, quella delle maree. Cfr. *Rymbegla*, parte IV, Cap. III, § 10-11, pag. 739 e segg.

(2) *Rymbegla*, loc. cit.

(3) *Rymbegla*, part. IV, cap. IV, § 18, pag. 445.

(4) Cfr. Darwin, op. cit., cap. IV, pagg. 72-73.

(5) *Rymbegla*, parte IV, cap. IX, § 66-68, pagg. 477-79.

Se nei secoli precedenti il teologo era spesso stato al tempo stesso scienziato, ora sorgono figure di letterati e di artisti che si occupano in una di scienza: sorgono particolarmente in Italia, culla di questo gran movimento novatore, dove alla fine del Quattrocento splende la grande figura di Leonardo da Vinci che riassume in sè stesso tutte le conoscenze di questa epoca e l'epoca stessa che si chiude con lui. Facendo la nostra scorsa attraverso gli scrittori del secolo XV fino a Leonardo, ci terremo dunque specialmente in Italia, rintracciando negli scritti di umanisti nuovi e di scolastici vecchi, di poeti e di scienziati, di filosofi aristotelici e di platonici, i progressi delle conoscenze riguardo al fenomeno che ci occupa.

Alla prima metà del secolo XV appartiene Lorenzo Bonincontri, astronomo assai noto al tempo suo, autore, fra l'altro, di un trattato in versi sulle cose del cielo. Che il mare segua nei suoi moti il corso della luna, è per lui indubbio: « huic [lunae] uni parent fluctus motusque sequuntur », e ciò perchè ogni cosa creata si accompagna alle altre cose di natura simile: « appetit ad similem formam quodcumque creatum, Naturamque datam similis natura sequetur ». Ma sul periodo diurno l'autore si esprime molto oscuramente. Sembra che, secondo lui, la luna abbia virtù di attirare il mare particolarmente quando è sul nascere, ma che le acque, una volta eccitate e sollevate, non possano più cessare dal moto, sicchè l'intera massa del mare si leva e segue il corso della luna; ciò dura finchè la luna giunge in Occidente. Ma anche i venti contribuiscono molto a questo movimento del mare che è manifesto soprattutto nell'Oceano aperto. Le massime maree si hanno quando la luna si trova nei segni aquilonari, ossia nella parte della sua orbita che corrisponde all'emisfero nord. Del resto egli afferma che le cause ultime e nascoste del fenomeno sono difficili a conoscersi e che i dotti le adombrano sempre « certa sub nube » quasi timorosi di darne una ragione determinata: « veriti certam reddere causam » [1]. Nè altro egli aggiunge di notevole nelle brevi parole di commento ai pochi versi che Manilio consacrava alla marea nel suo poema astronomico: qui è solo degno di menzione il fatto, del resto pur esso comune, che egli ammette anche un' influenza delle stelle, spiegando il *nunc diverso stimulata recessu* dell'autore latino: « cum aliquando stellae conveniunt [cum luna], aliquando non » [2].

Col rifiorire degli studî classici risorge in questo tempo quella ipotesi della *spontaneità* del moto di flusso e riflusso, che, nella sua forma classica, è rappresentata dal paragone di questo movimento col respiro della terra, considerata come animata. Scrive a questo proposito Leon Battista Alberti (1404-1472): « Alii mare suapte spirare et respirare praedicant, annotaruntque hominem nunquam exspirare a vita nisi aestu decedente [3], quasi argumentum hoc de se praestet cum nostra hominum vita, ipsius maris *animam* motumque aliquid habere affine et consonum » [4]. Questo brano, assai notevole, è certamente attinto a fonti classiche, come dimostrano i brevi

(1) Laurentii Bonincontri Miniatensis | Rerum naturalium et divinarum | siue de Rebus Caelestibus | libri tres | Basilea, s. d., pag. 30-31.

(2) Ho consultato il commento del Bonincontri all'*Astronomicon* di Manilio nella edizione romana del 1482. I versi di Manilio sono lib. II, 92-95. Cfr. indietro al cap. III.

(3) Cfr. quanto dicemmo di Apollonio Tianeo nel cap. III.

(4) L. B. Alberti, *De re aedificatoria,* lib. X, cap. 10.

accenni che gli fan seguito, così comuni nei Classici, ai fenomeni dell'Euripo di Calcide, che « singulos per dies sexies alternat fluxus », alla Propontide e allo Stretto dei Dardanelli.

Ma Marsilio Ficino (1433-1499), commentatore di quel Plotino che in forma filosofica aveva nelle sue *Enneadi* espressa l'idea dell'animalità del mondo, non fa cenno alcuno di questa spiegazione, ritenendo invece che il mare, al pari degli altri corpi umidi, si regoli secondo il corso della luna. Se non che egli asserisce che, quando la luna è in decrescenza, i corpi umidi non perdono in realtà della loro sostanza, ma la ritirano o la riassorbono verso il centro (ad centrum potius cohibere), come si osserva particolarmente nel mare, *che si dilata* quando la luna sale dall'oriente verso le regioni zenitali del cielo, si restringe quando essa dallo zenith scende verso l'occidente. La ragione dell'influenza della luna sui corpi umidi è ricercata da Marsilio nella natura stessa della luna che è umida; e per non essere in opposizione con Plotino il quale aveva asserito che in cielo tutti i corpi sono caldi — quali più quali meno — il nostro autore annota che il calore si tempera per esservi congiunta l'umidità, come accade appunto nella luna che ha in sè più di umidità (humor) che di calore (1).

Un'opinione analoga ha il noto umanista Giovanni Pontano (1426-1503) autore, fra l'altro, di un poemetto sulla Meteorologia (2), in cui adombra poeticamente l'azione della luna sull'Oceano (3), che è più largamente spiegata nel suo *De rebus caelestibus* (4). Qui l'autore dichiara che la luna ha influenza sul mare e sui corpi umidi perchè è essa stessa « frigidae atque humescentis naturae ». Domandandosi poi donde le derivi questa natura particolare, riporta l'opinione di Tolomeo che la luna assorba o aspiri i vapori e le esalazioni umide della terra; ma tale spiegazione non gli garba, perchè osserva che i vapori per loro natura non tendono a levarsi in alto, e ciò fanno solo se riscaldati, nel qual caso peraltro, giunti ad una certa altezza, perdono il loro calore e ricadono in pioggia. Questa obiezione non è priva di valore e mostra una certa indipendenza di idee nell'autore, che non si perita così di porsi in contrasto con la grande autorità di Tolomeo; ma per tutta conclusione il Pontano si limita a dire che, come il sole è di natura riscaldante, senza che questa sua qualità gli provenga da alcuna parte, così si può ben credere che la luna abbia per sua proprietà di inumidire i corpi, senza perciò essere obbligati a ritenere che tale proprietà le derivi dalle evaporazioni terrestri, secondo l'affermazione dell'astronomo alessandrino.

Cristoforo Landino (1424-1504), commentando i noti versi del Paradiso in cui Dante parla della marea, fa a somiglianza di Jacopo della Lana, una breve esposizione del fenomeno, in parte attinta ad Alberto Magno, in parte contenente alcune cose notevoli. Benchè tutti i pianeti agiscano sul nostro mondo, il sole e la luna agiscono

(1) Marsilio Ficino, *In Plotini Ennead.* II, lib. III, Basilea 1580, pag. 118-19. E sulle influenze della luna cfr. anche il *Liber de Sole* (Firenze, 1493) nei primi capitoli, passim.

(2) Cf. Gius. Boffito, *Un poeta della Meteorologia*: *Gioviano Pontano.* Mem. letta all'Accademia Pontaniana. Napoli, 1899.

(3) J. J. Pontani, *Carmina.* Venetiis in aedib. Aldi 1513, carta 110 verso.

(4) *De rebus caelestibus*, lib. I, cap. 7.

con più efficacia, sia per la maggior luce che hanno, sia perchè il sole è come il cuore del sistema e la luna è di complessione simile a quella delle cose inferiori. Si noti poi « che la luna, perchè è contraria alla terra e all'acqua muove tutte le cose, nelle quali la terra e l'acqua predomina ». Ma l'autore soggiunge che non tutti mari si comportano ugualmente « perciocchè alcuni non rigonfiano mai, come è il mare Pisano e Genovese; alcuni rigonfiano dalla nuova luna infin alla quintadecima e nel resto scemano. Alcuni ogni giorno due volte crescono, e due scemano, come è il golfo di Persia, il mare Indo, e di tutte l'isole che son tra questi, et quello ch'è tra Constantinopoli e Venetia e tra l'Inghilterra, la Fiandra e la Germania » (1). Qui espone la vicenda semidiurna della marea e poi tocca delle cause del movimento. « La cagione di questi moti sono due circuli, i quali fanno quattro archi, perciochè il circolo dell'orizzonte fa il primo arco in oriente, e il secondo in occidente, e il circulo meridiano fa il primo arco in mezzo del cielo, il quale è il nostro zenith, e il secondo nella parte opposita sotto terra. Adunque quando la luna tocca gli archi dell'orizzonte, fa muovere il mare al crescere, quando gli archi del meridiano, lo fa scemare » (2). Questa curiosa spiegazione accenna in breve concetti che saranno più tardi molto prolissamente esposti da altri. Ma il Landino non ha fatto e non poteva naturalmente far altro, che raccogliere alcune delle notizie più accreditate al tempo suo.

Accanto a questi umanisti, che rappresentano in certa guisa un nuovo indirizzo degli studî, continuano i libri e i commenti dei teologi all'antica. Nulla di nuovo ci apprende il Commento alla Meteorologia di Aristotele del vicentino Gaetano Tiene, che scrisse intorno alla metà del secolo XV. Commentando il noto passo al principio del secondo libro, anch'egli ritiene che Aristotele intenda quivi parlare « de fluxu ipsius maris quod inest sibi naturaliter » ossia di una sorta di correnti marine, non del flusso e riflusso propriamente detto, la cui causa « est *magis astrologica* quam naturalis ». Nondimeno, facendo una breve digressione a proposito della marea, riconosce come causa di essa la luna, che ha uno speciale dominio sulle cose umide, e perciò fa sollevare ed abbassare l'Oceano, secondo le sue diverse posizioni « per suum lumen et principalius per specialem eius influentiam ». Espone il periodo diurno della marea che è per lui doppio, e quindi soggiunge che vi sono peraltro mari, come i Mediterranei, le cui acque sono così dense e spesse che non possono ricevere l'influenza della luna, altri un po' meno densi che risentono l'azione lunare soltanto una volta al mese (3); e aggiunge infine che i fiumi e gli stagni « propter suam subtilitatem insensibiliter evaporant; ideo tumescentiam et detumescentiam notabiliter non patiuntur (4). Questo breve accenno del Tiene è molto probabilmente riassunto da una

(1) Cfr. Alberto Magno, *De Propriet. Element.*, lib. I, tratt. 2, cap. 8.

(2) « Dante con l'espositione di Cristoforo Landino et di Alessandro Vellutello, sopra la sua Comedia dell'Inferno, del Purgatorio et del Paradiso. Con tauole, argomenti et allegorie, et riformato, riueduto, et ridotto alla sua uera lettura per Francesco Sansovino Fiorentino. In Venetia, Appresso Giouambattista Marchiò Sessa, et fratelli; 1564 ». Vedi pagg. 338 v. a 339 r.

(3) « Aliquod est mare in grossitie medio modo se habens quod solum semel in mense fluit et refluit ». Tale categoria di mari che mostrano soltanto un periodo mensile è ammessa anche da parecchi altri.

(4) L'edizione di Gaetano Tiene è stata già da noi citata a proposito del trattato di Timone che va ad essa unito. Il frontespizio è il seguente: « Gaietanus super Metheo: | Habes Solertissime

qualche trattazione più ampia, del genere di quella di Timone già ricordata, o di quella di Paolo Veneto, di cui veniamo or ora a dire; troviamo in essa, essenzialmente accenni a idee arabe, passate attraverso a molte manipolazioni di Occidentali.

Paolo Nicoletti da Udine (nato nel 1429, morto verso la fine del secolo), più noto sotto il nome di Paolo Veneto, godette, nel secolo XV, gran fama di dotto, in modo da potersi porre il suo nome accanto a quello del contemporaneo Paolo Toscanelli, chiamato, in opposto a lui, Paolo Fiorentino. L'opera di lui più celebrata è la *Summa Naturalium* o *Summa Philosophiae*, grande raccolta di commenti aristotelici, scritta secondo i vecchi modelli. Nella parte IV di essa è contenuta una trattazione sui moti del mare, che ricorda per alcuni rispetti quelle di Duns Scoto e di Timone, essendo condotta sul medesimo schema [1].

L'autore comincia col distinguere, alla maniera stessa di Timone, i moti del mare in tre specie: quello continuo da settentrione a mezzodì, dovuto al fatto che il mare è ad un livello più alto nel Nord che nel Sud, ovvero che nelle regioni settentrionali per il freddo si genera molta acqua, laddove nelle meridionali pel calore molta ne evapora; quello prodotto dai venti, e finalmente il flusso e riflusso propriamente detto. Viene poscia ad osservare che la luna ha un'azione indiscutibile sulle cose umide (ostriche, gamberi, conchiglie) tanto che suol dirsi « *mater humiditatum* » e nel mare produce il noto periodo diurno di due flussi e due riflussi; e notiamo qui, sebbene l'autore lo dica in altro luogo, che il primo flusso, che avviene nel tempo che la luna sale dall'orizzonte verso lo zenith, è più forte del secondo. La concordanza fra i flussi e i riflussi e il corso diurno della luna fa concludere anche a Paolo come a Timone che « luna tam *lumine* quam *influentia* est causa fluxus et refluxus maris »: colla luce perchè ogni luce è « calefactiva et rarefactiva »; colla influenza, perchè « solo lumine lunae non posset esse fluxus maris eo quod fluxus sunt maiores in coniunctione quam in quadraturis et tamen luna plus participat lumen in quadraturis quam in coniunctione; ergo oportet ponere unam influentiam quae sit causa illius fluxus ». L'insufficienza della teoria della luce lunare per spiegare le cospicue maree del novilunio induce dunque logicamente l'autore ad ammettere, accanto alla luce, un'in-

---

lector in hoc codice libros Metheororum Ari|stotelis Stagiritae peripatheticorum princi|pis cum commentariis fidelissimi expositoris | Caietani de Thienis: una cum du|plici translatione, videlicet Francisci Vatabli et antiqua novi|ter impressos ac men|dis erroribusque | purgatos. Tractatum de reactione et Tractatum de intensio|ne et remissione eiusdem Caietani. | Quaestiones perspicacissimi philosophi Thimonis | super quatuor libros metheororum | ». Nell'interno si ha il seguente titolo: « Caietani de Thienis metheororum Ari|stotelis commentarii cum duplici translatione | videlicet Francisci Vatabli et Antiqua: ad Ludovicum rectorem ». La data e il luogo di edizione (Venezia 1522) sono in fondo al trattato di Timone, già descritto.

[1] L'edizione del 1476 da me consultata, assai rara, manca di frontespizio. In fondo si legge: « Explicit sexta et ultima pars Summae Natu|ralium acta et compilata per reverendum ar|tium et theologiae doctorem magistrum | Paulum de Venetiis ordinis fratrum here|mitarum sancti Augustini transsumpta ex | proprio originali manu propria praefati magistri | confecto Venetiis impressionem habuit impen|sis Johannis de Colonia sociisque eius Jo|hannis Manthen de Therretzem. Anno a | natali christiano MCCCCLXXVI ». Alquanto più scorretta è l'edizione, pure veneta, del 1477, emendata da frate Valentino da Camerino.

fluenza o virtù occulta della luna, che anche per lui è analoga a quella per cui il magnete attrae il ferro (1).

Vi sono mari che non hanno marea e mari che hanno un solo flusso e un solo riflusso al mese; i primi perchè sono così densi e *terrestri* che « in eis homines supernatant ligatis pedibus (!!) » e perciò nessuna influenza lunare è sufficiente a generarvi il flusso; i secondi perchè sono ancora tanto densi, sebbene meno dei precedenti, che la luna può sollevarne le acque solo quando è piena; in questi il flusso va dal novilunio al plenilunio, e il riflusso del plenilunio al novilunio successivo.

I flussi e i riflussi sono più forti d'inverno che di estate e di primavera più che di autunno. Il fatto era già stato da molti osservato, ma la spiegazione datane è nuova: « quia fluvii concurrentes ad mare sunt maiores in hyeme quam in aestate, in vere quam in autunno, ideo maiores fiunt fluxus; maiores autem fiunt refluxus ex maiore vigorositate virtutis attractivae lunae in illis temporibus quam in aliis ». Se l'influenza dei fiumi sulla maggiore o minor violenza dei flussi e dei riflussi, è fatto che non ci riesce nuovo, l'altra affermazione che la virtù della luna è più forte d'inverno e di primavera che di estate e di autunno, non ha alcun fondamento di verità. Chiaro invece, quando si tenga presente che l'autore ammette anche un'influenza della luce lunare, è tutto quello che segue: « Et ista causa assignatur quare ii fluxus maiores sunt in oppositionibus et coniunctionibus quam in quadraturis mediis, et maiores in oppositione quam in coniunctione, et maiores ab oriente in medium caeli quam in aliis partibus caeli. Quia luna per virtutem dictam directius et vigorosius respicit mare in punctis illis seu partibus caeli quam in aliis ». Da tutto ciò deriva che all'autore sono noti tutti e tre i periodi della marea, già determinati dagli antichi: il diurno e il mensile che sono per lui correttamente semidiurno e semimensile, e l'annuo che è peraltro assai disforme dal vero.

Segue un'osservazione tutta originale e molta strana. L'autore, consentendo che nei fiumi la marea non si osserva, causa il loro scorrer continuo in una direzione, asserisce peraltro che essi pur si gonfiano per azione della luna, anzi che qualunque acqua risente l'influenza lunare: perfino « un'anfora piena d'acqua, quando la luna arriva in opposizione, si versa al difuori ». Questa singolare affermazione, oltre che sorprenderci in un uomo sano di mente, quale ci appare Paolo Veneto, ci maraviglia tanto più in quanto Timone, la cui trattazione ha molti punti di contatto con questa, si serve della stessa esperienza in senso precisamente contrario, per dimostrare cioè che la luna non ha nessuna particolare influenza sull'acqua. E se questo procedimento di Timone fa sorridere noi cui sono note almeno le leggi di questa occulta azione lunare, esso peraltro può comprendersi nel secolo XIII, mentre l'assurda affermazione di Paolo Veneto non si può capire in alcun modo.

Chiude la trattazione del nostro autore, la solita esposizione, che si legge, più o meno completa, anche nello Scoto e in Timone, delle obiezioni che si fanno a questo moto del flusso e riflusso e la loro confutazione che è anch'essa su per giù sempre la medesima.

(1) « [Luna] per virtutem occultam ipsum attrahit sicut magnes ferrum ». Si osservi come questa tradizione si continui attraverso i secoli, sempre sotto forma di un semplice paragone, nel quale inoltre il carattere comune fra le due influenze è più che altro l'occultezza di esse.

Una sola obiezione è nuova e può sembrare di qualche peso. Se la marea è dovuta anche all'azione della luce lunare, non si comprende come ciò possa avvenire dal momento che la luce della luna non è altro che luce riflessa dal sole, il quale ha, come è noto, la proprietà di consumare l'acqua, anzichè di aumentarla. Ma la risposta è molto semplice: la luce lunare riflessa è più blanda, anche perchè mitigata dalla virtù raffreddante propria della luna, e perciò basta solo a sollevare le acque del mare.

Tali, esposte nell'ordine stesso dell'autore, le idee di Paolo Veneto, che ci dà come un riassunto chiaro delle opinioni ormai vecchie e prossime a decadere dinanzi a concezioni nuove. Tutta la trattazione è, come si è detto, condotta sullo stesso modello e con gli stessi procedimenti scolastici di Duns Scoto e di Timone; e Duns Scoto, che è assai più completo e meglio ordinato, sembra esser stato anche in parte fonte di Paolo Veneto, agostiniano, ma assai divergente nell'età matura dalle idee del fondatore di quella scuola. Ma mentre Duns Scoto, pur attenendosi alla spiegazione di Roberto di Lincoln, sostituisce, come causa della marea, l'influenza occulta della luna alla radiazione sostenuta da Roberto, Paolo Veneto, tacendo la ingegnosa spiegazione del Lincolniense, che deve pur presupporre, combina radiazione e azione occulta, senza lasciar veder chiaramente in quali rapporti stieno fra loro queste due cause.

Anche a concetti antiquati è informata la trattazione che alla marea consacra Gregorio Reisch nella sua *Margarita Philosophica*, che, sotto forma di dialogo tra maestro e discepolo, ci presenta un riassunto enciclopedico delle conoscenze del tempo, e fu molto in voga nel secolo XV e ancor più tardi [1]. La sua trattazione offre alcuni punti di contatto con quella del tipo di Duns Scoto, ma in parecchi altri se ne stacca, e non procede per via di sillogismi, bensì in semplice forma espositiva quale conviene ad un dialogo.

« De fluxu et refluxu maris quod eodem die (ut aiunt) bis *aut quater* fieri solet, quid affers? » chiede il discepolo volonteroso di apprendere; e il maestro, premesso che la causa è da riferirsi alla luna, *humidorum dominatrix*, espone le vicende mensili del fenomeno risuscitando una opinione antica, che si legge in Guglielmo di Conches. Nel novilunio essendo luna e sole in congiunzione, i loro raggi s'impediscono a vicenda e non possono rarefare o riscaldar l'aria che perciò si condensa in acqua, e si ha una crescita del mare « in substantia »; nel plenilunio al contrario, la luna, oltre a risplendere di pieno splendore, non impedisce più al sole di inviare i suoi raggi sul mare, il quale, ricco com'è di vapori nel suo seno, si gonfia e ribolle *ad instar lactis calefacti* (!!). Questa crescita del mare nel plenilunio non è di sostanza, ma *per accidentem*, come si diceva allora, perchè conseguenza di una rarefazione delle acque. Esponendo già la spiegazione, quasi identica, di Guglielmo di Conches, abbiamo notato come essa si distingua da tutte le altre del tempo, perchè attribuisce i maggiori flussi del novilunio ad un vero e proprio aumento nella massa delle acque oceaniche; il Reisch è della stessa opinione, anzi batte su questo fatto, segnalando tale accrescimento delle acque *in substantia*, in opposizione a ciò che avviene nel plenilunio. Quello che

[1] Gregor Reischius, *Margarita Philosophica*, cum addictionibus novis ab auctore suo, studiosissima revisione quarto super additis. Basileae, Michael Furterius, MDXVII, lib. IX, cap. 16.

avvenga nel tempo interposto fra le sizigie, si comprende agevolmente: dal novilunio al primo quarto il mare decresce *in substantia*, dal primo quarto al plenilunio cresce *accidentaliter*, dal plenilunio all'ultimo quarto decresce pure per diminuzione della luce (lunare), e dall'ultimo quarto al novilunio cresce di nuovo in sostanza. Quanto al periodo diurno, o meglio semidiurno, il mare segue il moto della luna secondo le vicende ormai note. Anche per il Reisch causa del flusso del mare, quando la luna è sotto l'orizzonte, sono i raggi riflessi, onde deriva che i flussi diurni sono più violenti dei notturni, perchè i raggi diretti della luna sono più efficaci dei riflessi. Contribuiscono a produrre irregolarità nei flussi e riflussi, in primo luogo la posizione della luna nell'eccentrico e nell'epiciclo, che determina la distanza della luna dalla terra, poi la sua maggiore o minor vicinanza allo zenith ed anche la congiunzione con altre stelle. Se parecchie condizioni favorevoli si trovano a combinarsi insieme contemporaneamente, se ne può generare un diluvio; così anche, secondo alcuni, il diluvio universale serebbe stato causato dal concorso di moltissimi pianeti nel Cancro; il che è falso perchè, secondo altri calcoli, questa costellazione precedette di oltre duecento anni il diluvio.

Ad una domanda del discepolo perchè la marea non si verifichi anche nei fiumi, l'autore risponde osservando, sulle orme di Alberto Magno, che cita, come a produrre il fenomeno occorra il concorso di altre cause, ossia « spissitudo, salsedo, et in uno loco statio tempore longo » condizioni che non si rinvengon nei fiumi e neppure in misura uguale in tutti i mari, da cui una nuova fonte di varietà nel fenomeno. Da ultimo l'autore, copiando quasi ad literam il cap. XLI dell'*Imago Mundi* di Onorio, riferisce quella opinione, al suo tempo molto invecchiata, che vedeva la causa della marea nella presenza di voragini sottomarine.

Come si vede, l'autore, tedesco, si è servito di fonti germaniche per compilare le notizie che ci offre nella sua Enciclopedia; tali sono Guglielmo di Conches, Onorio e Alberto Magno, i primi due già ormai antichi e scaduti di autorità presso il mondo degli studiosi più al corrente con lo svolgimento delle idee; e da ciò derivano i concetti e le opinioni antiquate che si leggono ancora nel diligente compilatore della *Margarita Philosophica.*

Lasciando ora gli scrittori che si potrebbero dire all'antica, facciamoci ad esaminare le notizie importantissime contenute in un'opera, non troppo conosciuta in verità, di un uomo pur molto e molto giustamente famoso: voglio dire nello scritto *Adversus Astrologos* di Pico della Mirandola (1463-94) (¹). Il titolo dell'opera ne indica chiaramente il contenuto e lo scopo, e come c'entri la questione della marea si capisce agevolmente. L'esposizione, contenuta nel capitolo 15° del III libro, non è molto ordinata, ed ha, accanto ad alcune osservazioni giuste, parecchie cose strampalate; ma ci apprende molte notizie nuove. Pico tende a dimostrare che fra il moto

(¹) Mi servo dell'edizione bolognese del 1495 che ha in fondo: « Disputationes has Joannis Pici Mirandolae concordiae Comitis litterarum | principis adversus astrologos diligenter impressit Benedictus Hectoris Bononien | sis adhibita pro viribus diligentia ne ab archetypo aberraret. Bononiae anno salu|tis MCCCCXCV die vero XVI Julii ». L'opera si trova anche nell'edizione delle *Opera omnia* in 2 volumi (il 2° contiene le opere di Gio. Francesco Pico) di Basilea (ex officina Henricpetrina) 1572.

della marea e il corso della luna non c'è poi quella gran concordanza che si suol dire, anzi che negli scrittori c'è a questo riguardo molta confusione; che si può dar spiegazione, a parer suo, plausibile, di quel moto del mare, senza ricorrere alla luna; che in tutti i modi non si deve parlare assolutamente di azione occulta della luna, bastando in ogni caso il moto o la luce lunare a dar ragione del fenomeno della marea.

Nel capitolo precedente egli combatte anzitutto l'opinione di Tolomeo che la luna nelle varie sue fasi sia causa, ora di umidità, ora di calore, ora di siccità, ora di freddo, ma riconosce un'azione della luna sui corpi umidi, dimostrata dall'esperienza, nella quale azione non soltanto la luce, ma benanco il moto dell'astro ha efficacia. « Quocirca cum sole digressa incipit exoriri, donec media illuminetur plus humefacit calefacitque quam cum tantumdem possidens luminis secunda dichotoma tendit ad congressum, quae scilicet illic lumen augescit, hic deficit. *Haec est tota lunaris astrologia a medicis, ab agricolis, a nautis utiliter et naturaliter observata* ». Nel capitolo XV, passando a trattare del flusso e riflusso, e premesso che a tutti sembra ch'esso derivi dalla luna, espone in primo luogo due spiegazioni nuove che dalla luna prescindono interamente, l'una e l'altra molto strane, la prima delle quali è attribuita esplicitamente ad un tale Adelando, a noi completamente ignoto (1).

La prima spiegazione è la seguente. L'Oceano, salvo che nella zona torrida, è diviso in tante parti dalle terre interposte, dalle isole, ecc.; ora queste parti o braccia dell'Oceano per un naturale e originario moto (paternus ac naturalis motus) sono spinte a congiungersi l'una coll'altra, ma, mentre ciò fanno, urtano contro le spiagge che loro si oppongono e son da loro respinte; e così si genera questo moto alternante di flusso e riflusso, che sarebbe quindi naturale (non provocato) nell'acqua, non in quanto essa è acqua, ma in quanto consta di tante parti separate e disgiunte da masse di terra (2). La luna non c'entra, perchè altrimenti la marea si verificherebbe anche nei mari della zona torrida soggetti all'influenza lunare, il che invece non è, perchè nella

(1) In verità chi sia costui in questo luogo non accenna, ma in un'epistola a Marsilio Ficino, in cui gli narra com'egli si fosse dato allo studio delle lingue ebraica ed araba, dice che a tali studî lo animarono alcuni volumi scritti in queste lingue, che gli vennero nelle mani, « *non temere aut fortuito, sed Dei consilio* ». Ne cita i titoli e, parlando di quelli arabi: « Sed quid de Arabicis? — scrive — in quibus et Maumeth Tolentini epistulae et Albulgalem qui et Averroëm audivit, et (quod te magis tanget) *Adelandi cuiusdam qui sub Ammonio Sacca, Plotini magistro, in Aegypto philosophatus est*, multae sunt quaestiones » (nelle *Opera*, ediz. citata, I, pag. 367). Che un'opera di un discepolo del famoso Ammonio Sacca, voltata in arabo, potesse esser venuta tra le mani di Pico, non si può a priori escludere. Se non che il nome Adelando non ha alcuna impronta classica e dev'essere in ogni caso corruzione di un nome affine. Ma tra gli scolari di Ammonio a noi noti non appare alcun nome di questo genere, per cui mi sembrerebbe arrischiata qualunque congettura. Chè se si volesse assolutamente cercare un nome classico che suonasse simile ad Adelando, verrebbe in mente in primo luogo Adimantos; ma dei personaggi di questo nome il più vicino all'età cui allude la notizia di Pico sarebbe un Adimanto manicheo contro cui scrisse un opuscolo S. Agostino, del quale del rimanente quasi null'altro si conosce.

(2) « Ita quispiam dixerit hunc accedendi recedendique motum naturalem esse aquae, non quatenus aqua est, sed quatenus partes habet elementi principalis obiectu molis terrenae diremptas et separatas ».

zona torrida l'acqua non presenta — secondo l'autore — il fenomeno in questione; ma d'onde egli abbia potuto ricavar la base per questa convinzione su cui si fonda l'intera spiegazione, non sappiamo ([1]).

La seconda spiegazione si fonda su un fatto affermato dagli astrologi stessi. Essi dicono che la marea non si verifica in tutte le acque, ma solo nei bacini dove si abbia un fondo roccioso e ineguale, acqua molta e densa e ricca di vapori nel suo seno e nel fondo, e salata, ecc.; onde nei fiumi e anche in certi mari il fenomeno non si osserva ([2]). Queste condizioni, che per gli astrologi sono accessorie, bastano, secondo Pico, a spiegare la marea. Se infatti dal fondo e dal seno stesso delle acque si svolgono venti e vapori, bastan questi a porre in tumulto l'acqua, la quale poi, per questi movimenti e per la miscela dei vapori, si riscalda e cerca un più ampio spazio ove diffondersi ([3]). Si aggiunga anche l'azione dei venti che, soffiando sulla superficie del mare, *si riflettono*, secondo egli dice, anche nelle parti profonde e uniscono la loro azione a quella dei vapori e dei venti che nel profondo si generano ([4]). Quando, per lo svanir dei vapori alla superficie, la loro forza si perde, le acque si abbassano e si ritirano tornando alla loro primitiva posizione. Con questa spiegazione va ben d'accordo, come osserva Pico, il fatto messo in luce da Adelando che l'acqua è tiepida nel flusso, fredda nel riflusso.

Pico non vede che cosa si possa opporre a queste spiegazioni: « Quae, si rationi consonant naturali, si consonant experimentis, cur parum probabilia iudicari debent? aut cur necessarium praeter has causas addere lunae motum, secum aquas deorsum etiam in sublime trahentem? praesertim cum non illa respondeant quae respondere sit necesse, ut, cum aucta lumine luna, cum velocior cursu, cum propinquior terrae, cum declinans ad aquilonem a via solis, cum in signis aquilonaribus posita, tunc uberiores fiant accessus, contra tenuiores cum se aliter habet quam dicebamus ». Ecco ciò che sta al fondo di tutta la trattazione di Pico; egli nega quelle tanto strom-

([1]) Lodovico Boccaferri, già ricordato, che sostiene una spiegazione, se non identica, almeno assai simile a quella di Pico (sebbene egli a torto assimili la sua interamente con la pichiana) trova appunto nella corrispondenza fra i fenomeni di marea e le fasi lunari la più valida obiezione contro la sua opinione; ma egli cerca di superarla dicendo che l'influenza della luna si esplica su alcuni fatti (venti, vapori esistenti nel mare) i quali costituiscono delle cause accidentali o secondarie della marea; ad esse sono dovute le concordanze da tutti riconosciute. Cfr.: Ludovici Buccaferri, *Lectiones.... in secundum ac tertium Meteororum Aristotelis.* Venetiis apud Hieron. Scotum 1570, cc. 14 vers. e seg. Vedi anche il ms. Casanat. 1508 già citato, contenente pure queste lezioni del Boccaferri sulla marea, cc. 34 vers. Del Boccaferri parleremo anche più tardi. L'opinione di Pico è combattuta e confutata assai presto dal Nifo (*De nostrarum Calamitatum causis.* Venetiis. 1505, lib. III, Enunc. XXV: «ita quae Picus inquit non sunt digna suo nomine» conclude); più tardi dal Fromondo (*Meteorolog., Libri Sex.* Antuerpiae 1627. lib. V, art. VII e segg.), dal Cabeo (*Meteorolog.*, lib. II, Text. 6, Quaest. 6ª), da Franc. Resta (*Meteorolog.*, lib. III, Tratt. I, cap. 14).

([2]) Cfr. le idee di Abû Mašar, Alberto Magno, ecc.

([3]) Questa spiegazione ha qualche analogia con la seconda riferita da Mas'ûdî. Cfr. quanto si disse al cap. IX.

([4]) « Accedit quasi tertia causa motus reflexio ventorum vellicantium aquae summa ad infernas illius partes, qui [venti] spirantibus inde ventis implicati, proruunt aquas in superna conati; tum aquae necessario, dum eructuant, abundant, tumescuntque et reiectae pariter et pulsae ».

bazzate concordanze fra il corso della luna e la marea; le nega tutte, e, dobbiamo confessare, con una certa impudenza. Certo negli autori che egli avrà letto, poteva esserci un po' di confusione, qualche contraddizione — ed egli stesso ne porterà poi esempio riguardo alle vicende mensili —; ma qualche scrittore e in special modo Abû Ma'šar, ch'egli aveva, come vedremo or ora, sott'occhio, esponeva pur chiaramente queste concordanze; or come poteva egli tanto recisamente negarle?

Noi siamo condotti a ritenere che Pico avesse letto in altri autori a noi ignoti, e forse nello stesso Adelando, osservazioni che contradicevano alle più divulgate. Il solo periodo diurno è, secondo egli dice, accertato, e anche quello soltanto fino ad un certo punto. « Porro non videtur — continua egli infatti — quid ita sentientibus obiici possit, praeter ipsam aquarum tam in ascensu quam in descensu concordiam. Quae (si verum quod fatetur Aboasar) [1], nescio quo pacto vel ipsa satis obiici possit. Scribit enim non eadem esse ubique accessionis initia atque recessus, etiam ubi nulla de finitore varietas; sed interdum usu evenire, ut quo tempore quodam loco recedunt aquae, alibi tunc accessum aggrediantur. Nec ipse dissimulat hoc plurimis causam praebuisse suspicandi motus illos a lunae motibus non dependere, cuius diversitatis, quamquam reddere rationem conatur, ut lunam nihil minus causam esse defendat, sequitur tamen inde pro luna capi argumentum non posse. Unde potius contradicendi praestatur occasio » [2]. Ed egli aggiunge ancora la spiegazione di Alpetragio come un'altra che prescinde dall'influenza lunare.

Se non che a questo punto l'autore si accorge che questo influsso della luna sul mare, dato anche che esistesse, ha tanto poco di astrologico, che l'ammetterlo non può infirmare la sua tesi generale sulla fallacia delle predizioni astrologiche riguardo al carattere e ai destini degli uomini. « Quae equidem omnia — scrive — potius disputo quasi philosophus, causam investigans veram istius effectus quam ut astrologis contradicam, quando hic nihil astrologicis rebus accedit receditve, si accessus istos atque recessus cursibus astrorum aliorum aut lunae referamus . . . Nam sint a luna, *quod libenter et facile etiam ipsi credimus*, quid aut pro astrologis aut contra nos? » E qui si passa alla seconda parte della trattazione di Pico, alla confutazione di ciò che veramente gli premeva di confutare: l'azione occulta della luna. Se anch'egli è in fondo disposto a credere che causa della marea possa esser la luna, sarà sempre il moto o la luce di lei che agisce, non già un influsso occulto come alcuni credono; e questo si sforza di dimostrare. Ma innanzi tutto si scaglia vivacemente contro Ruggero Bacone, il quale poi, cosa curiosa, nella sua spiegazione che risale effettivamente a Roberto di Lincoln, non aveva parlato affatto di influenza occulta, anzi aveva sostenuto l'azione della radiazione lunare. Riferita esattamente la spiegazione baconiana e soggiunto che quegli se ne gloriava tanto da giungere sino ad

[1] Scrive così invece di Albumasar.

[2] Come si rileva da questo passo, e come si vedrà anche dal seguito, Pico è ostile ad Abû Ma'šar, ch'egli ritiene come partigiano dall'influenza occulta della luna. Nondimeno in altro luogo Pico accetta ciò che l'astronomo arabo scriveva sul diverso comportarsi dei mari Persico e Indiano nelle condizioni di navigabilità durante l'anno, perchè qui è chiamato in causa il sole e non la luna. Cfr. *Advers. Astrol.*, lib. III, cap. 13.

asserire di aver per primo data la vera ragione del fenomeno, Pico afferma invece che nella trattazione di Bacone c'eran più spropositi che parole (¹).

In verità le obiezioni ch' ei rivolge alla teoria di Bacone sono così gravi che difficilmente noi potremmo pensare risposte che le superassero. In primo luogo Pico nota che l'esposizione baconiana contradice ad Abû Ma'šar « cuius se facit interpretem », il quale asserisce che il flusso è massimo quando la luna è alla sua culminazione nel cielo e non si abbassa se non quando essa comincia a discendere, mentre secondo Bacone, quanto più la luna si avvicina alla culminazione, tanto più decresce il flusso che era massimo al momento in cui l'astro sorgeva. In secondo luogo, se è la luce lunare causa della marea, i flussi e riflussi dovrebbero mancare intorno al novilunio, quando la luna è priva del suo lume (²). In terzo luogo non si capisce, o almeno Pico non capiva, perchè i raggi della luna ascendente dovessero avere un effetto diverso da quelli della luna discendente (³). Infine osserva che nessuno vorrà credere che i raggi riflessi della luna abbiano ancor tanta forza da consumare gli ipotetici vapori esistenti in fondo al mare, osservazione già da altri presentata contro questa teoria. Pago di avere con queste formidabili obiezioni annientato, a suo credere, le idee di Bacone, conclude: « Habeat ergo Baccon haec sua sibi commenta; nos si pertinet ad lunam talis effectus, ad eius id motum referamus, quem tacito naturae consensu, oceani motus imitatur, quare ascendit cum ascendente, descendit cum descendente... Nec putemus hos aestus auctionem aquarum esse vel imminutionem, sed quod ipsae exprimunt voces accessum atque recessum, non aucti vel imminuti sed extendentis se maris ascensu, descensuque contrahentis. Dicimus autem haec de noctis aestu atque diei. Nam si qua maria sunt (ut est scriptum a quibusdam) posita semper in accessu dum augetur lunae lumen, a coitu scilicet ad plenilunium, rursus in recessu quum diminuitur a plenilunio usque ad coitum, non sequuntur illa lunae motum in sphaera, sed motum, ut sic dixerim, luminis in luna, decrescentis in ea pariter et crescentis, cuius variatio potest eum quoque qui fit quotidie, nonnihil variare ». Nota qui che peraltro le osservazioni circa il periodo mensile discordano. Infatti gli Egizi « et qui navigant ad occidentem » dicono che i flussi crescono dal primo giorno del mese lunare fino all'undecimo, diminuiscono da questo fino a metà del decimonono, di nuovo crescono fino al vigesimosesto per calare fino al principio del nuovo mese, mentre i riflussi hanno vicenda contraria; gli Orientali asseriscono che i flussi sono piccoli nella prima e ultima decade del mese, forti nella seconda (⁴); infine Abû Ma'šar attribuisce al periodo mensile una vicenda ancor diversa, quella a noi già nota e corrispondente al vero. Dopo aver cercato di dimostrare che

(¹) « Hoc est Bacconis inventum — conclude — in quo adeo sibi placet, ut primus se accessus atque recessus in oppositas quadras rationem reddidisse glorietur, *cum sint tamen in eius dictis tot pudenda errata quot verba* ».

(²) Cfr. indietro, al Cap. VII là dove si parla di Bacone.

(³) Qui Pico non ha capito con tutta precisione il ciclo diurno della marea quale si deduce dalla esposizione di Bacone e del Lincolniense senza di che non avrebbe fatto questa osservazione che è fuor di luogo.

(⁴) Queste notizie, nuove per noi, Pico le doveva trovare in quell'Adelando che tanto desidereremmo di poter leggere anche noi.

quest'ultima maniera del periodo mensile non ha fondamento, conclude infine, non si sa con quanta ragione, in questo modo: « Verum quaecumque potius recipiatur harum traditionum patet nihil nos cogi novam comminisci potestatem in luna praeter motum et lucem, quare mare commoveat, quando proditae omnes in accessibus maris recessibusque diversitates, vel a motus diversitate scandentis sideris, vel declinantis, vel a lucis damnis et incrementis evidentissime causam habere possunt ».

Tale, esposta minuziosamente, la trattazione di Pico che potrebbe esser giudicata tutto un tessuto di contradizioni da chi non ne considerasse il carattere essenzialmente polemico. In fondo egli è persuaso, forse più di molti altri, che la causa della marea sia da ricercarsi nell'azione lunare; lo mostra l'indifferenza con cui egli riporta quelle due prime spiegazioni che dalla luna prescindono; lo mostra quella confessione « quod *libenter et facile* etiam ipsi credimus » che gli sfugge a mezzo del suo discorso. Soltanto egli, che non ha evidentemente fatto mai esperienze proprie al riguardo, trova che negli scrittori c' è una gran confusione in merito alle concordanze fra i moti del mare e i fenomeni lunari, onde nel calore della sua polemica, è condotto a negare tutte quelle concordanze, mentre dal complesso della sua esposizione risulta poi ch'egli ammette una certa concordia almeno nelle vicende giornaliere e mensili. Suo scopo principale è di cancellare ogni idea dell'influenza occulta della luna, alla quale non riconosce altro potere che quello che le deriva dal calore e dal moto ([1]) ma qui dobbiamo confessare ch'egli, poichè non porta in conclusione alcun argomonto valido contro quell'idea, ha interamente fallito il suo scopo. Dalla sua trattazione poi traspare in complesso un'antipatia spiccata verso due scrittori: Bacone e Abû Ma'šar, contro i quali si scaglia anche senza ragione, mentre accetta poi con singolar favore le idee di quel suo Adelando, che dovea formare uno dei tesori della sua piccola biblioteca orientale. Per la loro stessa natura e per il modo con cui sono esposte, le idee di Pico non potevano dunque esercitare una grande influenza sugli scrittori che seguirono, ma sarebbe peraltro ingiusto negare a quelle ogni valore. Le obiezioni ch'egli fa a Bacone sono in gran parte gravi e giuste, ed è anche notevole l'affermazione esplicita che la marea non rappresenta affatto un crescere e diminuire alternato della massa acquea. Oltre di che il tentativo, che rientra nel disegno generale dell'opera di Pico, di buttar giù le credenze nell'influenze occulte degli astri, rappresenta un gran progresso nelle idee del suo tempo ([2]).

Antonio de Ferrariis da Galatina (1444-1517), medico e geografo assai mal noto, ma in alcune parti originale e nuovo ([3]), sembra aver proposto di sua propria iniziativa una spiegazione della marea, che prescindendo dall'influenza lunare, si accosta alla seconda di quelle due così strane esposte da Pico della Mirandola.

([1]) Cfr. lib. III, capp. V e VI e la chiusa al cap. XXII: « Apparuit... falso fingi in Luna vim occultam praeter motum et lumen quae mare revocet et effundat ».

([2]) Vedi su questo argomento le belle pagine di J. Burckhardt, *La civiltà del secolo del Rinascimento in Italia* (Firenze 1876). Vol. II, parte VI, cap. 4, specialmente pagg. 329 e segg.

([3]) Cfr. su di lui: R. Almagià, *Le opinioni e le conoscenze geografiche di Antonio de Ferrariis*; in Riv. Geogr. Ital. 1905; fasc. VI, VII e VIII. Parecchie delle sue opere sono pubblicate nella « Collana di opere scelte edite e inedite di scrittori di Terra d'Otranto » diretta da Salvatore Grande, vol. II-IV. Nel volume IV (III delle Opere di Antonio de Ferrariis) sono contenuti gli opuscoli da me citati.

Nell'opuscolo *De situ Elementorum* per vero egli asserisce che « bis affluunt bisque remeant aquae vicenis quaternisque semper horis *secundum varios situs lunae ac solis* », ma su questa concordanza tornerà in altro luogo. Egli dice, non senza ragione, che le parole di Averroe secondo cui i flussi e riflussi avvengono *per vento generato nei mari dal calore della luna*, sono ambigue ed hanno bisogno di spiegazione. Infatti egli asserisce che le maggiori maree si hanno quando il vento tace; e anche ammesso che questo vento non sia da noi avvertito, come mai esso potrebbe sollevare le acque del mare da quando la luna sorge fino a che essa raggiunge la sua culminazione e poi mutare effetto, in modo da respinger l'acqua prima che la luna sia giunta all'occaso? (1) Ma per il momento egli si astiene da ulteriori spiegazioni. In altro luogo dell'opuscolo medesimo egli ricorda alcuni mari dove le maree sono particolarmente cospicue: il mar Rosso, come afferma Teofrasto, il mar Britannico, il mare Indiano alle foci del Gange e l'Oceano in genere, come si legge in Pomponio Mela: « in Oceano enim... maximi ac rapidissimi fiunt aestus ». Alle grandi maree oceaniche contrappone quelle esigue dell'Adriatico: « In Hadriatico vero et Tarentino sinu *vix supra sesquipedalem mensuram* intumescunt aquae nisi fortasse in intimo recessu Hadriatici sinus, austris continue flantibus » (2). Questo passo ha un'importanza notevole. Per la prima volta uno scrittore, riferendosi ad un mare a lui noto, alle spiagge stesse della sua patria, riporta una misura desunta probabilmente dall'esperienza sua personale o di persone pratiche del suo paese. E noi abbiamo già veduto come ai marinai fossero ben note le maree dell'Adriatico settentrionale cui pur allude il nostro autore; e la lunga esperienza può aver fatto conoscere anche le più esigue maree dell'Adriatico meridionale, dove peraltro il flusso non raggiunge mai l'altezza di un piede e mezzo assegnatagli dal De Ferrariis (3).

In ogni modo è questa la prima misura che ci capita sott'occhio sull'altezza della marea; non andrà molto che Leonardo da Vinci ce ne darà di più numerose.

Le vedute del nostro autore sulla causa del flusso e riflusso sono contenute nell'opuscolo *De mari et aquis et fluviorum origine*. Le riferiamo con le sue stesse parole: « Calorem plurimum esse in fundo maris eorum experientia demonstratur, qui maris penitima quotidie rimantur » (4). Ma il calore non può conservarsi se l'aria non lo mantiene. « Calorem nullatenus conservari posse nisi continuam habeat exspirationem et continuam exspirantium partium reparationem, quae fit per aëris inspirationem, *qui solus proprium est ignis nutrimentum*... Ergo et calor qui in fundo maris continuam habet meationem, continua indiget exspiratione, quae causa est continuae effluxionis et refluxionis maris. Ea effluxio et refluxio maxima est in litoribus Oceani, ut in Britannia et Taprobane, quae sunt maximae insulae Oceani.... In nostro autem Mediterraneo mari non fit tanta effluxio et refluxio maris, quia multo minus est Oceano minusque caloris habet in fundo » (5).

(1) De Ferrariis, op. cit., vol. III, pagg. 9-10.

(2) De Ferrariis, op cit., pagg. 23-25. Sulla marea a Taranto anhe *De situ Japigiae*, cap. I; op. cit., vol. I, pag. 23.

(3) L'altezza massima della marea è di soli 4 cm. a Taranto, 9 a Brindisi. Cfr. Grablowitz, *Osservaz. mareografiche* etc. già citato.

(4) Abbiamo già accennato come questa opinione risalga a tempi antichissimi.

(5) De Ferrariis, op. cit., vol. III, pag. 53 seg.

Già nell'antichità Solino, paragonando il mondo ad un essere vivente, aveva asserito esservi in fondo all'Oceano delle aperture — quasi *mundi nares* — dalle quali uscivano aneliti gonfianti alternativamente il mare, e questa idea non si perde nel Medio Evo. Ma, secondo Antonio De Ferrariis, questa inspirazione ed espirazione non è ragione per cui si debba credere il mondo animato e provvisto di narici e sfiatatoi, alla maniera soliniana, giacchè sola causa dell'inspirazione è l'interno calore ([1]). Questo calore, che l'autore non si perita a dire provato dalla esperienza, ha bisogno insomma di una ventilazione che lo mantenga, e questa è causa del flusso e riflusso. La spiegazione è semplice nella sua assurdità.

Altrettanto semplice è la spiegazione assegnata dall'autore all'influenza del sole e della luna ch'egli non pensa affatto a negare. È noto che all'epoca degli equinozî si hanno i massimi flussi « pro eo quod sub aequinoctiali linea maxima est Oceani moles, in qua sole existente maximus fit calor in fundo illius partis Oceani, quod causa est maioris effluxionis ». I raggi del sole non fanno dunque che accrescere il calore che è nel fondo del mare, causa prima della marea. Lo stesso si dica della luna, allorchè, trovandosi prossima alla culminazione, invia i suoi raggi più diritamente, perchè anche la luna è fonte di calore, per quanto in minor misura del sole; e analogo effetto producono eziandio alcune stelle capaci di trasmettere calore quando sono in determinate posizioni rispetto al sole e alla terra. In questo modo l'azione della luna, oltre al divenire causa affatto accessoria del fenomeno, è del tutto messa alla pari coll'azione del sole, anzi forse perfino in seconda linea rispetto a quello. Intesa l'influenza lunare in questo senso così limitato, non si è molto lontani dall'idea di Averroes espressa nell'ambigua frase « propter ventum generatum in ipso [mari] a caliditate lunae » parole che, secondo il nostro autore, avean bisogno di illustrazione; e in questa guisa forse credeva Antonio De Ferrariis di mettersi d'accordo in qualche modo col grande Arabo, da cui aveva preso le mosse, sebbene su questo argomento egli non ritorni più. Un'ultima osservazione del nostro autore riguarda alcuni flussi straordinarî che si verificano ogni molti secoli, forse pel concorso di speciali circostanze e che si sogliono chiamare diluvî; di tal genere fu anche il diluvio noetico che avvenne intorno all'equinozio di primavera ([2]).

Ma con Antonio De Ferrariis noi siamo già in certo modo usciti dal limite cronologico prescritto a questo lavoro, perchè non solo la vita di questo scrittore varca il secolo XV, ma lo stesso opuscolo *De Situ Elementorum* fu scritto dopo la circumnavigazione dell'Africa fatta da Vasco de Gama, in esso appunto ricordata. Siamo dunque entrati già nel periodo culminante delle grandi navigazioni transoceaniche, che, apportando una nuova e ricchissima messe di osservazioni anche riguardo al fenomeno di cui ci occupiamo, aprirono un'era nuova negli studî e nelle indagini su di esso proseguite. La storia di queste nuove osservazioni esce dunque dall'ambito della età medievale. Se non che i grandi navigatori del secolo XV non sembra si occupassero molto di tali osservazioni che non sono tra le più agevoli a farsi, quasi fossero

([1]) « Cum positum sit solum interiorem calorem causam esse inspirationis et respirationis ». Op. cit., loc. cit.

([2]) Questa idea di collegare a fenomeni di marea il diluvio universale non è nuova, ed un accenno ne abbiamo già trovato in Gregorio Reisch.

distratti da novità molto più importanti e speciose. Per verità, se già di Alvise Cadamosto, che viaggiò nel 1455-56 ci vengono ricordate osservazioni di marea fatte intorno alle isole del Capo Verde [1], a Vasco de Gama, secondo le relazioni che abbiamo, non sarebbe occorso di notare il fenomeno se non a Mombasa ove una sua nave, andata in secco su alcuni bassi fondi, ritornò a galla solo coll'alta marea [2], e a Calicut, ove avrebbe osservato « che il mare cresce e scema ogni sei hore come di qua » [3]. Quanto a Colombo, le coste delle Antille, da lui navigate nei primi viaggi, non presentano in modo molto cospicuo il fenomeno del flusso e riflusso, e sulle coste di Paria, alle quali egli si avvicinò nel terzo viaggio, le correnti litoranee mascherano in parte l'effetto della marea che tuttavia egli non mancò di osservare [4]. Anche Caboto, nei suoi viaggi sulle coste dell'America Settentrionale, avrebbe fatto, a quanto c'informa Pietro Martire d'Anghiera, osservazioni di correnti, ma non di flusso e riflusso [5]. Ma più tardi, nel corso del secolo XVI, mentre si diffondevano certamente fra i marinari notizie pratiche sull'andamento della marea nelle coste atlantiche d'Europa [6], anche le osservazioni del fenomeno in mari e su spiagge lontane cominciano ad affluire da ogni parte e a farsi copiose [7]. Allora le trattazioni e gli scritti sul fenomeno della marea, che cominciano a pullulare, prendono in generale un carattere un po' diverso da quello che avevano in passato: restano indietro cioè la ricerca profonda della causa e la discussione sull'origine del fenomeno, soffocate dalla preoccupazione di mettere in ordine, anche a vantaggio dei naviganti, le numerose osservazioni fatte, di trarne conclusioni generali sul comportarsi del fenomeno nei diversi luoghi e nei diversi periodi dell'anno, e di metter tutto ciò in accordo con le varie fasi e i varî aspetti della luna, ammessa come causa generica, sola o in unione col sole e altre stelle.

[1] « In questo luogo [le isole del Capo Verde] trovammo una grande contrarietà che non si trova altrove, per quanto ho potuto intender, cioè che facendosi in questo luogo marea di acqua montante e zozante come si fa a Venetia e in tutto il ponente, e dove in ogni loco la cresce sei hore e cala altre sei, quivi la cresce hora quattro e cala otto. E è tanto l'impeto della correnthia della detta marea, quando la comincia a crescere, che glie quasi incredibile. Perchè tre anchore per prova a pena e con fatica ne potevano tenere e hora fu che la correnthia ne fece far vela per forza e non senza pericolo, perchè l'aveva molto più forza che le vele co'l vento ». Ramusio, *Delle navigationi et viaggi* etc. Vol. I, carta 110 recto B.

[2] *Journal du Voyage de Vasco de Gama en MCCCCXCVII.* Traduz. franc. di A. Moulet; Lyon, Perrin, 1864, pag. 29.

[3] Secondo la relazione pubblicata in Ramusio, vol. I, carta 120 r. Analoga osservazione avea già fatto prima di lui per il Golfo Persico il veneziano Niccolò de' Conti. Cfr. Ramusio, vol. I, carta 338, v.

[4] Cfr. i passi importanti nelle *Historie* di Ferdinando Colombo, cap. 67 e 71; pagg. 157 v., e 161 v. della traduz. di Alf. Ulloa. Venezia, presso Franc. de Franceschi, 1571.

[5] Pietro Martire, *Decades de orbe novo.* III, cap. 6.

[6] Richiamiamo qui quel frammento di Codice Veneto, proprio della metà di questo secolo XV, dove si contengono alcune regole popolari sul comportarsi della marea nell'Adriatico settentrionale. Simili regole pratiche e approssimate dovevan certo esistere anche per le spiagge e i porti della Francia e dell'Inghilterra, diffuse fra i naviganti che li praticavano.

[7] Cfr. Hakluyt, *Navigat, and Discver.* Tomo I, pag. 226; citato da Peschel, *Geschichte der Erdkunde*, pag. 435.

I primi indizî chiari di questa tendenza si trovano in un opuscolo *Tractatus de occulta causa fluxus et refluxus maris*, il primo trattato speciale italiano sulla marea a noi rimasto, composto sui primordî del secolo XVI, ma da un autore vissuto ancor la maggior parte della sua età nel secolo precedente: Federico Crisogono di Zara, medico ed astronomo presso che ignorato, che fu insegnante di matematica e astronomia nello Studio di Padova fra il 1495 e il 1498 (¹). In questo suo scritto l'autore non fa ancora una raccolta di dati nuovi sul fenomeno, ma si segnala su quasi tutti i precedenti perchè, malgrado il titolo dato al suo opuscolo, accennata appena la causa della marea che ritrova nell'azione del sole e della luna, rivolge poi tutto il suo studio a render ragione, in relazione al corso di quei due astri, di tutte le vicende diverse della marea nelle varie epoche dell'anno, aiutandosi con una ingegnosa figura, e dilungandosi noiosamente nelle spiegazioni (²).

Se il Crisogono per questa sua caretteristica rientra negli scrittori dell'età moderna, per cui tralasciamo di discorrerne diffusamente, invece, per le sue idee sulla marea, appartiene ancora quasi interamente al Medio Evo Leonardo da Vinci (1452-1519) col quale terminiamo questo lavoro. In passato una ricerca su date cognizioni scientifiche del grande pensatore era impresa assai ardua, per la necessità di sfogliare tutti i suoi manoscritti in diversi tempi e modi e talora solo parzialmente pubblicati; oggi per la parte geografica il lavoro è grandemente agevolato dall'accurata opera di Mario Baratta, che ha raccolto in un volume tutte le idee di Leonardo relative alla Fisica Terrestre (³); tuttavia, poichè il maggior numero dei manoscritti di lui rimastici non erano che disordinati appunti, per molte questioni non possiamo avere chiare e complete notizie sulle opinioni di lui. Così è, purtroppo. anche della causa della marea, problema che certamente lo occupò a lungo e intensamente, ma

(¹) Facciolati, *Fasti Gymnasii Patavini*. Padova, 1757, pagg. 117-118; Favaro, *Le matematiche nello studio di Padova*, Padova, 1880, pag. 47.

(²) L'opuscolo del Crisogono è stampato insieme ad altre opere nella seguente edizione: Federici | Chrisogoni nobilis Jadertini Ar | tium et Medicine doctoris Sub | tilissimi et Astrologi excel | lentissimi de modo Colle | giandi Prognosticandi | et curandi Febris | Necnon de huma | na Felicitate ac denique de Fluxu et Reflu | xu Maris Lucubrationes nuper | rime in Lucem edite | MDXXVIII. In fondo: « Explicit aureum opus etc. etc. Editum ab eximio Doctore Federico Chrysogono no | bile Jadertino. Et Venetiis impressum a Joan. Anto | de Sabbio et fratribus. Anno a partu Vir | gineo MDXXVIII. Kal. Aprilis ».

L'opera, rarissima, consta di 28 carte compreso il frontespizio. Il trattato sul flusso e riflusso è compreso fra carte 23 v., col. 2 e carta 27. Una copia se ne trova nella Biblioteca Angelica di Roma. Ma il trattato medesimo è riportato, parola per parola, solo con qualche errore di stampa da Gio. Paolo Galluccio nel suo *Theatrum Mundi et Temporis*. (Venetiis apud Jo. Bapt. Somascum 1588), opera molto più facilmente reperibile. Forma il cap. 12, pagg. 70-82 dell'ediz. citata. La dottrina del Crisogono è anche riportata da Ludovico Boccaferri, e assai bene da Annibale Raimondo nel *Trattato utilissimo e particolarissimo del flusso e riflusso del mare*, stampato a Venezia (presso Domenico Nicolini) nel 1589. Cfr. carta 3 r. a carta 7 v.

(³) Mario Baratta, *Leonardo da Vinci e i Problemi della Terra*. Torino, Bocca, 1903. Nella mia esposizione mi attengo, per la citazione dei testi, al lavoro del Baratta (Vedi soprattutto pagg. 172-84); ho solo da aggiungere pochi brevi passi del *Codice Atlantico* di cui, quando egli pubblicò il suo lavoro, eran venuti in luce solamente 25 fascicoli, ora completo. La descrizione e nomenclatura dei manoscritti vedi in Baratta, pagg. 307-13.

a riguardo del quale non formulò un'ipotesi unica e decisa limitandosi a buttar giù qua e là le idee che gli balzavano in mente o magari anche quelle che leggeva presso altri (1).

Rispetto all'andamento generale del fenomeno e ai dati che ad esso si riferiscono, Leonardo conosce con esattezza il periodo semidiurno della marea al quale più volte accenna chiaramente (2), ma è notevole ch'egli non accenni mai a periodi più lunghi, neppure a quello semimensile, allora universalmente noto (3), salvo che ad esso non alluda in un breve passo del manoscritto di Leicester ove dice: « Nelle parti occidentali, appresso alla Fiandra, il mare cresce e manca ogni sei ore circa 20 braccia, *e 22 quando la luna è in suo favore* » (4). Per contro il nostro autore accenna, conforme alla moderna teoria della marea, che il flusso e riflusso è più cospicuo dove la quantità delle acque è maggiore, mentre è esiguo nei bacini angusti (5); così aveva già affermato nell'antichità Plinio, mentre in tutto il Medio Evo è comune un'idea opposta a questa, che cioè la marea è più visibile nei luoghi angusti e inceppati da scogli e da isole; idea derivata dall'interpretazione troppo larga e inesatta di un noto passo della Meteorologia di Aristotele.

Leonardo aveva, a quanto pare, non solo osservato con i proprî occhi il fenomeno, ma lo aveva osservato a scopo scientifico, ossia per farsene un'idea precisa; certo le sue osservazioni egli le aveva fatte nel Mediterraneo, e ne vedremo or ora i risultati, ma non si era limitato soltanto a ciò. Collo scopo evidente di gettar le basi per uno studio positivo del fenomeno, primo fra tutti gli studiosi, egli aveva cercato di procurarsi dati su tutti gli altri mari, onde poi paragonarli fra loro. Di questa inchiesta ci resta traccia in una nota del *Codice Atlantico* in cui si legge: « Scrivi a Bartolomeo Turco del flusso e reflusso del mare di Ponto e che intenda se tal flusso e reflusso è nel mare Ircano, over mare Caspio » (6). Tale notizia doveva avere per Leonardo una speciale importanza, in quanto che egli sembra ritenesse che la marea non si verificasse nei laghi, ma purtroppo ignoriamo se e quale risposta ricevesse riguardo al maggior lago conosciuto.

Questa inchiesta da lui fatta ha come presupposto l'idea che il fenomeno sia comune, in maggiore o minore misura a tutti i mari, ed infatti noi leggiamo nel manoscritto di Leicester: « *Tutti li mari* anno il lor flusso e riflusso in un medesimo tempo, ma pare variarsi perchè li giorni non cominciano in un medesimo tempo in

(1) A rigore non si può molte volte neppur esser sicuri che un'idea qualunque che leggiamo negli appunti leonardiani sia veramente sua, potendo benissimo darsi il caso che Leonardo trascriva semplicemente — anche quando non cita nomi — un'opinione di qualchedun altro che gli è parsa degna di nota. Alcune volte anzi è senza dubbio così, chè altrimenti saremmo obbligati a ritenere che Leonardo per talune questioni avesse espresso a più riprese, opinioni del tutto diverse. Questo fatto mi sembra che non abbia tenuto sufficentemente presente, il Baratta.

(2) « Il flusso e riflusso non fa se non 4 volte in 24 ore ». *Manoscr. Leic.*, fol. 86 v. Cfr. *Codice Atlantico,* fol 260 r. *a.* e 182 r. *b.*

(3) Ciò è in relazione con le vedute di Leonardo sulla causa della marea che esporremo in seguito.

(4) *Manoscr. Leic.*, fol. 35 r.

(5) *Codice Atlant.*, fol. 162 v.; 482 r.

(6) *Codice Atlant.*, fol. 260 recto *a.*

tutto l'universo, conciossiachè quando nel nostro emisperio è mezzogiorno, nell'opposito emisperio è mezzanotte etc. » (1).

Riguardo alle ore in cui si verificano nei diversi luoghi le diverse fasi del fenomeno, ha dunque Leonardo la stessa idea di Abû Ma 'šar; ammette peraltro, al pari del l'astronomo arabo, che molte e diverse cause influiscano nel render diverso il fenomeno nei diversi paesi e mari, senza però esplicare questi fattori di varietà (2). Ma la universalità del fenomeno, affermata nel passo su riferito, è negata poco dopo in base all'esperienza; nello stesso manoscritto di Leicester si legge infatti: « Come il flusso e riflusso non è generale, perchè in riviera di Genova non fa niente, etc. » (3). Anche qui dunque il grande pensatore non ci fa intender chiaramente quale fosse la sua idea. Quanto ai resultati della sua inchiesta, riguardo al Mediterraneo, leggiamo che il flusso, nullo a Genova, raggiunge a Venezia un' altezza massima di due braccia (4), e sopra Tunisi — ossia presso Sfax ove i flussi sono molto alti — circa due braccia e mezzo, dato che si avvicina abbastanza al vero (5); riguardo all'Atlantico troviamo che presso la Fiandra l'altezza raggiunge 18 o 20 braccia, e 22 quando la luna è favorevole (6), come 20 braccia si hanno alle foci della Loira (7) e 40 alla foce della Gironda presso Bordeaux (8). In questi due ultimi passi, Leonardo accenna anche agli effetti del flusso nel respingere indietro la corrente dei due fiumi producendo il noto fenomeno del *mascaret*. Meno c'interessa quanto s'avvicinino al vero questi dati, poichè non vennero da lui direttamente raccolti; abbastanza bene approssimati per la Fiandra e la foce della Loira, essi sono esagerati per quel che riguarda Bordeaux, ove il flusso raggiunge un'altezza assai minore che a Saint-Nazare alla foce della Loira (9).

Più importante è quanto scrive Leonardo riguardo alla causa della marea. Anzitutto egli sembra negare recisamente che la luna possa essere causa, o almeno causa principale, del fenomeno; questa dimostrazione negativa è basata su un principio abbastanza curioso della sua fisica. Egli dice che soltanto il calore è capace di muovere gli umidi, mentre il freddo li ferma: così il sole tira l'umidità in alto, ma il freddo delle alte regioni atmosferiche la ferma, formando i nuvoli (10). Per conseguenza la luna, considerata anche da Leonardo, come in tutto il Medio Evo, fonte essenziale di freddo, non può muovere il mare e in genere l'elemento umido. « Se alcuno volesse dir che la luna, aumentatrice del freddo, fosse quella che ogni 6 ore facesse crescere e decrescere il mare..... e' pare impossibile, imperò che la cosa che ha similitudine con l'altra, non tira per similitudine, anzi tira per difformità: [così] tu non vedrai

(1) *Man. Leic.*, fol. 6 v.

(2) « Come il flusso e riflusso è vario in diversi paesi e mari ». *Man. Leic.*, fol. 17 v.

(3) *Man. Leic.*, fol. 13 r. Ricordiamo che simile osservazione riguardo al mare Genovese e Pisano si trova in Duns Scoto e nel Landino.

(4) *Man. Leic.*, loc. cit.

(5) *Man. Leic.*, fol. 27 v.

(6) *Man. Leic.*, fol. 13 r. e 35 r.

(7) *Man. Leic.*, fol. 9 r.

(8) *Man. Leic.*, fol. 27 v.

(9) I dati brevemente sono discussi dal Baratta, pagg. 183-84.

(10) *Manoscr. A.*, fol. 56 r.

il caldo, essendo foco, tirare esso foco, anzi tira freddo e umido; tu non vedrai tirare a sè acqua da altra acqua » ([1]). A questa ragione teoretica egli ne aggiunge altre due desunte dall'esperienza. L'una è che « la luna non po' movere il mare ch'ella moverebbe i laghi » ([2]); ma di questa affermazione egli non poteva esser del tutto sicuro, se chiedeva a Bartolomeo Turco del flusso e riflusso nel Caspio. L'altra è espressa nel seguente brano di cui già citammo una parte: « E se tu volessi dir che la luna, apparondo all'orientale parte del Mar Mediterraneo, cominciasse ad attirare a sè l'acqua del mare, ne seguirebbe che immediate se ne vedrebbe la sperienza al fine orientale di tal mare predetto ([3]). Ancora, essendo il mare Mediterraneo circa all'ottava parte della circonferenza della spera dell'acqua per essere lui lungo 3 mila miglia, e 'l flusso e riflusso non fa se non 4 volte in 24 ore, e' non s'accorderebbe tale effetto col tempo d'esse 24 ore, se esso Mare Mediterraneo non fusse lungo semila miglia, perchè se lo spogliamento di tanto mare avesse a passare per lo stretto di Gibiltar nel correr dietro alla luna, e' s'alzerebbe sì grande il corso delle acque per tale stretto, e s'alzerebbe in tanta altezza, che dopo esso stretto farebbe tal corso, che per molte miglia infra l'oceano farebbe inondazioni e bollimenti grandissimi, per la qual cosa sarebbe impossibile passarvi; e dopo questo l'oceano renderebbe colla medesima furia l'acque ricevute, d'onde esso le riceve; ecco che adunque mai si passerebbe per tale stretto; e la sperienza mostra che d'ogni ora vi si passa, salvo che quando il vento vien per la linia della corrente, allora il riflusso forte s'aumenta » ([4]). Come si vede, Leonardo, partendo dall'idea che, se la luna attraesse l'acqua del mare, dovrebbe formarsi una intumescenza del mare stesso al disotto di lei che la seguirebbe nella sua corsa, ne deduce che al momento in cui questo rigonfiamento passasse per lo Stretto di Gibilterra, dovrebbe prodursi nell'angustia di quel braccio di mare un tal ringorgo di acque da impedire qualsiasi navigazione, il che non è affatto. Ma l'errore principale nascosto, per così dire, fra le pieghe del ragionamento, sta nella supposizione che la marea abbia origine all'estremità orientale del Mediterraneo, e di là si propaghi poi nell'Oceano, mentre invece è noto che accade precisamente il contrario ([5]).

Esclusa dunque, sebbene forse non interamente, come or ora vedremo, l'influenza della luna, Leonardo affaccia nuove spiegazioni. Anzitutto troviamo in lui un chiaro sostenitore dell'idea che fa della marea il respiro della terra, che anzi appare in lui come corollario di quel concetto più esteso che fa della terra un essere vivente. Ciò si rileva, non più dagli sparsi appunti dei varii manoscritti, ma bensì da un passo dell'opera *Del moto e misura delle acque*. « L'omo è detto dalli antiqui mondo minore. E cierto la dizione d'esso nome è ben collocata, imperocchè siccome l'omo

([1]) Id., id., fol. 57 r.

([2]) *Codice Atlant.*, fol. 80, recto *b*. È dubbio però se qui trascriva un'idea sua.

([3]) Intende che si dovrebbe osservare un affluire delle acque da ogni parte verso l'estremità orientale del Mediterraneo.

([4]) *Man. Leic.*, fol. 6 v.

([5]) La principale corrente di marea ha origine nel Pacifico d'onde si propaga da Est a Ovest penetrando nell'Atlantico e risalendolo; ma altre onde di marea si formano indipendentemente nell'Atlantico stesso. Cfr. Darwin, op. cit., pagg. 169-170. Le maree del Mediterraneo sono in gran parte ripercussione di quelle dell'Atlantico, turbate da numerose irrègolarità.

è composto di terra, acqua, aria e foco, questo corpo della Terra è il simigliante: se l'omo ha in sè ossi, sostenitori e armatura della carne, il mondo ha i sassi sostenitori della terra, se l'omo ha in sè il laco del sangue dove crescie e dicrescie il polmone nello alitare, il corpo della terra ha il suo ocieano mare, il quale ancora lui crescie e discrescie ogni sei ore per lo alitare del mondo, etc. » [1]. Sullo stesso concetto torna in un altro passo, molto chiaro, del manoscritto di Leicester [2], e nel Codice Atlantico si trova un curioso calcolo, in cui, prendendo a base i dati sul flusso e riflusso, sulla grandezza del polmone umano e sul numero delle sue respirazioni, si cerca la grandezza del polmone terrestre [3]; ma questo calcolo non va preso molto sul serio; e del resto in questo stesso brano si vede chiaramente come Leonardo, approfondendo maggiormente questa idea che cerca la spiegazione della marea in una sorta di respirazione, si sia imbattuto in serie difficoltà. Egli scrive infatti: « Tale alitare (della terra) non po esser fatto sanza moto della superficie della terra; e se tu volessi che fussi aria in fralla quantità del polmone e la parete di dentro della terra, e' sarebbe necessario che nell'accrescimento del polmone l'aria li dessi loco; la qual sarebbe tanta quant'è la somma dell'acqua, che manca al mare nel suo frusso; e per questo, grandissimo vento uscirebbe, in 6 ore del frusso, uscirebbe della terra, e grandissimo ritornerebbe in altre 6 ore; e questo frusso e refrusso ordinario del mare infra 'l mare darebbe frusso e rifrusso dell'aria in frall'aria, il quale al continuo sarebbe in atto con grandissimo vento, che anderebbe e tornerebbe per un medesimo cammino; come far si vede allo spiracolo della cassa dov'è rinchiuso l'omo; il quale ben si conosce nel tenere il lume dinanti a esso spiraculo;..... *ma la terra non si move come il petto* ». Dovette dunque sembrare a Leonardo che quest'idea dell'alitare del mondo, che in modo seducente rappresentava genericamente il flusso e riflusso del mare, non potesse in realtà esser ridotta ad una spiegazione razionale del fenomeno stesso. Non è maraviglia perciò se in altri passi di manoscritti leonardiani troviamo un'altra spiegazione della marea; ma è pur notevole che questa nuova spiegazione della marea non sia in aperta contradizione con la precedente, perchè ambedue concordano nel fatto sostanziale che la marea sia un movimento spontaneo del mare, non provocato da agenti esteriori.

L'autore parte sempre dal Mediterraneo. L'acqua portata al mare dai fiumi dell'Africa, dell'Asia e dell'Europa fa aumentare il Mediterraneo che riversa questo eccesso di acque nell'Oceano per l'unica sua uscita, lo stretto di Gibilterra; l'Oceano a sua volta, per questo straordinario tributo si ringorga e cresce, particolarmente nei golfi e negli stretti tra la Francia e l'Inghilterra — dove le maree sono maggiori — e si ha il flusso; poi l'acqua, salita, deve per il suo peso naturalmente ridiscendere, e

[1] Leonardo da Vinci, *Del moto e misura dell'acqua*, cap. 39, in *Raccolta di autori italiani che trattano del moto delle acque*, IV edizione, tomo X, Bologna, 1826.

[2] « Adunque potremo dire la terra avere anima vegetativa, e che la sua carne sia la terra, li sua ossi siano li ordini delle collegazioni de' sassi, di che si compongono le montagnie, il suo lago del sangue che sta dintorno al core è il mare oceano, il suo alitare, è 'l crescere e decrescere del sangue pe li polsi, e così nella terra è il flusso e riflusso del mare, e 'l caldo dell'anima del mondo è il fuoco, etc. ». *Man. Leic.*, fol. 34 r.

[3] *Codice Atlant.*, fol. 260, recto *a*.

si genera così un movimento di altalena continuamente ristorato per opera dei fiumi [1]. Secondo quest'idea, la marea dell'Oceano sarebbe una ripercussione di quella del Mediterraneo; ma a Leonardo non poteva sfuggire che la causa che genera o mantiene il flusso e riflusso nel Mediterraneo — il tributo dei fiumi — è ugualmente attiva anche nell'Oceano, per cui in un altro passo del Codice Atlantico [2] questa spiegazione, prima accennata pel solo Mediterraneo, è data generalmente per ogni mare. « Ogni moto d'acqua fa flusso e reflusso in ogni parte del suo fiume, dove la velocità del corso suo si ritarda. Pruovasi, perchè dove il corso dell'acqua è più repente, elli è più veloce, e dove elli è più piano, più si tarda; adunque il pelago piano riceve più acqua che non ne isgombra; per la qual cosa è necessario che l'acqua di tal pelago s'ammonti in tanta altezza, che 'l peso vinca l'acqua che la genera (spigne); e poi tale acqua sospinta discende della sua altezza intorno alla base del predetto colle, e quella parte che discende contro alla già detta corrente, ringorga tal corrente in modo che l'acqua superiore della medesima corrente si ritarda, insin che la succedente acqua soprabbonda, e vince il refrusso e genera nuovo flusso ». Il fatto che questa idea è ripetuta in più luoghi dei suoi appunti, ci fa ritenere ch'essa sia veramente di Leonardo; egli torna così ad una spiegazione, non nuova affatto nel Medio Evo, e già nell'antichità attribuita, a torto o a ragione, allo storico Timeo.

Tali dunque le idee generali di Leonardo rispetto al fenomeno della marea, di cui egli sembra proprio che cercasse una spiegazione indipendente dall'azione lunare. Ma che quest'ultima potesse entrare come fattore addizionale, sembra esser indicato dal passo più volte citato del manoscritto di Leicester: « Nelle parti occidentali, appresso alla Fiandra, il mare cresce e manca ogni 6 ore circa 20 braccia e 22 quando la luna è in suo favore, ma le 20 braccia è il suo ordinario, il quale ordinario manifestamente si vede non esser per causa della luna ». Si può rimproverare a Leonardo di non avere — per quanto si rileva dai manoscritti finora pubblicati — tenuto abbastanza conto delle concordanze generalmente note fra i varî periodi della marea e le fasi lunari; ma poichè abbiamo visto che anche altri scrittori, che di tali concordanze fanno menzione, non si peritano ciò malgrado di offrire spiegazioni affatto indipendenti dalla luna, tanto meno ci deve maravigliare che a questi si unisca anche il nostro grande pensatore. Il quale, con le sue incertezze, rappresenta lo stato generale delle menti dei dotti, riguardo alla spiegazione di questo fenomeno, sul volgere del Medio Evo. L'unico fatto saliente per cui Leonardo si stacca da tutti indistintamente i suoi predecessori è il tentativo notevolissimo di raccogliere dati sistematici su tale fenomeno per tutti i mari. Siamo all'alba di un periodo in cui nuovi oceani stanno per essere navigati, e in cui la marea sarà ormai osservata ovunque; altri proseguiranno nell'indirizzo segnato da Leonardo, e soltanto la raccolta di dati di fatto numerosi permetterà più tardi a qualcuno di formulare e discutere ipotesi sulla causa del fenomeno, se non ancora scientificamente giusto, men povere almeno di fondamenti positivi.

(1) *Man. Leic.*, fol. 35 r.; *Codice Atlant.*, fol. 281 recto *a*; fol. 353 verso *c*.
(2) *Cod. Atlant.*, fol. 354 recto *e*. Cfr. fol. 361 verso *a*.

CONCLUSIONE.

Lo stato della questione alla fine dell'Evo Medio.

Giunti al termine della nostra scorsa attraverso gli scrittori del Medio Evo, se ci provassimo a riassumere, come abbiamo fatto alla fine dell'epoca antica, lo stato delle cognizioni relative al fenomeno che ci occupa, troveremmo che il progresso delle conoscenze, dall'epoca di Plinio alla fine del Quattrocento è stato pressochè insignificante. Tutto si riduce forse a qualche nuovo fatto acquisito mediante l'osservazione della marea in mari poco frequentati dagli antichi, come l'Atlantico settentrionale e l'Oceano indiano, e anche questo per opera di popoli — come gli Arabi e i Normanni — posti al di fuori degli antichi focolari di civiltà. Si potrebbe anzi parlare di un regresso nel Medio Evo, in quanto che il gran numero di opinioni diverse emesse nel corso dei secoli e fondate più che altro su speculazioni astratte, doveva aver generato nelle menti una notevole confusione, della quale si vedono qua e là cospicui segni; uno studioso del II o III secolo dell'Era Volgare, prendendo in mano i libri dei geografi più nominati avrebbe potuto farsi un'idea abbastanza chiara nel complesso, di ciò che si conosceva allora riguardo alla marea; ma ciò sarebbe riuscito molto difficilmente ad uno studioso del secolo XV che avesse voluto leggere ciò che dicevano al riguardo anche solamente gli scrittori più celebrati. Si aggiunga che, mentre nell'antichità i maggiori geografi avevano tenuto molto conto delle osservazioni fatte o raccolte dalla bocca di altri, di ciò poco si occupano in genere gli scrittori medievali (se se ne eccettuino alcuni Arabi), i quali architettano sovente spiegazioni molto elaborate, ma prive di ogni fondamento positivo.

Sarebbe però ingiusto asserire che le lunghe discussioni sulle cause del fenomeno fatte nel Medio Evo non abbiano, per quanto astruse e disordinate, servito proprio a nulla. Esse hanno condotto, sul volgere del secolo XV, se non a rigettare del tutto, almeno a mettere un po' da parte alcune spiegazioni prima molto in voga, che vengono ora dai più abbandonate, mentre si cerca di battere nuove vie. A questa tendenza si debbono anzi, almeno in parte, i nuovi tentativi, alcuni dei quali abbiamo ricordato, di cercare ipotesi nuove; tentativi che perciò non debbono esser guardati con disprezzo, anche se non appaiono troppo felici e se non sono destinati a sopravvivere.

Ma noi vogliamo lasciare in sospeso ogni giudizio sul progresso delle conoscenze nel Medio Evo, per fare invece qualche osservazione generale sull'opera degli studiosi tanto nell'Evo antico quanto nel Medio. E qui in primo luogo occorre notare che le osservazioni positive sul fenomeno della marea erano state sempre troppo poche e in genere insufficienti a permettere a chicchessia di porre le basi per una spiegazione scientifica della marea; si avevano, è vero, in complesso osservazioni sul fenomeno da un gran numero di mari: dall'Oceano Indiano, e, se vogliamo, dai mari della Cina, fino alle coste della Norvegia; dal Mar Rosso alle coste della Gran Bretagna e dell'Irlanda; ma le più erano osservazioni isolate, spesso inesatte, raccolte da stu-

diosi locali, in modo che molte non erano penetrate nel dominio dell'universale conoscenza. Nessuno aveva pensato a raccogliere insieme tutti i dati di fatto che si possedevano per le diverse regioni conosciute. Una tale raccolta, diligentemente vagliata in modo da eliminare tutte le notizie incerte o assurde o contraddittorie, avrebbe portato forse, nel secolo XIII o XIV a notevoli progressi; ma la tendenza delle menti non era, come già fu detto, rivolta per questa via.

In tale stato di cose noi non possiamo neppur decidere, in molti casi, se anche le persone più illuminate avessero coscienza che la marea è un fenomeno universale e comune a tutti i mari. Il riconoscimento di tale universalità è d'importanza capitale per dare una spiegazione scientifica del fenomeno. Nell'antichità, poichè il solo mare veramente ben conosciuto, molto frequentato, era il Mediterraneo, dove le maree sono deboli, irregolari, e spesso mascherate da altri fenomeni, era naturale che su questa universalità si potesse stare in dubbio; tuttavia è lecito affermare che studiosi come Eratostene, Posidonio, Plinio avessero intraveduto nella marea un fenomeno proprio di tutti i mari, e diverso nei diversi luoghi solo per entità o per una maggiore o minore regolarità. Ma nel Medio Evo ebbe singolare fortuna quella classificazione dei mari, inaugurata dagli Arabi e accolta dagli scienziati scolastici, che poneva, accanto ai mari dove il fenomeno è visibile, quelli ove non si può osservare e quelli ove non esiste affatto.

Anche presso coloro che non accettano o non menzionano tale classificazione, non si ha nessun chiaro indizio di una coscienza dell'universalità della marea; nessuno si è occupato particolarmente della questione e lo stesso Leonardo si mostra incerto a tal proposito. La generale conoscenza dell'universalità del flusso e riflusso, la concezione di esso come fenomeno insito in tutti i mari per natura, è portato solamente delle grandi navigazioni del secolo XVI.

Assai notevole è inoltre il fatto che non si sia mai sentito il bisogno di eseguire *misure* dirette a fornire una conoscenza più precisa del fenomeno. Le diverse altezze che raggiunge la marea nelle diverse spiagge, come pure le differenze fra le maree comuni e quelle delle sizigie e quadrature, non sono mai espresse numericamente fino ai tempi di Leonardo da Vinci, che si segnala appunto per aver fatto il primo timido passo per questa via (¹); l'elemento matematico manca durante tutto il Medio Evo nei dati di fatto raccolti, come manca interamente nelle spiegazioni escogitate a dar ragione del fenomeno. Conseguenza di ciò è che tutte queste spiegazioni hanno qualche cosa di vago, di indeterminato, anche là dove le astruserie e le assurdità non tolgono loro ogni carattere positivo: nessuna assorge alla complessità di una vera e propria *teoria*. L'elemento speculativo, astratto, domina sovrano specialmente nel Medio Evo fino al punto di far trascurare ogni base di fatto: si vedono spesso emesse ed accettate spiegazioni che prescindono presso che interamente dalle condizioni reali in cui si verifica il fenomeno e che sono dettate al solo scopo di ricondurre anche questo fatto ribelle, nella cerchia di sistemi architettati in precedenza e nel dominio di leggi stabilite a priori.

(¹) Non è il caso di tener conto della misura di Pitea, riferita da Plinio, di cui fu già parlato.

Le grandi navigazioni transoceaniche, mentre fornirono l'opportunità di fare osservazioni e misure in ogni luogo, fecero sentire più viva la necessità di avere informazioni precise ad uso dei naviganti, e già Sebastiano Caboto avrebbe invitato i naviganti a raccogliere indicazioni sulle *ore del porto* per molti luoghi delle spiagge atlantiche (¹).

Tuttavia le *misure* delle massime altezze del flusso eseguite nel secolo XVI e anche nel XVII furono in numero di gran lunga minore di quello che si potrebbe aspettare dalla estensione e dalla frequenza delle navigazioni, a tal segno che Riccioli, pubblicando, nel 1661, nella sua *Geographia et Hydrographia reformata*, tutti i dati, raccolti in una tavola, sulle altezze massime del flusso nei varî luoghi, scriveva queste significanti parole: « Tanta est penuria observatae altitudinis aestuum apud scriptores, ut *pudeat paene pauca haec protulisse* » (²). Si aggiunga inoltre che le osservazioni fatte dai naviganti nei mari lontani non sembra si diffondessero tanto rapidamente fra gli uomini di scienza, fra i teorici; di modo che, in mezzo alle moltiplici disformità che la marea presenta nei diversi mari, non si erano ancora da tutti sviscerati con completa sicurezza quei tratti fondamentali del fenomono, sempre uguali dovunque, riconosciuti da tutti, sui quali si potesse fondare una teoria: ancora Galileo giunge ad affermare che la durata del riflusso dipende dalla lunghezza del bacino in cui si osserva e che il periodo di sei ore non è il più proprio e naturale, ma solo il più osservato, come quello che compete al Mediterraneo, mentre in altri mari potranno aversi periodi di una, due, quattro, dieci ore (³). Ai suoi tempi non era ancor dunque universale l'accordo su un carattere tanto fondamentale del fenomeno. In tale stato di cose non ci fa maraviglia se alcuni — e Galileo è tra questi — persistono anche nei secoli seguenti a negare che la luna sia causa prima del fenomeno, dal momento che l'accordo fra le vicende della marea e il corso dell'astro non era ancora così radicato nelle menti di alcuni dotti, come si potrebbe aver ragione di aspettarci. Inoltre la teoria della influenza lunare non era immune da ostacoli di varia natura. Infatti se, non contentandosi di additare semplicemente — come avea fatto Abû Ma'šar e in certo senso anche Plinio — la luna come causa del fenomeno, senza cercar più in là, si voleva invece indagare la natura dell'influenza lunare, ecco farsi inanzi mille difficoltà. Esaminate ad una ad una tutte le *virtù* conosciute della luna, che, secondo le idee medioevali, si riducevano a tre — la luce e il calore strettamente connesse fra loro, e il moto — si doveva venire, con un po' di ragionamento, alla conclusione che nessuna di queste tre poteva prestarsi a dare una spiegazione soddisfacente, esauriente dei fatti conosciuti. Ed ecco la necessità di concludere per un'influenza occulta della luna, diversa da quelle universalmente note, fosse pure quella tradizionale, ma inesplicabile, per cui si credeva ch'essa dominasse sui corpi umidi: influenza che, per il fatto stesso di essere occulta e di esercitarsi a distanza senza agire sul mezzo attraversato, fu paragonata all'influenza del magnete sul

(¹) Peschel-Ruge, *Geschichte der Erdkunde*, pag. 435.

(²) Riccioli, *Geographia et Hydrographia reformata*, lib X, cap. 4, pag. 438 (Bologna, 1661).

(³) Galileo, *Dialogo dei massimi sistemi*. Giornata IV. Il trattato del flusso e riflusso di Galileo è stato pubblicato, secondo l'autografo vaticano, da G. Cozza-Luzi negli Atti dell'Accad. Pontif. dei Nuovi Lincei, Vol. XV (1899), pagg. 403-42.

ferro. Ma poichè esercitantesi a distanza e parimenti occulta era anche l'influenza che la luna e gli altri corpi celesti esercitavano, secondo le comuni credenze, sulle tendenze e i destini degli uomini, vi era serio pericolo che con questo genere d'influssi immaginarî venisse confusa sovente anche la influenza reale della luna sul mare. E in un tempo in cui le dottrine astrologiche furono fieramente combattute, non è maraviglia che si oppugnasse vivacemente anche la dottrina dell'origine lunare della marea, e che a menti illuminate, come quelle di Pico della Mirandola, di Galileo e di non pochi altri, repugnasse l'ammettere l'influenza degli astri sul mare, onde giganteschi e mirabili, ma vani tentativi di mettersi per altre vie.

Tra simili strettoie si dibattono le menti dei dotti anche nei secoli XVI e XVII, onde, in questo tempo, malgrado l'estendersi delle osservazioni, malgrado il progresso individuale, talora notevole, di alcuni ingegni isolati, non si fa il più piccolo passo in avanti sulla via dell'accordo nella questione della causa della marea. Questo apparirà manifesto dalle seguenti pagine, nelle quali, come chiusa del nostro lavoro, ci studieremo di esporre brevissimamente quale sorte fosse riserbata alle spiegazioni riferite nei capitoli precedenti e quali spiegazioni nuove sorgessero in quei centocinquant'anni che trascorsero fra la fine del Medio Evo e la scoperta della gravitazione universale.

Per una buona parte nel secolo XVI i trattati sul flusso e riflusso, che cominciano a farsi numerosi, hanno un carattere più che altro descrittivo ed empirico; contengono cioè notizie, non sempre esatte e spesso assai vaghe e poco scientifiche, sulle condizioni del fenomeno nelle spiagge di recente scoperte, ciò che allora si chiamava *Storia della marea*, e dinanzi a queste notizie passa quasi in seconda linea l'indagine affannosa della causa. Tra le spiegazioni più caratteristiche ricorderò quella di Gaspare Contarini (1483-1542) che ritiene il flusso altro non essere che una rarefazione delle acque marine, seguita da un rigonfiamento, dovuto al calore della luna, e il riflusso la successiva condensazione, confessando peraltro di non saper spiegare nè il flusso antipodale, nè l'assenza di marea in molti luoghi del Mediterraneo [1]; quella di Lodovico Boccaferri (1482-1545), già ricordato, che nei commenti alla Meteorologia di Aristotele, riferite e confutate una quantità di opinioni anteriori, ne accetta una, che erroneamente attribuisce a Pico della Mirandola, secondo cui la marea sarebbe dovuta essenzialmente ad una « inaequalis positura alvei maris » e la luna entrerebbe solo come causa secondaria [2]; quella di Pandolfo Sfondrato,

[1] Gasparis Contareni, Cardinalis ampliss. philosophi sua aetate praestantissimi, *De elementis et eorum mixtionibus*, libri V, Lutetiae Parisiorum per Nicol. Divitem, 1548, pag. 34r. e segg.

[2] Il commento del Boccaferri, già da noi più volte citato e molto importante, fu edito a Venezia dopo la morte dell'autore, nel 1570. « Ludovici Buccaferri | bononiensis | eoque philosophiam olim pu|blice profitentis | Lectiones in secundum ac tertium | Meteororum Aristotelis libros | nunc primum in lucem editae | superadditis duobus indicibus | tum rerum, tum quaestionum copiosissimis | Cum privilegiis. Venetiis apud Hieron. Scotum MDLXX ». Le lezioni sulla marea sono cinque (dalla 15ª alla 19ª) e vanno da cc. 12 v. col. 1ª a cc. 16 v. col. 2ª. L'edizione è alquanto scorretta. Queste cinque lezioni sono contenute, come già accennammo, anche in un manoscritto cartaceo della biblioteca Casanatense di Roma (n. 1508), in esposizione più diffusa e più piana, perchè raccolte evidentemente da uno scolaro dalla bocca stessa del maestro; l'ordine e la materia sono peraltro identici. Il manoscritto consta di 48 carte non numerate; bianche le prime

che in un trattato speciale sul flusso e riflusso pubblicato nel 1590 sosteneva che questo moto del mare risultava da una combinazione dei due grandi moti delle acque da Nord a Sud e da Est ad Ovest, coi quali si compiva, secondo le credenze d'allora, la circolazione oceanica ([1]); infine quella di Francesco Patrizi (1529-97), ingegno originale e ardito, che, rigettando tutte le spiegazioni basate su un' influenza lunare, poneva come causa comune così della marea come di tutti gli altri moti del mare, l'esistenza in seno al mare di grande calore e di vapori o *spiriti*, quelli stessi che eran causa manifesta della salsedine marina ([2]).

Nel 1598 Giovanni Botero (1533-1617), pubblicando uno dei primi trattati speciali di oceanografia che si abbia, riteneva, secondo l'opinione comune, la luna causa della marea, ma non dissimulava i molti problemi che ancor rimanevano insoluti, scrivendo queste parole che meritano di essere riferite: « E se bene, per la signoria che la Luna ha sopra l'acque, par cosa molto conforme alla ragione che ella possa tirarle, gonfiando, a sè, come la calamita tira il ferro, nondimeno di gran merauiglia è, che hauendole tirate per sei hore su, le lasci poscia per altre sei ritornare al lor letto. Onde può nascer questo? manca forse alla Luna la virtù di reggerle e sostentarle, o la natura e la inclinatione delle acque verso il luogo naturale à più forza che la Luna? e la natura universale che la particolare? o pur questa è quasi una febre del mare che la trauaglia sei hore e lascia in riposo altre tante, o pure egli è quasi un moto del mare, composto di sistole e diastole? » ([3]).

Al grande matematico belga Simone Stevin (1548-1620), che consacrava il VI libro della sua Geografia al fenomeno che ci occupa, la dottrina della marea deve un vero progresso. Egli per primo mette in luce nettamente come l' indispensabile fondamento per una teoria matematica siano i dati dell'esperienza, affermando che in

---

tre e l'ultima. Sul verso della carta 24 (21 delle scritte) si legge in margine: « Lectio 57ª » (87ª) (la terza sull'argomento del flusso); nel verso della cc. 32: « Lectio 88ª »; nel verso della cc. 39: « Lectio 89ª ». La seconda lezione comincia a cc. 14r. ma non vi è indicazione in margine. — Quanto all'opinione dell'autore, la inegual positura dell'alveo del mare, causa prima della marea, può intendersi secondo lui in tre modi: o che la parte centrale del mare sia depressa rispetto alle rive più alte, in modo che le acque dalle rive scendano verso il mezzo, e ivi, urtandosi tornino indietro verso le rive continuando indefinitamente in questa altalena; o che il declivio del fondo penda verso una sola direzione, lungo la quale l'acqua discende fino a che venga respinta dall'ostacolo di un'altra riva, ritornando indietro e rimbalzando, come una palla; o che infine negli stretti il fondo sia più alto nel centro che sulle sponde, generandosi allora quella librazione delle acque o ταλάντωσις cui accenna Aristotele. L'influenza lunare sarebbe solo una causa accidentale. — L'opinione riferita da Pico sulla fede di Adelando è peraltro un po' diversa da questa, e a torto il Boccaferri le confonde, mostrando di non aver ben capito quanto Pico scriveva.

([1]) *Causa aestus Maris*, Pandulpho Sfondrato, autore. Ferrariae apud Bened. Mammarellum, 1590.

([2]) Il Patrizi giunge a questa sua strana concezione riflettendo che se l'acqua salata del mare soltanto, non quella dolce, presentava il fenomeno della marea, causa di questo doveva esser la salsedine, o almeno salsedine e marea dovean aver una causa comune: questa è data dal calore interno e dai vapori del mare. Si vegga: Francisci Patricii, *Nova De Universis philosophia*; Ferrariae ap. Bened. Mammarellum 1591. Parte IV. Libri XXVIII e XXIX.

([3]) *Relatione del mare* di Giovanni Botero benese, in calce ai libri della Ragion di Stato. Venezia, Bertani, 1671, pagg. 73-74.

seguito alle grandi navigazioni oceaniche si abbian ora a disposizione materiali più copiosi che per il passato: per primo fornisce una spiegazione matematica dei fenomeni più importanti che la marea presenta. Peraltro anch'egli non si pronunzia sulla causa ultima del fenomeno, dichiarando di chiedere che gli si conceda come *postulato* che la luna *e il suo punto opposto* attirano e succhiano l'acqua marina; su ciò egli fonda le ulteriori dimostrazioni (1).

Una generazione dopo lo Stevin, Keplero (1571-1650), sostenendo fermamente l'opinione di un'influenza magnetica della luna sulle acque, voleva significare che questa influenza era differente così dalla radiazione come dal moto, pur essendo naturale come quest'ultime, e precorreva in certo modo Newton nella sua grande scoperta (2).

A Stevin e a Keplero si devono gli unici progressi veri fatti dalla dottrina della marea prima di Newton, ma questi progressi non si diffusero largamente: le dimostrazioni matematiche di Stevin non sembra fossero prese in considerazione dai più, e le idee di Keplero furono combattute da Riccioli (3) e da altri; a guisa di reazione molti ritornarono, come or ora vedremo, a opinioni vecchie.

Galileo (1564-1642), cedendo a una natural repugnanza ad ammettere le influenze occulte degli astri, e basandosi sul fatto che il Mediterraneo non sembra obbedire alle cause che producono la marea nell'Oceano (4), nega risolutamente che la luna possa essere in qualsiasi modo la causa del fenomeno (5), e non risparmia i suoi rimproveri neppure a Keplero per aver professato questa idea (6). La sua spiegazione — la quale poneva come causa della marea i cambiamenti che il moto diurno di rotazione della terra, diversamente accelerato o ritardato nella sua combinazione col moto annuo di rivoluzione, produce nel movimento assoluto di ciascuna molecola del mare — può sembrar ingegnosa, ma la dichiarazione delle vicende mensili ed annue è straordinariamente lambiccata; egli stesso non nasconde che gli era costata gran sforzo d'ingegno (7). Perciò appunto essa ebbe, malgrado l'autorità dell'uomo, poco seguito; ad

(1) « ... Plusieurs ont estimé que la lune et son poinct opposite ont une mesme proprieté qu'ils attirent et sucent l'eau en haut vers eux: toutefois il est incertain si en la nature la chose soit tellement, car par leur pressement ou repoussement (qui est le contraire d'attirer) il adviendroit aussi deux flux et deux reflux. Mais lequel des deux est la cause de ce, ou bien si une troisième proprieté en est la cause, je pense que cela est incognu, faute d'experience ». *Les ouvres mathématiques* de Simon Stevin de Bruges. A. Leyde chez Bonav. et Abraham. Elsevier. 1634, pag. 177.

(2) Pixis, *Kepler als Geograph.*, Monaco, 1898, pagg. 66 e segg.

(3) Riccioli, *Almagestum Novum*, lib. IX, Sect. IV, cap. 14, § 40.

(4) « La luna scorre ogni giorno sopra tutto il Mediterraneo nè però si sollevano le acque, salvo che nelle sue estremità orientali e qui a noi in Venezia ». Op. cit., loc. cit.

(5) « Vedendo come questo dei mari è un movimento locale e sensato, fatto in una mole immensa d'acqua, non può arrecarsi a sottoscrivere a lumi, a caldi temperati, a predominii per qualità occulte ed a simili *vane immaginazioni* le quali *tantum abest* che siano o possano esser cause del flusso, che per l'opposito, il flusso è causa di quelle ». Op. cit., loc. cit.

(6) « Più mi meraviglio del Keplero che di altri, il quale d'ingegno libero ed acuto, e che aveva in mano i moti attribuiti alla terra, abbia poi dato orecchio ed assenso ai predominî della Luna sopra l'acqua ed a proprietà occulte, e simili *fanciullezze* ». Op. cit., loc. cit.

(7) « Cessa la mia meraviglia nel rimembrarmi quant'ore, quanti giorni, e più, quante notti abbia io trapassato in questa speculazione ». Op. cit., loc. cit.

essa si accostava, è vero, il Gassendi (1592-1655) (1), ma Riccioli le dedicava una lunga, elaborata e anche riuscita confutazione (2). Anche il grande Francesco Bacone (1560-1626) si opponeva a Galileo, ma la spiegazione da lui proposta che rintracciava la causa prima del fenomeno nella configurazione dei continenti antico e nuovo (3) non è degna di maggior considerazione.

Verso questa stessa epoca Scipione Chiaramonti (1565-1652) giunge all'enormità di affermare che il flusso è un vero e proprio aumento nella massa delle acque, e, risuscitando un'antica opinione, sostiene che tale aumento è dovuto al tributo dei fiumi, come era inclinato a credere anche Leonardo da Vinci (4); Tommaso Lydiat (1572-1646) scrive che nel fondo del mare esistono estese masse di bitume ardente, dalle cui esalazioni il mare viene gonfiato e sollevato e alle quali è dovuta anche la salsedine (5): alcuni ecclesiastici tra cui il P. Leonardo Lessio, citato dal Fromondo, non si peritano di ammettere sul serio l'esistenza di Angeli o intelligenze superiori deputate da Dio a regolare questo movimento del mare (6).

Cartesio (1596-1650), fedele alle sue teorie cosmologiche generali, ammette che fra la luna e la terra girino vortici di materia atomica sui quali la luna esercita una pressione; questa trasmettendosi sulla superficie delle acque occaniche le obbliga a sfuggire lateralmente (7). La luna dunque è causa del riflusso anzichè del flusso, e Cartesio risolve nell'ultimo dei due modi la questione posta da Stevin, se la luna esercitasse un'attrazione od una pressione.

Fournier, nel suo noto trattato di Idrografia pubblicato nel 1643 (8) mette innanzi come probabili tanto l'ipotesi di Galileo-Gassendi, quanto le vedute più antiche di Platone, ma propende maggiormente a ritenere, secondo un'altra opinione, vecchia anch'essa, che la luna susciti dei vapori o *aliti* caldi nel seno del mare producendo ribollimenti simili a grandi febbri periodiche (9).

(1) Gassendi, *De motu impresso a motore translato* in *Opera omnia*. Leida, 1642, vol. III, parte 3a.

(2) *Almagestum Novum*, lib. IX, Sect. IV, cap. 14, §§ 43-44.

(3) Cfr. Günther, *Geophysik* (Stuttgart 1899), vol. II, pag. 469.

(4) « In hoc convenio (aestum) esse aquae incrementum non autem fluxum aquae ». *Opus* Scipionis Claramontis Caesenatis, *De Universo*. Coloniae Agrippinae ap. Jod. Kalcoven 1644; lib. XIII, capp. 22-26. Egli negava l'influenza lunare per gli stessi motivi esposti da Galileo: che cioè il moto del Mediterraneo non corrispondeva con la teoria.

(5) Fromondo, *Meteorologicorum Libri Sex*. Lib. V, art. 7 e segg. Tale spiegazione è, come vedesi, pressochè identica a quella del Patrizi. Con essa erano sciolti due grossi dubbi che affaticavano i dotti del tempo: primo perchè soltanto le acque salate avessero il flusso e riflusso; secondo, come avvenisse il flusso antipodale. La ragione di questo fatto è, secondo il Lydiat, che « in mari gurgites sunt pleni ardenti bitumine qui terram totam... ad Antipodes usque perforant, per quos unda de hemisphaerio in hemisphaerium perpetuo commeat et rebullit ». Fromondo, op. cit., pagg. 256-57.

(6) Liberti Fromondi, op. cit., pagg. 252-53.

(7) Günther, *Geophysik*, II, pag. 469.

(8) Fournier, *L'Hydrographie contenant la théorie et la pratique de toutes le parties de la navigation*. Paris, 1643, pag. 449 e segg.

(9) Cfr. Peschel-Ruge, *Gesch. der Erdkunde*, pag. 437. Fournier invece non dà alcuna importanza alle dottrine di Keplero. « Comme cet homme dit cela gratuitement et sans apporter aucun argument — scrive — il me dispensera de refuter son erreur ». *Hydrogr.* Lib. IX, cap. 23.

In pieno secolo XVI dunque la discordia non è minore che alla fine del Quattrocento: il Fromondo (ca. 1587-1653) nel suo trattato di Meteorologia poc'anzi ricordato, riferisce sette o otto spiegazioni diverse, e da ultimo la sua, secondo cui la luna evoca dal fondo del mare uno *spiritus*, di natura ignota, forse analoga a quella dei bitumi [1]; Riccioli (1598-1671), geografo positivo e accurato, espone diligentemente e confuta diciassette spiegazioni, tra cui quella di Timeo-Chiaramonti, di Platone, dello Sfondrato, di Pico, del Lydiat, del Contarini, di Bacone, di Keplero, di Galileo ecc., regalandoci infine, per diciottesima, la sua; questa non differisce da quella per cui propendeva Fournier se non per ammettere come cause secondarie quasi tutte quelle che dai più reputati autori eran ritenute come cause uniche: l'influenza del sole e degli altri astri, il tributo dei fiumi, la combinazione delle correnti marine, l'azione di voragini sottomarine assorbenti l'acqua, i venti, i fuochi sottomarini, la conformazione e la pendenza delle spiagge [2]. È un eclettismo ben spiegabile in tempi di tanta incertezza.

Le cose non cambiano d'aspetto nella generazione anteriore a Newton. Varenio, nella sua opera geografica, pubblicata nel 1650, riferite alcune precedenti spiegazioni, tra le quali trova ancor posto quella secondo cui la marea ha l'origine dal Maelström [3], accetta la spiegazione di Cartesio lievemente modificata [4]; Isacco Voss (1618-1689), spirito bizzarro e indipendente, si arrischia ancora a proclamare il sole causa del flusso e riflusso, asserendo che le concordanze di esso con le fasi lunari sono fortuite [5]; il Padre Kircher invece (1602-1680), dando alla luce nel 1665 il suo *Mundus subterraneus*, sostiene la teoria dell'influenza lunare e dice che la virtù della luna consiste nella sua natura *nitrosa e salina*, analoga cioè alla natura del mare [6]. Tutti gli scrittori di questo tempo mettono in luce chiaramente l'ardua difficoltà del problema con frasi molto significative, alcune delle quali si leggono nel frontespizio di questo lavoro: taluno giunge perfino a dubitare se il fenomeno avrà mai una spiegazione esauriente. Ma nel 1689 Newton pubblicava i suoi *Principia Mathematica*.

(1) Liberti Fromondi S. Th. L., *Meteorologicorum Libri Sex*. Antuerpiae ex Offic. Plantiniana, 1627. Lib. V, artt. VII-XI. Egli si richiama, per corroborare la sua ipotesi, all'esistenza di un vetriolo scoperto da un tal Swingerio che cresce e decresce con la luna (!!).

(2) Riccioli, *Almagestum Novum*, lib. IX, sect. IV, cap. XIV. Bononiae, 1651.

(3) L'opinione che fa di voragini sottomarine la causa della marea si trova accennata anche da Galileo.

(4) Varenius, *Geographia Generalis*, Pars absoluta, lib. I, propp. XI-XIII.

(5) Isaaci Vossii, *De motu marium et ventorum*. Hagae Comitis, 1663; capp. XVI-XX.

(6) Kircher, *Mundus subterraneus*. Amstelodami, 1678, lib. III, sect. II, cap. I.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 7°, 2° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 1°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCII

Serie Quinta — Volume V — Fascicolo XI.

LUIGI BALBIANO

AZIONE

DELLA

SOLUZIONE ACQUOSA DI ACETATO MERCURICO

SUI COMPOSTI OLEFINICI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

Azione della soluzione acquosa di acetato mercurico sui composti olefinici.

Memoria del Corrispondente LUIGI BALBIANO

presentata durante le ferie accademiche del 1905.

Parte riassuntiva.

In uno studio preliminare, che feci fare nel 1899 dal dott. E. Cecchi-Mengarini (1), sopra alcune varietà di petroli italiani, si venne alla conclusione che essi, riguardo alla reazione di Riche ed Halphen (2), presentano il tipo dei petroli russi, petroli ricchi in idrocarburi ciclici della serie C_nH_{2n}.

Ho intrapreso in seguito coi dott. M. Palladini e C. Zeppa (3) uno studio più dettagliato del petrolio di Valleja, che contiene il 54 °/₀ di olî distillanti sotto 150°, e da questo studio potei, dai prodotti di ossidazione nitrica, dedurre i nafteni esistenti.

La questione principale che mirai a risolvere nel mio lavoro, fu di trovare un metodo che permettesse la costatazione netta delle due serie degli idrocarburi C_nH_{2n} isomere, le olefine ed i ciclo idrocarburi o *nafteni*, perchè il metodo di A. H. Allen (4) basato sull'assorbimento del bromo da una misurata frazione di petrolio, non dà risultati attendibili, sapendosi che anche gli idrocarburi a ciclo possono più o meno facilmente assorbire il bromo, tanto più quando questo si isola dall'acido ipobromoso, come prescrive appunto Allen.

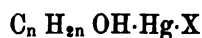
Per risolvere il problema propostomi mi basai sulla proprietà nota che hanno gli idrocarburi a lacune di entrare in combinazione con sali metallici per formare composti complessi, da cui con facilità si possono riottenere gli idrocarburi. Basta per ricordare simili combinazioni, citare gli antichi composti di Zeise (5) studiati in

(1) Gazz. chim. ital. t. 29, 1899, 460.
(2) Journal de Chim. et Pharm., 5 serie, t. 30, pag. 289.
(3) Gazz. chim. ital., t. 32, pag. 437 e t. 33, pag. 42.
(4) The Analyst 6, pag. 177 e Zeitschrift. f. Analytische Chemie, t. 21-588.
(5) Ann. d. Chemie, t. 23.

seguito dal Birnbaum [1], ottenuti per assorbimento dell'etilene col cloruro platinoso; e, tra i composti più recenti, quelli complessi che il Kutscheroff [2] ottenne cogli idrocarburi acetilenici ed i sali di mercurio. Nel gruppo degli idrocarburi olefinici già il Denigès [3] nel 1898 aveva preparato una serie di composti complessi delle olefine col solfato di mercurio, del tipo:

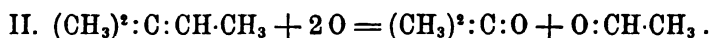
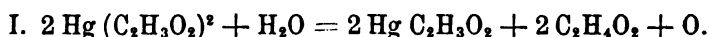
$$(Hg\,SO_4\,Hg\,O)_3\,R \qquad \text{dove } R = C_n\,H_{2n}$$

ed in seguito K. A. Hoffmann e J. Sand [4] ottennero composti più semplici e meglio definiti, trattando le olefine con soluzioni di sali mercurici, rese alcaline, composti principalmente del tipo:

$$C_n\,H_{2n}\,OH{\cdot}Hg{\cdot}X$$

Le ricerche dei due chimici tedeschi erano dirette solo sulle olefine gassose (etilene, propilene, butilene), perciò per il mio scopo era da studiare il comportamento delle olefine liquide, e come prodotto più alla mano, studiai col dott. Paolini quale azione esercitasse il trimetiletilene $(CH_3)^2{:}C{:}CH{:}CH{\cdot}CH_3CH_3$, sulla soluzione acquosa satura di acetato mercurico, ed ho scelto questo sale perchè solubilissimo nell'acqua fredda (1:4).

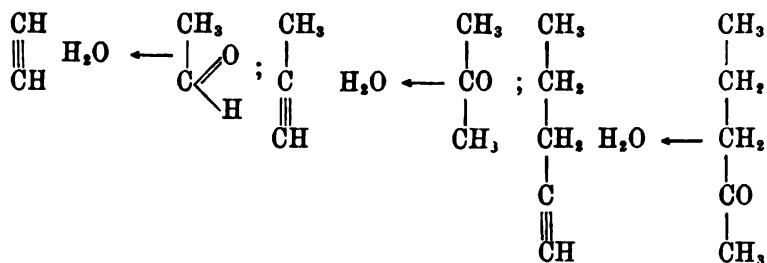
In una prima esperienza si seguì il procedimento di Hoffmann e Sand, cioè si addizionò un peso molecolare di amilene ad una soluzione satura di 1 p. mol. di acetato mercurico; si agitò vivamente, ed alla soluzione resa leggermente alcalina con idrato sodico, si aggiunse la quantità stechiometrica di bromuro potassico, cioè una molecola di bromuro per ogni atomo di mercurio adoperato. Si forma subito un precipitato bianco, vischioso, che col tempo indurisce ed ingiallisce. e che sottoposto alla distillazione con acqua acidulata, ridà l'amilene bollente a 36°-38°.

Però la reazione segue un altro andamento, se la soluzione di amilene nella soluzione di acetato mercurico si abbandona a sè alla temperatura ordinaria. Dopo qualche ora di riposo cominciano a comparire laminette bianche splendenti di acetato mercuroso, ed il liquido, man mano che il processo va svolgendosi, si colora in giallo e successivamente in rosso bruno, e nello stesso tempo l'acetato mercuroso si riduce a mercurio. L'amilene scompare completamente e si ottengono, come prodotti principali della reazione, acetone ed aldeide. L'acetato mercurico ha in questo caso reagito alla temperatura ordinaria da ossidante, secondo il seguente ciclo di reazioni:

$$\text{I. } 2\,Hg\,(C_2H_3O_2)^2 + H_2O = 2\,Hg\,C_2H_3O_2 + 2\,C_2H_4O_2 + O.$$
$$\text{II. } (CH_3)^2{:}C{:}CH{\cdot}CH_3 + 2\,O = (CH_3)^2{:}C{:}O + O{:}CH{\cdot}CH_3\,.$$

Il meccanismo della reazione è complicato, perchè in prima fase dell'azione deve formarsi un composto labile acetomercurico dell'amilene, che poi coll'acqua si scinde dando acetato mercuroso, acido acetico, aldeide, acetone e resine.

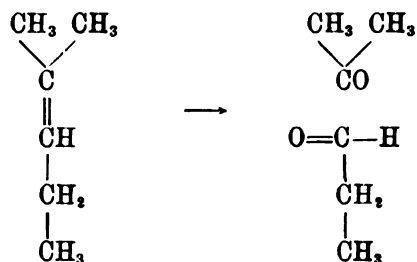
[1] Liebig's. Ann. 145, pag. 69.
[2] Berliner Berich., t. 14, 1881, 1532 e t. 17, 1884, 13.
[3] Bull. Soc. chim. Paris, III serie, t. 19, 494.
[4] Berl. Ber., t. 33, 1900, pag. 1340-1353.

L'azione catalitica dei composti mercurici nell'idrolisi degli idrocarburi acetilenici venne osservata fin dal 1881 da M. Kutscheroff [1] il quale riuscì ad addizionare una molecola di acqua a questi idrocarburi, ottenendo aldeidi e chetoni. Così dall'acetilene ottenne l'aldeide ordinaria; dall'allilene l'acetone; e dal valerilene il chetone corrispondente bollente a 100°-102°:

$$\begin{array}{l} CH \\ ||| \\ CH \end{array} \; H_2O \longrightarrow \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ C{\lt}^{O}_{H} \end{array} \; ; \quad \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ C \\ ||| \\ CH \end{array} \; H_2O \longrightarrow \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ C \\ ||| \\ CH \end{array} \; H_2O \longrightarrow \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

La reazione che mi si presenta non si può però paragonare all'idrolisi del Kutscheroff nella quale il sale mercurico fa da catalizzatore, perchè nel mio caso l'acetato mercurico, riducendosi ad un grado inferiore di ossidazione (*mercuroso*). decompone l'acqua e fornisce l'ossigeno necessario. Ho perciò nella soluzione acquosa satura di acetato mercurico un nuovo ossidante blando, alla temperatura ordinaria, che può riuscire utile nello studio dei composti organici complessi. L'esperienza ha dimostrato che la reazione è generale: tutti i composti contenenti legami olefinici reagiscono colla soluzione acquosa satura di acetato mercurico, ma, come si vedrà in seguito, in modo differente; in alcuni casi dando prodotti contenenti mercurio, in altri dando solo prodotti di ossidazione, riducendosi l'acetato mercurico a mercuroso insolubile ed anche a mercurio libero. Le olefine danno appunto quest'ultima reazione, e la riduzione ad acetato mercuroso insolubile nell'acqua e di aspetto caratteristico, serve a svelare in un miscuglio complesso la presenza di questi idrocarburi. L'esperienza ha inoltre dimostrato che gli idrocarburi aromatici ed i ciclo-idrocarburi « $C_n H_{2n}$ » non reagiscono per niente colla soluzione di acetato mercurico, forse perchè non si forma in prima fase il composto mercurico labile di addizione: quindi si ha nella soluzione acquosa di questo sale il reagente delle olefine, reagente sensibile, data l'insolubililà nell'acqua dell'acetato mercuroso. Una soluzione benzolica contenente $^1/_{1000}$ di amilene agitata con soluzione acquosa di acetato mercurico dà, dopo 10-12 ore, deposito di lamelle caratteristiche di acetato mercuroso ed il liquido si colora debolmente in giallo; una soluzione benzolica contenente $^1/_{1000}$ di caprilene, dà, dopo 24 ore le pagliette di acetato mercuroso; in questo caso il liquido rimane scolorito. Si saggiarono con detto reattivo molti eteri di petrolio (frazioni sotto 100°) provenienti da petroli russi, italiani ed americani con risultato negativo; da un petrolio americano. che gentilmente mi venne dato dalla società Italo-americana con sede in Venezia, nelle porzioni distillanti sotto 100°, agitate con soluzione satura di acetato mercurico, ottenni il deposito di acetato mercuroso, e tra i prodotti di ossidazione, il Dr. Paolini

[1] Berl, Berich., t. 14, 1881, 1532.

ed io potemmo costatare la presenza dell'acetone e della aldeide propionica, e così dimostrare l'esistenza dell'essilene:

$$\begin{array}{c} CH_3 \quad CH_3 \\ \diagdown \diagup \\ C \\ \| \\ CH \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} CH_3 \quad CH_3 \\ \diagdown \diagup \\ CO \\ \\ O{=}C{-}H \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

Con questa esperienza rimane definitivamente provato che *anche le olefine* $C_n H_{2n}$ *si trovano nei petroli naturali.*

Il saggio è molto pratico: si prendono 10-12 cm.³ di soluzione satura a freddo di acetato mercurico e si agitano per 3-4 minuti con 3-4cm.³ dell'etere di petrolio, indi si abbandona il tubo tappato alla temperatura ordinaria; se dopo 24-36 ore la soluzione acquosa è intorbidata da piccole laminette di acetato mercuroso, si dovrà concludere la presenza di olefine.

Le porzioni volatili del petrolio di Valleja, nelle quali venne dimostrata la presenza di cicloesano e di metil- e dimetilciclopentano dai prodotti di ossidazione nitrica, sottoposte al saggio coll'acetato mercurico, dopo 4 settimane non dettero la minima traccia di acetato mercuroso il che dimostra che i *nafteni* non reagiscono affatto colla soluzione di questo sale; anzi ho potuto depurare col Dr. Angeloni l'1-3-dimetilcicloesano, che forma il prodotto principale della riduzione con acido jodidrico dell'acido canforico, dagli altri idrocarburi non saturi $C_8 H_{14}$ servendomi della soluzione di acetato mercurico che lasciava intatto il primo idrocarburo $C_8 H_{16}$ (¹).

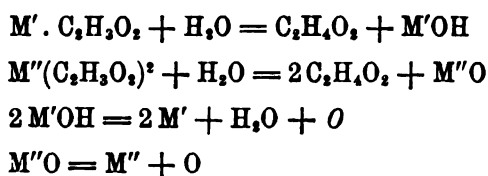
Così rimane risolto il primo problema che mi ero proposto nell'incominciare queste ricerche nel 1899. Dei risultati fino allora ottenuti davo sommariamente un cenno con una nota compilata col Dr. Paolini ed inserita nella Chemiker Zeitung del 1901, pag. 932.

Le ulteriori ricerche estese a terpeni ed a composti aromatici con catene laterali olefiniche, mi dimostrarono che questi prodotti reagiscono anche colla soluzione di acetato mercurico, ed in alcuni casi appunto con riduzione ad acetato mercuroso ed a mercurio metallico; epperciò potrebbero confondersi le olefine con questi idrocarburi meno idrogenati. Però nella pratica dell'esame degli eteri di petrolio e delle benzine contenenti idrocarburi a punto di ebollizione inferiore a 100° non trovandosi presenti terpeni, che hanno tutti punti di ebollizione superiori a 150° e che finora non vennero segnalati nei petroli, il saggio è sempre attendibile, ed inoltre si può sempre controllare colle reazioni delle aldeidi o chetoni dei prodotti di ossidazione.

Le proprietà ossidanti dell'acetato mercurico e di altri acetati metallici facil-

(¹) Gaz. chim. it., t. 35, pag. 144.

mente idrolizzabili erano già state usufruite fin dal 1892 da J. Tafel [1], ma in condizioni differenti dalle mie, condizioni che fanno variare completamente il meccanismo della reazione. Tafel adoperava miscele di acetato mercurico o di acetato argentico con acqua, che, riscaldate in tubo chiuso a temperatura elevata (150°-180°), davano dapprima l'ossido, il quale successivamente per azione del calore si decomponeva in ossigeno e metallo secondo il seguente ciclo di reazioni:

$$M'.C_2H_3O_2 + H_2O = C_2H_4O_2 + M'OH$$
$$M''(C_2H_3O_2)^2 + H_2O = 2C_2H_4O_2 + M''O$$
$$2M'OH = 2M' + H_2O + O$$
$$M''O = M'' + O$$

E così potè ottenere la riduzione della piperidina in piridina; della coniina a conirina, della tetraidrochinolina a chinolina.

Invece la soluzione acquosa di acetato mercurico esplica le sue proprietà ossidanti solo quando si trova a contatto di composti organici con legami etilenici; segno, come ho già detto, che tra questi corpi a lacune ed il sale si debbono formare dei composti labili che l'acqua idrolizza formando acetato mercuroso, acido acetico, ed isolando ossigeno od ossidrile.

Questo nuovo processo di ossidazione è specialmente caratterizzato *dal fatto importante, che si compie lentamente alla temperatura ordinaria*, e quindi può dare un aiuto prezioso nelle ricerche delicate di *abbau* delle molecole organiche complesse a legame etilenico, senza che presumibilmente avvengano trasposizioni molecolari.

Stabilito coll'esperienza che il benzolo, composto a lacune, non reagisce colla soluzione acquosa di acetato mercurico, veniva naturale di sperimentare quale azione esercitasse la detta soluzione sui derivati benzolici a catene laterali olefiniche, ed ottenni come risultato più importante un modo semplice e netto di differenziare la struttura del radicale — C_3H_5 nelle due forme isomere, la *propenilica* — $CH = CH — CH_3$ e *l'allilica* — $CH_2 — CH = CH_2$, problema alla soluzione del quale i chimici annettevano una certa importanza perchè questo radicale è molto diffuso nei composti organici naturali.

La differenziazione dei due stati isomerici si può fare con metodi chimico-fisici. Basandosi sull'idea di Gladstone (1884) che « l'atomo di carbonio ha la più elevata rifrazione atomica in quei composti in cui esso è unito per le sue 4 valenze con atomi di carbonio aventi già una rifrazione atomica più elevata della normale, cioè con atomi di carbonio a legame etilenico », il Nasini [2] provò che l'unione di una catena non satura al nucleo benzolico fa aumentare notevolmente la rifrazione e la dispersione quando tale unione avviene per l'atomo di carbonio non saturo; quando invece

[1] Berl. Berich., t. 25, 1892, 1619.
[2] Rend. Acc. Lincei, serie IV, vol. I e Gazz. chim. ital., t. 21, pag. 228.

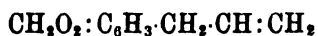
il gruppo laterale si salda al fenile per un atomo di carbonio saturo, non si nota aumento alcuno. In altre parole i derivati *propenilici* hanno un indice di rifrazione più elevato dei corrispondenti isomeri *allilici*.

Uno studio, ricco di materiale sperimentale, di T. F. Eykman [1] confermò la regola estendendola anche ad altre costanti, quali il peso specifico, il punto di fusione, che seguono lo stesso senso delle variazioni dell'indice di rifrazione, essendo più elevati nei corrispondenti composti *propenilici*. Se la determinazione di queste costanti ci permette di decidere, quando si conoscono tutti e due i derivati isomerici, quale appartenga alla serie allilica, quale alla propenilica, manca completamente la base quando si conosca uno solo degli isomeri, non potendosi fare la comparazione; perciò i chimici studiarono il problema dal lato puramente chimico e tentarono delle reazioni per differenziare nettamente i due aggruppamenti.

Tra le reazioni cromatiche tentate per risolvere il problema debbo citare quelle di A. C. Chapman [2] che ottiene colle soluzioni in anidride acetica di fenoli aromatici a catena laterale allilica o propenilica, diverse colorazioni aggiungendo traccie di disidratanti come cloruro di zinco od acido solforico, ma queste reazioni empiriche non permettono una distinzione.

Angeli [3] ritenne per qualche tempo che l'anidride nitrosa potesse essere il reagente adatto, perchè credette dapprima che i composti *allilici* non reagissero con l'anidride nitrosa, mentre i *propenilici* facilmente l'addizionassero per dare prodotti del tipo $R{\cdot}C_3H_5{\cdot}N_2O_3$ che corrispondono ai *nitrositi* di Wallach od alle loro anidridi $R{\cdot}C_3H_3N_2O_2$.

Un anno dopo però egli trova che il safrolo [4];

$$CH_2O_2:C_6H_3{\cdot}CH_2{\cdot}CH:CH_2$$

derivato *allilico* dà parimenti un prodotto di addizione coll'anidride nitrosa, prodotto che si trasforma facilmente in un isomero e lo studio dettagliato della reazione, fatto col Rimini [5] glie ne svelò l'intero meccanismo differenziandolo dai nitrositi dei derivati propenilici, ed il Rimini [6] nel 1904 estese la reazione dell'anidride nitrosa ad altri composti allilici (metilcavicolo, metileugenolo, apiolo, miristicina).

Il problema della differenziazione chimica del radicale — C_3H_5 era perciò rimasto insoluto e fu solo colle esperienze che io ho istituite sin dal 1902 [7] che venne risolto.

L'esperienza ha dimostato che *la soluzione acquosa satura di acetato mercurico reagisce come ossidante*, *riducendosi ad acetato mercuroso od a mercurio*, ***sui com-***

[1] Berl. Berich., t. 22, 1899, 2736 e t. 23, 1890, 855.
[2] The Analyst, 25, 313, Chen. Centr., 1901, 1, pag. 205.
[3] Gazz. chim. ital., t. 22, 1892, pag. 325.
[4] Gazz. chim. ital., t. 23, 1893, pag. 127.
[5] Gazz. chim. ital., t. 25, 1895, pag. 188.
[6] Gazz. chim. ital., t. 34, 1904, pag. 281.
[7] Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. 9, 1902, pag. 65.

posti a-C_3H_5 *propenilico addizionando due anioni* — OH *alla molecola del composto a legame etilenico oppure dando il prodotto di disidratazione* — C_3H_5O *che, come si vedrà in seguito, è un'aldeide; invece reagisce dando un composto mercurico di addizione col* — C_3H_5 *allilico.* Infatti:

Dall'anetolo $CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3$ si ottiene il glicole $CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3$.

Dall'isosafrolo $CH_2O_2{:}C_6H_3{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3$ si ottiene il glicole $CH_2O_2{:}C_6H_3{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3$ o l'anidride $CH_2O_2{\cdot}C_6H_3{\cdot}C_3H_5O$.

Dal metilisoeugenolo $(CH_3O)^2{:}C_6H_3{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3$ si ottiene il glicole $(CH^3O)^2{:}C_6H_3{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3$ o l'anidride $(CH_3O)^2{\cdot}C_6H_3{\cdot}C_3H_5O$.

Dall'isoapiolo $\begin{matrix}CH_2O_2\\(CH_3O)_2\end{matrix}\rangle C_6H{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3$ si ottiene il glicole $\begin{matrix}CH_2O_2\\(CH_3O)_2\end{matrix}\rangle C_6H{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3$.

Dall'asarone $(CH_3O)_3{:}C_6H_2{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3$ si ottiene l'anidride $(CH_3O)_3{:}C_6H_2{\cdot}C_3H_5O$.

Dall'isomiristicina [1] $\begin{matrix}CH_2O_2\\CH_3O\end{matrix}\rangle C_6H_2{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3$ si ottiene il glicole $\begin{matrix}CH_2O_2\\CH_3O\end{matrix}\rangle C_6H_2{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3$.

Al contrario i seguenti composti *allilici* dànno i derivati di addizione acetomercurici:

Il metilcavicolo $CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH_2{\cdot}CH{:}CH_2$ dà il composto mercurico $CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}C_3H_5\langle\begin{matrix}HgC_2H_3O_2\\OH\end{matrix}$.

Il safrolo $CH_2O_2{:}C_6H_3{\cdot}CH_2{\cdot}CH{:}CH_2$ dà il composto mercurico $CH_2O_2{:}C_6H_3{\cdot}C_3H_5\langle\begin{matrix}HgC_2H_3O_2\\OH\end{matrix}$.

Il metileugenolo $(CH_3O)^2{:}C_6H_3{\cdot}CH_2{\cdot}CH{:}CH_2$ dà il composto mercurico $(CH_3O)^2{:}C_6H_3{\cdot}C_3H_5\langle\begin{matrix}HgC_2H_3O_2\\OH\end{matrix}$.

L'apiolo $\begin{matrix}CH_2O_2\\(CH_3O)^2\end{matrix}\rangle C_6H{\cdot}CH_2{\cdot}CH{:}CH_2$ dà il composto mercurico $\begin{matrix}CH_2O_2\\(CH_3O)^2\end{matrix}\rangle C_6H{\cdot}C_3H_5\langle\begin{matrix}HgC_2H_3O_2\\OH\end{matrix}$.

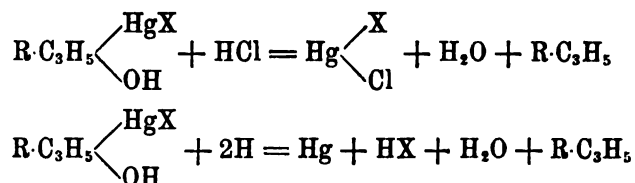
La miristicina [1] $\begin{matrix}CH_2O_2\\CH_3O\end{matrix}\rangle C_6H_2{\cdot}CH_2{\cdot}CH{:}CH_2$ dà il comp. mercurico $\begin{matrix}CH_2O_2\\CH_3O\end{matrix}\rangle C_6H_2{\cdot}C_3H_5\langle\begin{matrix}HgC_2H_3O_2\\OH\end{matrix}$.

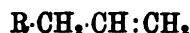
I composti acetomercurici si convertirono in cloro-composti col cloruro di sodio, e nella maggior parte dei casi si poterono separare due composti clorurati isomeri, provenienti da due isomeri aceto-mercurici che contemporaneamente si formano e che

[1] Rimini Gazz. Chim. T. 34, 1904, 295.

nel caso del safrolo e della miristicina vennero isolati. I composti aceto o cloromercurici, quando vengono decomposti con acidi od idrogenati con amalgama di sodio o con zinco ed idrato alcalino, rigenerano il prodotto primitivo con eliminazione di acqua. Ha luogo la reazione generale:

$$R{\cdot}C_3H_5{<}^{HgX}_{OH} + HCl = Hg{<}^{X}_{Cl} + H_2O + R{\cdot}C_3H_5$$

$$R{\cdot}C_3H_5{<}^{HgX}_{OH} + 2H = Hg + HX + H_2O + R{\cdot}C_3H_5$$

e quindi tali composti si prestano all'isolamento [1] ed alla eventuale depurazione delle sostanze del tipo:

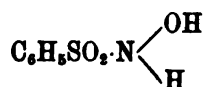
$$R{\cdot}CH_2{\cdot}CH{:}CH_2$$

La reazione in molti casi si presta, per la sua rapidità, ad esperienza di lezione, operando nel modo seguente:

A cm.^{3} 5 di soluzione acquosa satura di acetato mercurico (1 : 4) si sovrappone uno straterello di 1 a 2 mm. di benzolo, libero di tiofene, contenente in soluzione due o tre goccie di anetolo, metilisoeugenolo, isosafrolo; si agita vivamente indi si tappa il tubo da saggio e si abbandona alla temperatura ordinaria. Dopo un tempo variabile da 15 a 45 minuti si vedono comparire le laminette brillanti caratteristiche dell'acetato mercuroso; mentre se il benzolo col quale si è agitata la soluzione di acetato mercurico contiene disciolto il metilcavicolo, metileugenolo od il safrolo, composti contenenti l'*allile*, i due strati si separano limpidi e tali si mantengono per più giorni. La reazione qualitativa non può farsi coll'apiolo, perchè esso dà immediatamente il composto mercurico di addizione, il quale, essendo insolubile nell'acqua, precipita, quantunque un occhio un po' esercitato differenzi subito questo precipitato da quello delle laminette caratteristiche dell'acetato mercuroso.

L'ossidazione del — C_3H_5 *propenilico*, avviene nella maggior parte dei casi con formazione del glicole; così l'anetolo, l'isoapiolo, metilisoeugenolo, isosafrolo e l'isomiristicina dettero un glicole, che nel caso speciale del metilisoeugenolo si potè anche isolare nelle due forme stereoisomere già ottenute da Kolokoloff [2] nell'ossidazione permanganica di esso. Inoltre si constatò che il metilisoeugenolo stesso dà parimenti una piccola quantità dell'anidride, e nel caso dell'asarone si potè isolare soltanto l'anidride. Si sperimentò in seguito che l'eliminazione dell'acqua dai glicoli ottenuti nell'ossidazione avviene facilmente per riscaldamento di essi con piccole quantità di disidratanti (cloruro di zinco) e le anidridi che così si formano debbono contenere un carbonilo di *funzione aldeidica*, perchè, oltre alla reazione dell'idros-

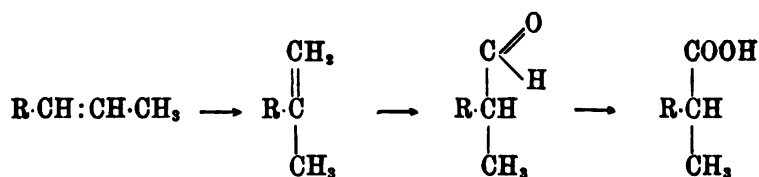
[1] Schimmel, Bull. sem., Mai 1903. pag. 87.
[2] Chemisch. Centr., 1897, 1, 915.

silamina e della semicarbazide, caratterizzanti il :CO, danno coll' idrossilamina-benzolsolfinica

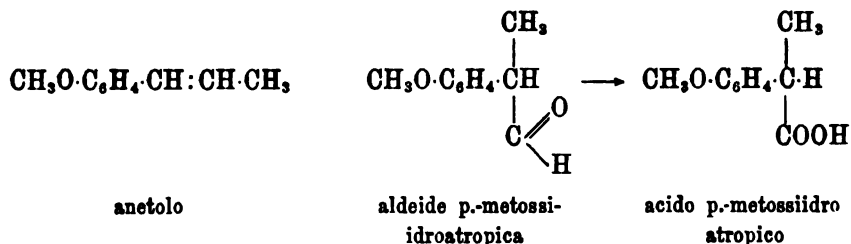
$$C_6H_5SO_2{\cdot}N\langle^{OH}_{H}$$

di Piloty gli acidi idrossammici corrispondenti svelabili *colla nota reazione violetta col percloruro di ferro* e coi sali di rame. Ora questa reazione scoperta dall'Angeli ed applicata da Rimini (¹) usufruendo appunto dell'acido di Piloty, è caratteristica e distintiva delle aldeidi e dei chetoni, essendo solo le aldeidi suscettibili di dare acidi idrossammici. Il nitrossile, che per azione degli alcali si isola dall'acido di Pitoty, reagisce col gruppo aldeidico e dà l'acido idrossammico. Questa reazione verrà meglio sviluppata nella Nota: *Azione dell'acetato mercurico sull'asarone*, fatta col Dr. Cirelli.

Si potè anche dimostrare la costituzione di queste nuove aldeidi per esclusione.

Bougault (²), ossidando l'anetolo e composti analoghi contenenti *propenile* con ossido giallo di mercurio e iodio, ottenne composti aldeidici nei quali, gli acidi che si formano per ulteriore ossidazione, gli dimostrarono che era avvenuta una trasposizione del radicale aromatico collegato al propenile: trasposizione indicata dai seguenti schemi:

$$R{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3 \longrightarrow R{\cdot}\underset{CH_3}{\overset{CH_2}{\overset{\|}{C}}} \longrightarrow R{\cdot}\underset{CH_3}{\overset{C\langle^{O}_{H}}{CH}} \longrightarrow R{\cdot}\underset{CH_3}{\overset{COOH}{CH}}$$

L'anetolo, ad esempio, gli dette l'aldeide *p.*-metossiidroatropica che per ossidazione ulteriore con ossido di argento in presenza di alcali, dette l' acido *p.*-metossiidroatropico:

$$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3 \qquad CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}\underset{C\langle^{O}_{H}}{\overset{CH_3}{CH}} \longrightarrow CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}\underset{COOH}{\overset{CH_3}{C{\cdot}H}}$$

anetolo — aldeide p.-metossi-idroatropica — acido p.-metossiidro atropico

Orbene, il glicole proveniente dall'ossidazione dell'anetolo con acetato mercurico, quando viene riscaldato al di sopra del suo punto di fusione con una piccola quantità

(¹) Gazz. Chim., t. 31, pag. 84.
(²) Ann. de chimic. et Phy., 1902, p. 483.

di cloruro di zinco, dà un'aldeide che si differenzia nettamente da quella ottenuta da Bougault.

I caratteri differenziali dei due composti sono riassunti nel seguente specchietto:

	Semicarbazone	Ossidazione con Ag_2O ed idrato alcalino
Aldeide del Glicole	Cristallizza dall'alcool in belle laminette, trasparenti, sovrapposte e splendenti. Fonde a 174°.	Si resinifica quasi completamente dando piccole quantità di acido anisico.
Aldeide di Bougault	Cristallizza dall'alcool in piccoli aghi bianchi, opachi, aggruppati a penna. Fonde a 134°.	Dà l'acido p.metossiidroatropico p.f. 57°.

Differenze consimili si possono vedere in seguito nelle aldeidi preparate dal Bougault con l'ossidazione dell'isosafrolo e del metilisoeugenolo, confrontandole colle aldeidi derivanti dalla disidratazione dei glicoli ottenuti dall'isosafrolo e dal metilisoeugenolo.

Ora sono prevedibili solo due forme di isomeria chimica dell'aldeide:

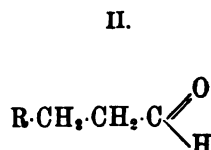
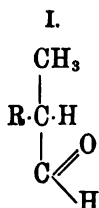
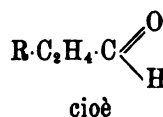
$$R\cdot C_2H_4\cdot C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{matrix}$$

cioè

I.

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ R\cdot C\cdot H \\ | \\ C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{matrix} \end{matrix}$$

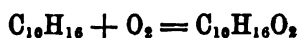
II.

$$R\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{matrix}$$

Non potendosi prendere in considerazione le isomerie geometriche della formola I, che avrebbero solo un'azione sulla deviazione del piano della luce polarizzata e dimostrato che alle aldeidi di Bougault spetta lo schema I, per esclusione rimane alle aldeidi derivanti dai glicoli lo schema II.

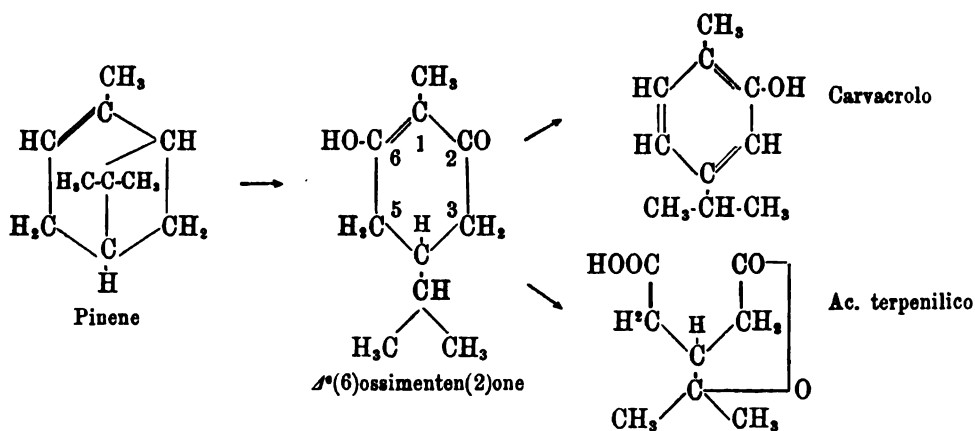
Una terza serie di esperienze vennero fatte sui terpeni.

Dimostrata l'inattività del nucleo aromatico e dei cicloidrocarburi saturi: C_nH_{2n}, *nafteni*, veniva naturale l'esame dei composti a nucleo parzialmente idrogenato intermedî fra il benzolo ed il cicloesano, ed a ciò servono i *terpeni*. Per ora le mie esperienze si limitano al *pinene* ed al *canfene*: scelsi questi due terpeni perchè in essi si trova l'aggruppamento *propenilico* ed *allilico*, come si vedrà in seguito.

La soluzione acquosa di acetato mercurico esplica la sua azione ossidante sul pinene, e come prodotto principale della reazione si ha un *diossipinene* $C_{10}H_{16}O_2$, quindi la reazione principale avviene secondo l'equazione:

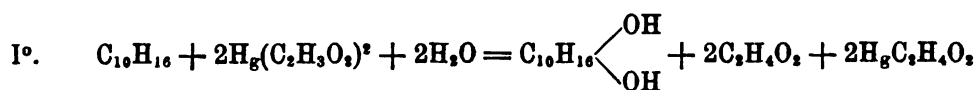
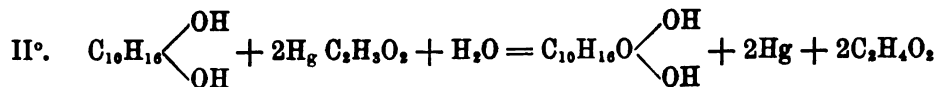
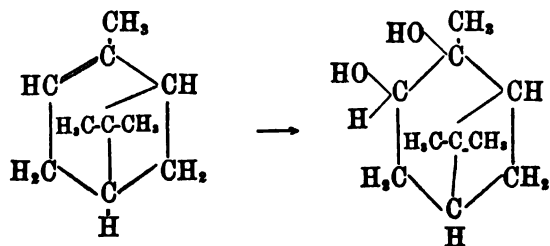
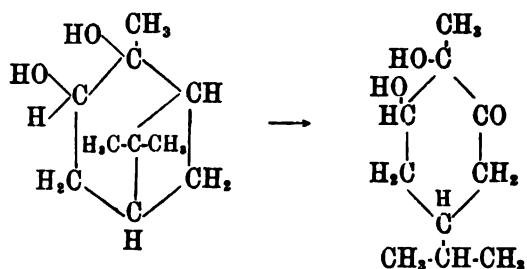
$$C_{10}H_{16} + O_2 = C_{10}H_{16}O_2$$

Ho potuto dimostrare che i due atomi di ossigeno del nuovo composto sono contenuti sotto funzioni diverse; uno sotto forma di *ossidrile*, perchè dà coll'isocianato di fenile il composto di addizione che cristallizza in prismi aciculari fus. a 125°; l'altro sotto forma chetonica perchè dà un'ossima cristallizzata fusibile a 138°,5 ed un semicarbazone fus. a 175-176°; il carbonilo è chetonico, non aldeidico perchè non dà la reazione *Angeli-Rimini*. Nei prodotti di ossidazione permanganica di questo composto si ha acido terpenilico. Nella facile trasformazione in carvacrolo e nell'esistenza in esso composto di un legame etilenico, perchè assorbe 2 atomi di bromo, si trova la base sperimentale per stabilire che il prodotto di ossidazione del pinene è il Δ^{6}(6)- ossimenten(2)one.

I seguenti schemi rappresentano le relazioni soprascritte:

Pinene → Δ^{6}(6)ossimenten(2)one → Carvacrolo ; Ac. terpenilico

Il meccanismo dell'ossidazione si può rappresentare colle seguenti equazioni:

$$\text{I°.}\quad C_{10}H_{16} + 2Hg(C_2H_3O_2)^2 + 2H_2O = C_{10}H_{16}\begin{matrix}OH\\OH\end{matrix} + 2C_2H_4O_2 + 2HgC_2H_4O_2$$

e schematicamente:

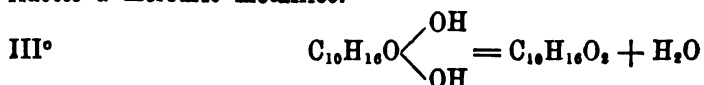
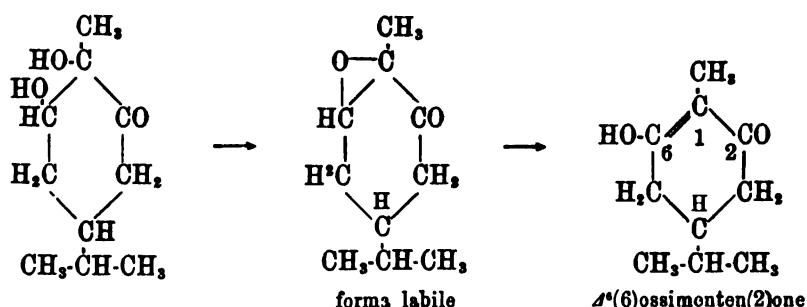
$$\text{II°.}\quad C_{10}H_{16}\begin{matrix}OH\\OH\end{matrix} + 2Hg\,C_2H_3O_2 + H_2O = C_{10}H_{16}O\begin{matrix}OH\\OH\end{matrix} + 2Hg + 2C_2H_4O_2$$

e schematicamente

ed infatti l'acetato mercuroso, anche si trovi un eccesso di acetato mercurico, viene ridotto a mercurio metallico.

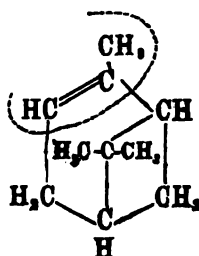
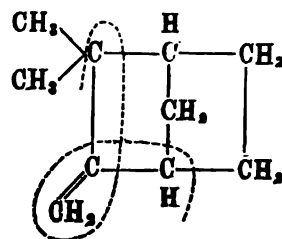
III°

$$C_{10}H_{16}O\langle{}^{OH}_{OH} = C_{10}H_{16}O_2 + H_2O$$

e schematicamente

forma labile

$\Delta^1(6)$ossimonten(2)one

Il canfene, sottoposto all'azione della soluzione acquosa di acetato mercurico, non dà luogo all'azione ossidante: si forma invece un composto di addizione mercurico di composizione complicata $C_{10}H_{16}O\,(HgC_2H_3O_2)^2$, che venne comprovata convertendo questo aceto-composto nel cloro composto corrispondente, $C_{10}H_{16}O\,(HgCl)^2$. Tutti e due questi composti idrogenati ridanno il canfene.

L'utilità pratica di questa reazione è stata dimostrata dalla casa Schimmel ([1]), che se ne servì per isolare il canfene nell'essenza di citronella del Ceylan, dove la conversione del Bertran in isoborneolo lasciava supporre, ma non dimostrare, la presenza di questo terpene.

Se noi confrontiamo i due schemi proposti dal Wagner per rappresentare la costituzione di questi due terpeni:

Pinene

Canfene

([1]) Schimmel, Bull. sem., Mai 1903, pag. 87.

noi troviamo nel pinene l'aggruppamento *propenile* — CH = CH — CH_3 mentre nel canfene si trova l'aggruppamento *allilico* — CH_2 — CH = CH_2 e quindi la reazione da me scoperta potrebbe servire come mezzo diagnostico per stabilire la costituzione dei terpeni, ed infatti Moycho e Zienkowski (1) nel loro recente studio sul canfene la prendono in considerazione.

Alcuni capitoli della parte sperimentale di questa Memoria vennero eseguiti da giovani laureati in chimica e farmacia che frequentarono l'Istituto negli anni 1902-1905, ai quali ho assegnato come tema della tesi di laurea i diversi capitoli di questa ricerca e nelle loro esperienze vennero sempre diretti e controllati dal Dr. Paolini e da me.

A tutti i miei collaboratori rendo vivo grazie.

PARTE SPERIMENTALE

I.

Sull'analisi degli eteri di petrolio.

(L. Balbiano e V. Paolini).

Gli studî fatti in questi ultimi anni da Zelinski (2), Kyener (3) Markownikoff (4) ed O. Aschan (5), hanno dimostrato che i cicloidrocarburi saturi, quando vengono ossidati con acido nitrico, danno un dicarboacido normale contenente per lo più lo stesso numero di atomi di carbonio del cicloidrocarburo. La separazione dei dicarboacidi riesce poi agevole in seguito alle accurate ricerche di Auwers (6), dalle quali si sa che gli acidi succinici possono separarsi dai glutarici per distillazione in corrente di vapore sovrariscaldato dove i primi sono di gran lunga più facilmente volatili dei secondi e gli adipici son fissi. Inoltre la facilità con la quale i glutarici danno anidridi, mentre gli adipici resistono agli agenti disidratanti, oppure alle doppie decomposizioni con anidride acetica, serve poi a fissare definitivamente ed a separare un acido appartenente alla serie glutarica da quello della serie adipica. Però nella conversione degli acidi in anidridi deve evitarsi l'uso del cloruro d'acetile, suggerito dall'Auwers, perchè esso può dare la doppia decomposizione anche cogli acidi adipici e formare la semicloroanidride o la cloroanidride che, successivamente poi coll'anilina, danno l'anilo-acido e l'anilide. Questa osservazione era già stata fatta da F. Blanc (7)

(1) Liebig-s, Ann., t. 340, 1905, pag. 19.
(2) Berl. ber., t. 30, 1897, pag. 387.
(3) Journ. f. prak. ch., t. 56, 1897, 368.
(4) Lieb. s. Ann., t. 307, 1899. 335.
(5) Berl. ber.,, t. 32, 1899, 1769.
(6) Lieb. s. Ann., t. 292, 1896, 132
(7) Bull. soc. chim. de Paris, 3me série. 23, 1900, 280.

sull'acido $\alpha\alpha$-dimetiladipico e noi l'avevamo sperimentata prima, ma non pubblicata, sull'acido adipico ottenuto nell'ossidazione di alcuni eteri di petroli italiani. Dagli acidi che si producono nella ossidazione nitrica si deducono gli idrocarburi a ciclo esistenti negli eteri di petrolio; così nelle porzioni di eteri distillanti fra 57° e 102° di un petrolio italiano dell'Emilia (Valleia presso Piacenza) si potè isolare coll'ossidazione nitrica, acido succinico, adipico e *p.*-nitro-benzoico e dedurre la presenza del metil e dimetil-ciclopentano e del cicloesano in questi eteri [1].

Se a questo modo si riesce a stabilire la presenza degli idrocarburi a ciclo C_nH_{2n} negli eteri di petrolio, non abbiamo sinora un metodo sicuro e facile di constatare nei medesimi la presenza delle olefine, e come venne detto nell'introduzione, si sperimentò l'azione della soluzione acquosa satura a freddo dell'acetato mercurico sul trimetiletilene, amilene commerciale.

Una prima esperienza si fece nelle seguenti condizioni: gr. 62,6 di acetato mercurico (una mol.) si sciolsero in cc. 250 di acqua fredda, ed alla soluzione limpida si aggiunse di un colpo cc. 20,5 di amilene (una mol.), e si agitò vivamente, con che l'amilene si disciolse. Si rese il liquido leggermente alcalino con idrato sodico, indi si aggiunse la quantità stechiometrica di bromuro di potassio (una mol.) sciolto in acqua. Si ebbe subito un precipitato bianco vischioso che col tempo indurisce, ma ingiallendo e decomponendosi, per cui non si potè analizzare. Si ottenne gr. 45 circa di questo composto bromurato, in via di decomposizione, che si sospese in acqua acidulata con acido solforico e si distillò. Coll'acqua passa l'amilene che, disseccato con cloruro di calcio, distilla fra 36-38° ed ascende in tutto a cc. 12. Nè migliori risultati si ottennero adoperando cloruro e ioduro di potassio; sempre si precipitò una sostanza vischiosa facilmente decomponibile.

In modo del tutto differente va la reazione quando si lascia agire alla temperatura ordinaria l'acetato mercurico coll'amilene.

Si sciolsero gr. 318 di acetato mercurico in cc. 1272 di acqua e la soluzione si agitò con cc. 104 di amilene. Anche in questo caso le due sostanze si misero a reagire nei rapporti dei loro pesi molecolari. Dopo poche ore cominciò a depositarsi una sostanza cristallizzata in belle laminette splendenti, bianche, di cui la quantità andava gradatamente aumentando. Dopo 2 giorni di contatto alla temperatura ordinaria, se ne raccolse una porzione per analizzarla. Lavata bene con acqua ed asciugata fra carta dette all'analisi il seguente risultato:

I. Gr. 0,6094 di sostanza seccata nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0.5459 HgS.
II. Gr. 0,5592 » » » » » » gr. 0,502 HgS.

Per cento parti:

	Trovato I.	Trovato II.	Calcolato per $HgC_2H_3O_2$
Hg	77,29	77,38	77,21

La sostanza è adunque acetato mercuroso.

[1] Gazz. ch. ital., t. 32, 1902, 437; t. 33, 1903, 42.

La reazione procede lentamente ed è completa dopo circa 15 giorni, ma sorpassa la riduzione dell'acetato mercurico a mercuroso perchè arriva fino a mercurio, indicato dall'imbrunimento del deposito; inoltre la soluzione sovrastante assume una colorazione giallo-rosso e reazione fortemente acida per l'acido acetico formatosi.

Si distillò il liquido filtrato, e nel distillato non si potè riscontrare traccie di amilene, segno che aveva reagito completamente.

Sul distillato galleggia una piccola quantità, circa 1 cc., di un olio giallognolo di odore aggradevole che distilla fra 120-140° e che trattato col cloridrato di semicarbazide ed acetato sodico dà una sostanza butirrosa dalla quale per cristallizzazione dall'alcool si riesce a separare una piccolissima quantità di un semicarbazone cristallizzato fusibile a 159-160°. Giova avvertire però che in una successiva preparazione, fatta con amilene di altra provenienza, non si riuscì più ad ottenere detta sostanza oleosa che in traccie, svelate più che altro dall'odore aromatico.

Il distillato separato dall'olio si neutralizzò esattamente con idrato sodico, e si sottopose ad una nuova distillazione. Nel distillato che rappresenta metà del volume totale si potè verificare la presenza dell'acetone e dell'aldeide ordinaria:

1.° Alla reazione col nitroprussiato sodico;

2.° Alla formazione abbondante del composto col solfato mercurico col reattivo del Denigès;

3.° Alla riduzione della soluzione alcalina del nitrato d'argento ammoniacale;

4.° Alla colorazione dell'acido fucsinsolforoso.

In seguito alle altre ricerche fatte in questo istituto su composti olefinici, venne dimostrato che il processo di ossidazione dell'acetato mercurico può esplicarsi con addizione di 2-OH all'olefina e quindi originare un glicole: perciò iniziammo una nuova esperienza coll'intento principale di riconoscere se fra i prodotti della reazione si trovasse anche il glicole $(CH_3)^2 = COH \cdot CHOH \cdot CH_3$ come verificò trovarsi il Wagner [1] nell'ossidazione permanganica del trimetiletilene.

Partendo da cc. 100 di trimetiletilene convenientemente depurato e che distillava costante a 36-37°, si ottenne acetone, aldeide acetica, traccie dell'olio aromatico su indicato, ed una discreta quantità di sostanze resinose nelle quali non si potè riconoscere la presenza del glicole cercato.

Applicata la reazione alle porzioni volatili 35-120° del petrolio di Valleia si ebbe sempre risultato negativo, ma bastava introdurre alcune goccie di amilene perchè dopo 12-24 ore comparissero le laminette brillanti e caratteristiche dell'acetato mercuroso, e la soluzione petrolica assumesse una debole colorazione gialla. Anche in altri eteri di petrolio americani, russi e della Gorizia la reazione risultò negativa, e quindi l'assenza di idrocarburi olefinici in questi eteri di petrolio. Si provò la sensibilità della reazione colle seguenti esperienze:

1.° 10 cc. di eteri leggieri di petrolio addizionati di cc. 0,01 di amilene agitati per 3 a 5 minuti con 2 cc. di soluzione satura di acetato mercuroso dettero dopo 12 ore deposito di laminette di acetato mercuroso e la soluzione petrolica si colorò leggermente in giallo.

(1) Berl. ber., t. 21, 1888. 1235.

2.° Si provò dapprima il comportamento di un caprilene, proveniente dalla fabbrica di Kahlbaum di Berlino, coll'acetato mercurico e si constatò che reagiva con formazione di acetato mercuroso, però la reazione è lenta, non disciogliendosi questa olefina nella soluzione mercurica, ed il deposito di acetato mercuroso comincia solo dopo 12 a 24 ore. Lasciato reagire per 3 a 4 giorni si riscontrò nella parte acquosa distillata la presenza dell'acetone e di una sostanza di natura aldeidica alla riduzione della soluzione ammoniacale di argento ed alla colorazione dell'acido fucsinsolforoso.

3.° 10 cc. di eteri leggieri di petrolio addizionati di cc. 0,01 di caprilene dettero deposito di acetato mercuroso dopo 15 ore.

Da queste esperienze si deduce che $^1/_{1000}$ di olefina è ancora svelabile negli eteri di petrolio, miscele di idrocarburi saturi e di nafteni.

Le ricerche dei chimici sui petrolî americani hanno constatato che nelle porzioni molto volatili che distillano sotto 100° esistono degli idrocarburi C_nH_{2n}, e le più recenti di Sydney Young [1] tenderebbero a dimostrare che sono ciclo-idrocarduri, cioè nafteni.

Noi sperimentammo sopra un petrolio americano inviatoci gentilmente dalla società italo-americana, con sede in Venezia, la quale ci garantì la genuinità del prodotto senza sapercene indicare con precisione la provenienza ; e la ricerca ha svelato la presenza di olefine nelle porzioni volatili di questo petrolio.

Kgr. 14 di petrolio vennero sottoposti alla distillazione e si raccolsero gr. 420 di eteri distillanti sotto 100°; questi vennero agitati con 100 cc. di soluzione satura di acetato mercurico ed abbandonata la miscela: dopo 24 ore si notava già il deposito di acetato mercuroso ed un debole ingiallimento nella soluzione acquosa. Dopo 15 giorni di contatto si separò l'acetato mercuroso che lavato e disseccato pesava gr. 3,50.

Si comprovò la sua composizione col dosamento del mercurio:

gr. 0,4818 sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,4324 di HgS.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $HgC_2H_3O_2$
Hg	77,35	77,21

Il liquido mercurico limpido venne distillato raccogliendone i $^3/_5$ ed in esso si caratterizzò l'acetone col nitroprussiato ed un composto aldeidico alla riduzione del nitrato d'argento ammoniacale.

Si dimostrò che l'aldeide era la propionica nel modo seguente:

Il distillato venne addizionato di circa 25 cc. di soluzione satura di bisolfito sodico ed agitata la massa col triplo volume di etere per assorbire la maggior parte dell'acido acetico proveniente dall'acetato mercurico.

Lo strato acquoso venne sovrasaturato con liscivia di carbonato sodico, e distillato a metà volume. Il distillato contenente l'acetone e l'aldeide venne ossidato con permanganato potassico in soluzione fortemente acida di acido fosforico, aggiungendo

[1] Chem. Central-blatt 1899, 58.

permanganato fino a che la soluzione rimanesse per qualche tempo colorata; indi si distillò a metà volume. Il distillato di reazione acidissima si saturò esattamente con idrato baritico, e la soluzione venne concentrata, a blando calore, a cristallizzazione. I cristalli depositati vennero esaminati al microscopio dal dott. Zambonini e si rivelarono essere una miscela di formiato baritico coll'aceto-propionato baritico di Fitz [1] e l'identità di quest'ultimo venne comprovata colla misura degli angoli delle faccie. Il dott. Zambonini gentilmente ci comunica:

Sistema monoclino.

Forme osservate:

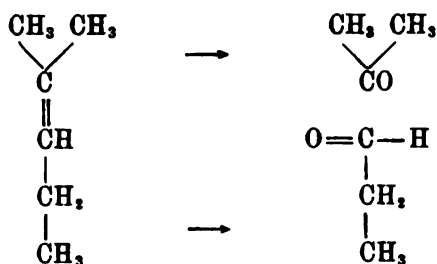
a = [100] ∞ P̄ ∞; *b* = [010] ∞ P̆ ∞; *m* = [110] ∞ P; *d* = [011] P̆∞

I cristalli sono tabulari secondo *b*. Le faccie sono poco splendenti; non permisero che misure approssimative.

	Misurati	Calcolati (P. Friedländer) [2]
a m	44°	44°,4′
b m	46°	45°,56′
m d	66° 1/2′	66°,11′
b d	48°,15′	48°,9′

Su [100] una direzione di massima estinzione fa con l'asse verticale un angolo di circa 20°.

L'aldeide grassa in questione è quindi l'aldeide propionica, e per conseguenza l'olefina che si trova nel petrolio è l'essilene C_6H_{12} rappresentato dallo schema:

```
CH₃ CH₃              CH₃ CH₃
  \ /       ——→        \ /
   C                    CO
   ‖
   CH               O=C—H
   |                   |
   CH₂                CH₂
   |        ——→        |
   CH₃                CH₃
```

perchè all'ossidazione dà acetone ed aldeide propionica.

E così rimane definitivamente provato che nei petrolî americani esistono anche piccole quantità di olefine.

(1) Berl. ber., t. 11, pag. 1897.
(2) Groth's, Ztschr. Krystallogr. 1879, 3, 212.

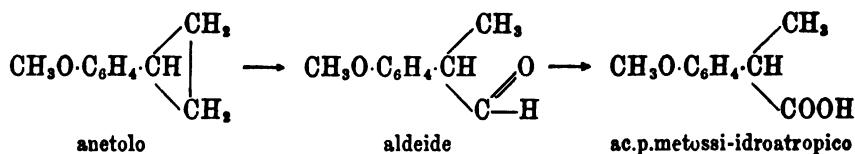
II.

Azione dell'acetato mercurico sull'anetolo.

(L. Balbiano ed A. Nardacci).

Nel 1902, quando s'intrapresero le ricerche che fanno argomento di questa Memoria, era sorta una questione che sollevava un dubbio sulla costituzione della catena C_3H_5 dell'anetolo, che le vecchie esperienze di Erlenmeyer (1) e di Perkin (2) avevano stabilito e dai prodotti di ossidazione, e dall'ottenere anetolo mediante il sovrariscaldamento dell'acido p-ossimetilfenilcrotonico che si aveva per condensazione dell'aldeide anisica con l'anidride propionica. Nel 1900 Bougault (3) ossidando l'anetolo in soluzione alcoolica con ossido giallo di mercurio e jodio ottenne un'aldeide che all'ossidazione gli dette un acido, che egli dimostrò essere p-metossiidroatropico. Emise perciò l'ipotesi che il C_3H_5 dell'anetolo potesse avere una costituzione ciclica, fosse cioè il residuo monovalente del trimetilene.

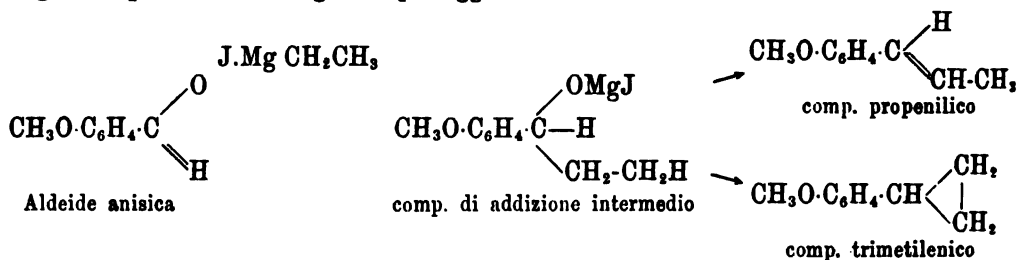
$$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH\begin{cases}CH_2\\ |\\ CH_2\end{cases} \longrightarrow CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH\begin{cases}CH_3\\ C{=}O\\ \;\;\backslash H\end{cases} \longrightarrow CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH\begin{cases}CH_3\\ COOH\end{cases}$$

anetolo — aldeide — ac.p.metossi-idroatropico

In seguito alla sintesi dell'anetolo di Béhal e Tiffeneau (4), applicando la reazione di Grignard e facendo agire sull'aldeide anisica il magnesio jodoetile, il Bougault ritirò la sua ipotesi (5) ma veramente a noi pare che essa non sia un argomento inoppugnabile contro la idea del Bougault, perchè un'interpretazione pure rigorosamente logica si può dare coi seguenti passaggi.

$$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}C\begin{cases}O\\ H\end{cases} \quad J.Mg\,CH_2CH_3 \qquad CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}C\begin{cases}OMgJ\\ H\\ CH_2{-}CH_2H\end{cases}$$

Aldeide anisica — comp. di addizione intermedio

$$\nearrow CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}C\begin{cases}H\\ CH{\cdot}CH_3\end{cases} \quad \text{comp. propenilico}$$

$$\searrow CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH\begin{cases}CH_2\\ |\\ CH_2\end{cases} \quad \text{comp. trimetilenico}$$

Giova però notare che le estese ricerche dell'Angeli (6) sull'azione dell'acido nitroso sopra alcune sostanze organiche e quelle specifiche per l'anetolo fatte da Boe-

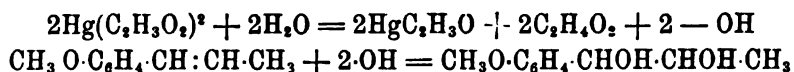
(1) Zeitsch. für Chem. 1866, pag. 430.
(2) Berl. ber., t. 10, 1877, pag. 300.
(3) Bul. Soc. chim. Paris, serie III, 23, pag. 761.
(4) C. R. de l'Acc. des Sciences, T. 132, pag. 561.
(5) Bul. Soc. chim. III, serie, t. 23.
(6) Gaz. chim., t. 22, pag. 325.

ris, fanno propendere la risoluzione [1] della questione nel senso favorevole alla vecchia ipotesi dell'Erlenmeyer. Ma un fatto veramente specifico che la comprovi manca ancora e questo fatto lo apporta lo studio dell'azione dell'acetato mercurico. L'esperienza ha dimostrato che solo gli idrocarburi olefinici riducono l'acetato mercurico a mercuroso, mentre i ciclo-composti aromatici o quelli completamente idrogenati non hanno questa proprietà. Se l'anetolo contiene un anello trimetilenico saldato al nucleo aromatico è molto probabile che non reagirà coll'acetato mercurico; se invece contiene la catena propenilica darà luogo alla reazione. Abbiamo ottenuto riduzione ad acetato mercuroso ed il prodotto di ossidazione dell'anetolo quindi rimane portato un notevole contributo all'antica ipotesi. Si potrebbe forse obbiettare che il trimetilene è labile, perchè addiziona facilmente il bromo, ma d'altra parte le esperienze di G. Gustavson [2] dimostrano che il trimetilene è stabile all'azione del permanganato, ed è quindi da supporre la stessa stabilità in contatto colla soluzione acquosa di acetato mercurico e che senza la presenza di un legame olefinico non si abbia reazione.

L'ossidazione del gruppo propenilico dell'anetolo non ha luogo come nel caso del trimetilene con rottura della catena, ma avviene semplicemente come addizione di 2-OH alla molecola non satura e come prodotto principale si ottiene il glicole.

$$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3$$

e tutto l'andamento della reazione si può rappresentare colle due equazioni seguenti:

$$2Hg(C_2H_3O_2)^2 + 2H_2O = 2HgC_2H_3O + 2C_2H_4O_2 + 2 - OH$$
$$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH{:}CH{\cdot}CH_3 + 2{\cdot}OH = CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3$$

Che il prodotto formatosi sia realmente il glicole ce lo dimostra il diacetilderivato che si è potuto ottenere coll'anidride acetica, e che veramente i due ossidrili si siano collegati al legame olefinico del C_3H_5 lo dimostra il fatto che dal glicole si ottiene coll'ossidazione acido anisico. Manca la prova dell'addizione dell'isocianato di fenile, ma come si vedrà in seguito, questo glicole elimina ad una temperatura di poco superiore al suo punto di fusione una molecola di acqua per trasformarsi in un composto di natura aldeidica, per cui l'acqua eliminata reagisce coll'isocianato di fenile e dà difenilurea. Abbiamo tentato di ottenere lo stesso glicole coll'ossidazione permanganica nelle stesse condizioni che nel laboratorio di G. Wagner [3] si sono ottenuti tali composti dall'isosafrolo e sostanze consimili, ma non si è potuto ottenere che acido anisico ed una piccolissima quantità di sostanza bianca cristallina che però non presenta i caratteri del glicole cercato.

Parte sperimentale.

L'anetolo adoperato proveniva dalla fabbrica Kahlbaum di Berlino e distillava 232°, punto di ebollizione della sostanza.

(1) Gaz. chim., t. 23, pag. 165.
(2) Chem. Centralbl. 1899, I, pag. 3488.
(3) Berl. ber., t. 24, 1891, pag. 2488.

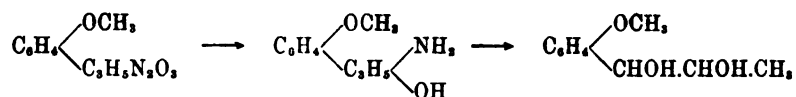
In una prima esperienza si misero a reagire 1 peso molecolare di anetolo sciolto in benzolo, con 1 peso molecolare di acetato mercurico sciolto nella quantità necessaria di acqua e si riottenne un terzo circa dell'anetolo impiegato indecomposto, perciò nelle esperienze successive si adoperò sempre quantità corrispondente ad 1 p. m. di anetolo e 2 p. m. di acetato mercurico.

Gr. 20 di anetolo si agitarono in boccia a tappo smerigliato con gr. 86 di acetato mercurico disciolto in 344 cm³ di acqua. Se la preparazione si fa d'inverno, quando l'anetolo è solidificato, conviene sciogliierlo in un po' di benzolo; se invece si fa nell'estate, quando l'anetolo è liquido, non è necessario aggiungere solvente. L'ossidazione incomincia subito e si manifesta col deposito delle caratteristiche pagliette d'acetato mercuroso. Dopo 15 a 20 giorni l'acetato mercuroso è imbrunito per separazione di mercurio e la soluzione acquosa è ingiallita. Si estrae ripetutamente la massa con etere, indi si lava la soluzione eterea con carbonato sodico e si distilla il solvente. Rimane un residuo oleoso colorato in giallo, che, sottoposto alla distillazione in corrente di vapore, lascia separare nel distillato l'anetolo inossidato, quando si adoperi una quantità di acetato mercurico insufficiente. Nel caso di due pesi molecolari si può anche omettere la distillazione in corrente di vapore perchè non si ha più anetolo inalterato.

L'olio giallo conservato in essicatore, dopo alcuni giorni si concreta in una massa cristallina che viene spremuta fra carta bibula, oppure stesa su mattonella porosa per liberarla da una piccola quantità di olio giallo [1] indi si cristallizza ripetutamente dal benzolo o dall'alcool bollente.

L'analisi del composto, fatta su campioni di diverse preparazioni, dette il seguente risultato:

[1] Debbo richiamare qui l'attenzione su di una esperienza recente di E. Varenne e L. Godefroy (Comp. Rend. 140, 1905, pag. 591-93). Questi due chimici hanno ottenuto per azione della potassa alcoolica sul dibromoanetolo un glicole che rappresentano collo schema $CH_3O\ C_6H_4\ CH\ OH\ CHOH\ CH_3$ e che descrivono come un liquido oleoso di color d'ambra, bollente a 245°-250° con lenta decomposizione e che forse è lo stesso olio giallo che io ottengo contemporaneamente al vero glicole $CH_3O\ CH_4\ CH\ OH\ CHOH\ CH_3$ che è la sostanza cristallizzata di cui pare ignorata l'esistenza dai signori Varenne e Godefroy, quantunque la mia Nota venisse pubblicata nei Rendiconti della Accademia dei Lincei nel 1902 e nei Berichte della Società Chimica tedesca (T. 35, 1902, pag. 2997). e riprodotta dai più importanti periodici tedeschi ed inglesi. Ricorderò poi ai signori Varenne e Godefroy che fin dal 1887 Paul Toennies (Berl. ber. T. 20, 1887, 2982) dà sommariamente notizia di un diossiidroanetolo cristallizzato che egli ottiene per azione dell'acido nitroso sopra la base ottenuta per riduzione limitata del prodotto di addizione dell'anidride nitrosa sull'anetolo, passaggi che egli rappresenta con i seguenti schemi:

$$C_6H_4\begin{cases}OCH_3\\C_3H_5N_2O_3\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}OCH_3\\C_3H_5\begin{cases}NH_2\\OH\end{cases}\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}OCH_3\\CHOH.CHOH.CH_3\end{cases}$$

Mi riservo di studiare se l'olio che ottengo nella mia ossidazione sia un isomero stereo-chimico del glicole cristallizzato. Balbiano.

I. Gr. 0,1504 sostanza essicata nel vuoto sull'acido solforico dette gr. 0,3624 di CO_2 e gr. 0,1048 H_2O.
II. Gr. 0,2204 sostanza essicata nel vuoto sull'acido solforico dette gr. 0,5282 di CO_2 e gr. 0,1465 H_2O.
III. Gr. 0,2306 sostanza essicata nel vuoto sull'acido solforico dette gr. 0,5546 di CO_2 e gr. 0,1597 H_2O.
IV. Gr. 0,2096 sostanza essicata nel vuoto sull'acido solforico dette gr. 0,5048 di CO_2 e gr. 0,1463 H_2O.

Per cento:

	Trovato				Calcolato per $C_{10}H_{14}O_3$	
	I.	II.	III.	IV.		
C	65,36	65,71	65,58	65,68	C	65,93
H	7,38	7,74	7,69	7,22	H	7,69

Il peso molecolare determinato crioscopicamente adoperando come solvente l'acido acetico dette il seguente risultato:

		Peso molecolare	
Concentr.	Abbass. term.	Trovato	Calc. per $C_{10}H_{14}O_3$
0,48	0°115	162	
0,549	0°126	169	182

Questa sostanza, che come composizione differisce dall'anetolo $C_{10}H_{12}O$ per 2OH e che è come vedremo in seguito, 1-ossimetil-p-fenil-1-2-propilenglicole, cristallizza in piccoli aghetti raggruppati a mammelloni, discretamente solubili nell'acqua calda, solubili nell'alcool e nell'etere, poco solubili nel cloroformio freddo, solubili invece a caldo, poco solubili nel benzolo freddo, solubilissimi nel bollente. Riscaldata la sostanza in tubicino di vetro a pareti sottili comincia a raggrumarsi a 89° e fonde a 98° (term. di Anschutz). Non reagisce col cloridrato di semicarbazide, nè con fenilidrazina, il che esclude nella molecola gruppi chetonici od aldeidici. Per dimostrare che l'ossigeno aggiunto è sotto forma di ossidrile siamo ricorsi alle tre reazioni: isocianato di fenile (H. Goldschmidt ed A. Neissler) cloruro di benzoile ed anidride acetica.

Azione dell'isocianato di fenile.

Come si sa l'isocianato di fenile svela la presenza degli ossidrili formando prodotti d'addizione che sono eteri di acidi carbammici sostituiti.

Gr. 2,5 di glicole ben secco nel vuoto su acido solforico, sono stati sospesi in circa 20 cm.³ di benzolo distillato sul sodio e posti a reagire in tubo chiuso con circa 4 gr. di isocianato di fenile, cioè un'eccesso della quantità stechiometrica. Riscaldata la miscela per 8 ore a 70° la sostanza si disciolse e col raffreddamento non si ottenne cristallizzato il composto idrossammico. Si elevò la temperatura per altre 8 ore a 110° 120° e col raffreddamento si notò l'imbrunimento del liquido ed il deposito d'una parte cristallina che aumentò ancora con prolungato riscaldamento per altre 8 ore a 120° 130°. All'apertura del tubo si notò forte pressione interna: il li-

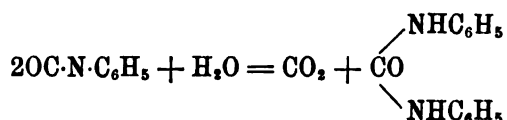
quido benzolico decantato della parte cristallina si addiziona di etere di petrolio secco bollente tra 70° 80°, non si ottiene deposito di sostanza cristallina e distillato il solvente, rimane un residuo pecioso. La sostanza cristallizzata depurata si presenta in cristalli aghiformi fusibili a 230°. È difenilurea come lo dimostra la seguente analisi.

Gr. 0,1515 sost. secca a 100° dettero gr. 0,4052 di CO_2 e gr. 0,0812 di H_2O.

Per cento:

	Trovato	Calc. $C_{13}H_{12}N_2O$
C	72,93	73,58
H	5,91	5,66

Evidentemente, come verrà dimostrato appresso, il glicole ha eliminato acqua la quale, reagendo sull'isocianato di fenile, ha prodotto anidride carbonica e difenilurea.

$$2OC{\cdot}N{\cdot}C_6H_5 + H_2O = CO_2 + CO\begin{cases} NHC_6H_5 \\ NHC_6H_5 \end{cases}$$

Negativa riuscì pure la reazione col cloruro di benzoile perchè riscaldando per 2 ore in bagno d'acqua a 80° gr. 2 di glicole secco con 4 cm³ di cloruro di benzoile si ottenne una massa peciosa nera, dalla quale non si riuscì ad isolare che acido benzoico.

Risultato positivo si ottenne coll'anidride acetica.

Gr. 2 di glicole si riscaldarono per cinque ore in bagno d'acqua in piena ebollizione con 5 cm³ di anidride acetica, indi il prodotto si distillò nel vuoto a bagno maria per eliminare l'acido acetico formatosi e l'eccesso di anidride acetica. Il residuo, olio denso, distilla verso i 200° alla pressione di 41 mm. di mercurio ed ha la composizione dell'etere diacetico del glicole.

Gr. 0,1984 dettero gr. 0,4554 di CO_2 e gr. 0,1266 di H_2O.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $CH_3O.C_6H_4.C_3H_5\begin{cases} OC_2H_3O \\ OC_2H_3O \end{cases} = C_{14}H_{18}O_5$
C	62,60	63,15
H	7,08	6,76

È un olio denso leggermente giallognolo, insolubile in acqua. Saponificato con soda ridà il glicole primitivo, riconosciuto al punto di fusione ed alla forma dei cristalli ed acido benzoico.

Ossidazione del glicole.

L'ossidante più adatto è il misto cromico. Gr. 2 di glicole vengono addizionati di una miscela di 10 gr. dicromato potassico, 29 gr. di acido solforico concentrato

e 20 gr. d'acqua e riscaldato a 80°. L'ossidazione avviene vivamente e la soluzione colorata in verde fu estratta tre volte con triplo volume di etere. Separato e distillato l'etere, rimane una sostanza cristallina, che ricristallizzata dall'acqua bollente presenta l'aspetto dell'acido anisico e come questo fonde a 183°. L'analisi conferma che il prodotto è acido anisico.

Gr. 0,1462 sostanza seccata a 100° dettero gr. 0,3366 di CO_2 e gr. 0,0729 di H_2O.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_8H_8O_3$
C	62,79	63,15
H	5,53	5,26

Con questa esperienza resta dimostrato che l'ossidazione dell'anetolo coll'acetato mercurico s'è portata esclusivamente sulla catena propenilica, ed avendo controllato anche coll'ossidazione mercurica la struttura propenilica del C_3H_5 rimane solo a rappresentare la struttura del glicole lo schema $CH_3O \cdot C_6H_4 \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CH_3$.

Ossidazione dell'anetolo con permanganato potassico

Il Wagner e successivamente Tiemann ed altri ottennero per ossidazione del safrolo ed isosafrolo eugenolo ed isoeugenolo col permanganato potassico i glicoli corrispondenti analoghi a quello da noi preparato, perciò abbiamo sperimentato anche questo mezzo di ossidazione nelle stesse condizioni di temperatura e di diluizione impiegate dai suddetti chimici e che per brevità tralasciamo di indicare rimandando il lettore alle memorie originali. La conclusione delle nostre esperienze fu che da 5 gr. di anetolo ottenemmo gr. 2,6 di acido anisico, gr. 2 di anetolo inalterato ed una traccia di una sostanza bianca cristallina che non presenta però i caratteri del glicole descritto.

III.

Azione dell'acetato mercurico sul metil-cavicolo.

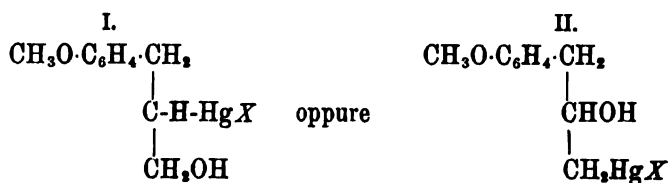
di U. Tonazzi e L. Balbiano),

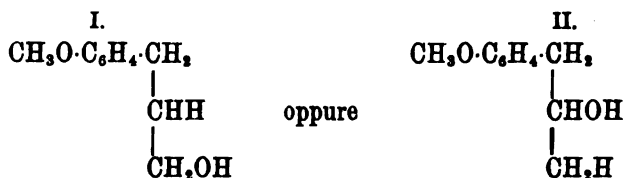
Il metil-cavicolo, componente principale dell'essenza di Dracuncolo, è l'isomero allilico dell'anetolo, e quindi veniva naturale di studiare di confronto su di esso l'azione dell'acetato mercurico in soluzione acquosa concentrata.

La reazione ha lo stesso andamento del safrolo, cioè formazione di un composto aceto mercurico del metil-cavicolo, che si presenta sotto forma di uno sciroppo e che ha la composizione espressa dalla formola $CH_3O \cdot C_6H_4 \cdot C_3H_5 \langle {}^{HgC_2H_3O_2}_{OH}$. Sostituendo il residuo acetico col cloro o col bromo, si potè constatare che il composto acetico

è una miscela di due isomeri, perchè si possono ottenere due composti clorurati o bromurati; un composto cloro-mercurico, predominante, che cristallizza in begli aghi bianchi splendenti, fusibili a 81°-82°, ed un altro resinoso giallastro, che però col tempo indurisce e si lascia facilmente polverizzare. Così pure si ottennero due composti bromurati, uno, in maggior quantità, cristallizzato in piccoli aghetti bianchi, fusibili a 70°; l'altro resinoso, ma in quantità piccola, che non analizzammo.

L'isomeria di questi due composti può dipendere dalla posizione rispettiva dell'ossidrile e del residuo alogenato mercurico come indicano i seguenti schemi:

I.		II.
$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH_2$		$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH_2$
|		|
$C\text{-}H\text{-}HgX$	oppure	$CHOH$
|		|
CH_2OH		CH_2HgX

e si sperava di risolvere la questione coll'ottenere, idrogenando i due composti, i due alcoli corrispondenti

I.		II.
$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH_2$		$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH_2$
|		|
CHH	oppure	$CHOH$
|		|
CH_2OH		CH_2H

di cui i prodotti di ossidazione avrebbero assodata la costituzione.

L'idrogenazione avviene, ma nello stesso tempo si elimina una molecola d'acqua e si ottiene il metil-cavicolo di partenza.

Parte sperimentale.

Estraemmo il metil-cavicolo dall'essenza di Dracuncolo fornitaci dalla Casa Schimmel di Lipsia. Per ripetute distillazioni frazionate di essa separammo una porzione (circa il 32 %) che distillava alla temperatura di 214°-216°, che aveva l'indice di rifrazione $N_D^{15} = 1.5244$ (Eykman trova lo stesso numero) e che all'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,2984 di sostanza dettero gr. 0,8837 di CO_2 e gr. 0,2235 di H_2O.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{12}O$
C	80,76	81,01
H	8,32	8,19

Gr. 5 di metil-cavicolo si agitarono con gr. 11 di acetato mercurico sciolto in gr. 44 di acqua, cioè nei rapporti dei loro pesi molecolari. Dopo un quarto d'ora di sbattimento si raccolse sul fondo della boccia un olio denso, sciropposo, e col ri-

poso la massa si separò in due strati limpidi, senza il minimo accenno a separazione di laminette di acetato mercuroso. Dopo 5 giorni di contatto, non verificandosi nessun cambiamento, si decantò la parte acquosa limpida, che venne evaporata a bagnomaria; rimase come residuo uno sciroppo, leggermente colorato in giallo, che disseccato nel vuoto sull'acido solforico, dette all'analisi il seguente risultato:

Gr. 0,2903 di sostanza dettero gr. 0,358 di CO_2 e gr. 0,1021 di H_2O
» 0,449 » » » » 0,2453 di HgS,

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $CH_3O\,C_6H_4\,C_3H_5{<}^{HgC_2H_3O_2}_{OH}$
C	33,63	33,93
H	3,90	3,81
Hg	47,08	47,15

L'olio denso rimasto nella boccia venne sciolto in alcool, e la soluzione alcolica filtrata, e siccome non dava indizio di precipitazione coll'addizione di etere secco, venne evaporata. Rimase lo sciroppo dello stesso aspetto di quello ottenuto dall'evaporazione della parte acquosa e che presenta la stessa composizione:

Gr. 0,2715 di sostanza dettero gr. 0,3396 di CO_2 e gr. 0,0958 di H_2O
» 0,4677 » » » » 0,2562 di HgS.

Ossia in 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{16}O_4Hg$
C	34,11	33,93
H	3,92	3,81
Hg	47,22	47,15

I due sciroppi sono dunque identici e si presentano collo stesso aspetto dello sciroppo di glucosio commerciale, solubili nell'acqua specialmente a caldo e solubili nell'alcool.

Composti cloromercurici $CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}C_3H_5{<}^{HgCl}_{OH}$

Un peso molecolare di composto aceto-mercurico sciolto in alcool assoluto, addizionato della quantità equimolecolare di cloruro di potassio, e fatto bollire a ricadere il tutto fino a completa soluzione, ed aggiungendo, se occorre, tant'acqua calda, da ottenere un liquido perfettamente limpido, lascia depositare col raffreddamento, degli aghi lucenti del nuovo composto che all'analisi dettero il seguente risultato:

Gr. 0,3008 sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,1064 di AgCl.
» 0,3696 » » » » » » » 0,2141 di HgS.
» 0,296 dettero gr. 0,3159 di CO_2 e gr, 0.0864 di H_2O.

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{11}O_2HgCl$
Cl	8,74	8,84
Hg	49,89	49,92
C	29,10	29,95
H	3,24	3,28

Il nuovo composto cristallizza in begli aghi lucenti, che fondono a 81°-82°, solubili in alcool, poco in etere, e pure abbastanza solubili in acqua bollente.

Dalle acque madri mediante svaporamento dell'alcool si riesce a separare ancora una nuova quantità di composto cristallino, poi rimane una sostanza resinosa quasi completamente insolubile in acqua, che col tempo indurisce e si lascia facilmente polverizzare. Disseccata nel vuoto sull'acido solforico dette all'analisi il seguente risultato:

Gr. 0,3105 di sostanza dettero gr. 0,1089 di Ag Cl
» 0,3054 » » » » 0,1795 di HgS.

Ossia in 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{11}O_2HgCl$
Cl	8,62	8,84
Hg	50,65	49,92

Questo composto è amorfo, colorato in giallognolo, lo che spiega il leggero eccesso di mercurio trovato, insolubile nell'acqua, poco solubile nell'alcool e nell'etere. Riscaldato in tubicino di vetro a pareti sottili, rammollisce a 55° ed a 91° sembra che fonda, ma la massa rimane sempre opaca, per cui il vero punto di fusione o di decomposizione non si può cogliere con precisione. Un piccolo campione sciolto a caldo nell'alcool assoluto e depositatosi col raffreddamento, riscaldato in tubicino sottile, fonde a 136° passando prima a temperature inferiori per lo stato pastoso.

La quantità di questo secondo composto è sempre piccola, però in una preparazione di composto cloromercurico, nella quale usammo un composto aceto-mercurico proveniente da una preparazione abbandonata a sè per più di tre mesi, ottenemmo una maggior quantità della porzione resinosa del composto clorurato, per cui si può ritenere che col tempo aumenti la quantità dell'isomero aceto-mercurico che lo genera.

Composti bromomercurici $CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}C_3H_5\langle{}^{HgBr}_{OH}$.

Si prepararono nello stesso modo dei corrispondenti cloroderivati. Anche in questa preparazione si ottennero due composti, uno in piccolissima quantità, amorfo, l'altro cristallizzato in piccoli prismetti microscopici fusibili a 70°-71°, solubili nell'acqua bollente e nell'alcool, poco nell'etere.

L'analisi di questo composto dette il seguente risultato:

gr. 0,2496 sostanza secca nel vuoto sull'acido solforico dettero gr. 0,245 CO_2 e gr. 0,0682 H_2O.

» 0,2388 sostanza secca nel vuoto sull'acido solforico dettero gr. 0,1018 Hg Br.

» 0,2865 » » » » 0,1498 HgS.

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{11}O_2HgBr$
C	26,76	26,96
H	3.03	2,95
Br	18,13	17,96
Hg	45,07	44,98

Idrogenazione dei composti cloromercurici.

L'idrogenazione si compie collo zinco e liscivia di soda caustica. Operammo nel modo seguente: si versò in pallone di un litro gr. 750 di liscivia di soda al 20 °/₀ e gr. 120 di polvere di zinco commerciale, indi gr. 36,5 di composto cloromercurico cristallizzato, e si scaldò, agitando di frequente, per 10 ore a bagno maria avendo munito il pallone di un refrigerante a ricadere. Dopo raffreddamento e riposo di una notte, la massa venne estratta con un triplo volume di etere. e l'etere, lavato con acqua, venne distillato, ed il residuo sottoposto alla distillazione in corrente di vapore. Col vapor d'acqua passò il metil-cavicolo, che venne caratterizzato dal suo punto di ebollizione (213°-215°), all'indice di rifrazione $N_D^{+19°} = 1,5226$ ed all'analisi:

gr. 0,2458 sostanza dettero gr. 0,7249 CO_2 e gr. 0,1823 H_2O:

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{12}O$
C	80,43	81,01
H	8,24	8,51

Operando nelle stesse condizioni col composto cloromercurico amorfo, si ottenne lo stesso metil-cavicolo, caratterizzato anche al suo punto di ebollizione (214°-215°) e dall'indice di rifrazione $N_D^{+20°} = 1,5222$.

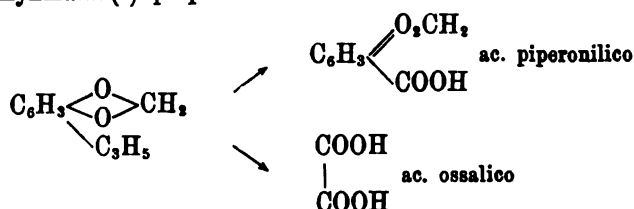
IV.

Azione dell'acetato mercurico sul safrolo ed isosafrolo.

(di V. Paolini, E. Luzzi ed L. Balbiano).

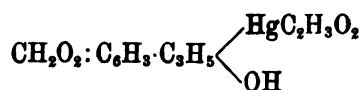
Il safrolo componente principale dell'essenza di Sassofrasso è un composto naturale pel quale Eykmann [1] propose la formula:

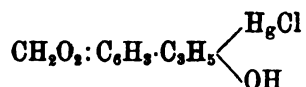
$C_6H_3<^{O}_{O}>CH_2$, $\diagdown C_3H_5$ ↗ $C_6H_3<^{O_2CH_2}_{COOH}$ ac. piperonilico

↘ COOH | COOH ac. ossalico

[1] Rec. d. trav. chem. des Pays Bas, IV, 32-54.

basandosi sul fatto che fra i prodotti di ossidazione permanganica si trova l'acido piperonilico e l'acido ossalico.

La scoperta dell'isafrolo fatta da I. Schiff e Poleck (1) e l'aver stabilito il Monreau (2) per via sintetica che il C_3H_5 di questo isomero ha la costituzione propenilica come nell'anetolo, lasciava determinata la struttura allilica del C_3H_5 del safrolo. Era perciò interessante studiare di confronto l'azione della soluzione dell'acetato mercurico su questi due composti differenzianti fra di loro per la struttura del radicale C_3H_5. L'esperienza ci dimostrò che mentre il radicale *propenile* $\overset{|}{C}H = CH - CH_3$ viene ossidato e trasformato nel glicole $- CH\,OH - CHOH - CH_3$, il radicale *allile* $\overset{|}{C}H_2 - CH = CH_2$ ci dà due composti di addizione mercurica:

$$CH_2O_2 : C_6H_3 \cdot C_3H_5 \langle {}^{HgC_2H_3O_2}_{OH}$$

l'uno denso sciropposo, l'altro cristallizzato, dai quali, mediante la doppia decomposizione con cloruro sodico, si potè ottenere due composti clorurati cristallizzati:

$$CH_2O_2 : C_6H_3 \cdot C_3H_5 \langle {}^{HgCl}_{OH}$$

quello derivante dal composto aceto mercurico cristallino costituisce una farina cristallina bianca, che si decompone annerendo verso 170°, mentre quello che deriva dal composto aceto-mercurico sciropposo cristallizza in aghi prismatici fusibili a 138°. In questo caso di formazione dei composti aceto-mercurici non si ha riduzione dell'acetato mercurico a mercuroso. Si ha quindi mediante queste reazioni un modo preciso di distinguere e caratterizzare la struttura del radicale C_3H_5 nelle sue due forme isomeriche. L'ossidazione dell'isafrolo, come si è detto, dà il glicole:

$$CH_2O_2 : C_6H_3 \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CH_3$$

che presenta tutti i caratteri di quello ottenuto dalla Bouschmakin (3), nel laboratorio del Wagner, mediante l'ossidazione permanganica, ma in certe condizioni di temperatura o di luce può ottenersi invece del glicole un suo prodotto di disidratazione che ha funzione, come vedremo in seguito, di aldeide. In una ossidazione eseguita nel mese di agosto nel quale la temperatura ambiente oscillò intorno a + 27° si ottenne appunto tale composto aldeidico, ma pare che non sia solo la temperatura che abbia influenza, perchè altri tentativi fatti per precisare le condizioni di essa nella reazione non hanno portato all'aldeide, ma al glicole. Si può però ottenere come si vedrà in seguito, il composto aldeidico per disidratazione del glicole riscaldandolo semplicemente con una piccola quantità di disidratante.

(1) Berl. bez., t. XVII, pag. 1935.
(2) Compt. Rend., 122, pag. 792.
(3) Berl. ber. t. 24, 1891, 3490.

Parte sperimentale.

Il safrolo adoperato era il prodotto commerciale depurato per distillazione e si usava la porzione che distillava fra 230°-232°.

Gr. 10 di safrolo si agitano con gr. 20 di acetato mercurico sciolti in 80 gr. di acqua, cioè 1 p. mol. di safrolo reagisce con 1 p. mol. di acetato mercurico. A poco a poco il safrolo si trasforma in un denso sciroppo che si condensa sul fondo del recipiente. Dopo 8 giorni di azione si decantò la parte acquosa limpida ed acida per acido acetico, si lavò con acqua un paio di volte per decantazione lo sciroppo, indi si disciolse in alcool assoluto e la soluzione alcoolica si addizionò di 10 a 12 volumi di etere secco. Si depositò una piccolissima quantità di sostanza solida, e la soluzione etereo-alcoolica filtrata e distillata lasciò per residuo lo sciroppo che diede all'analisi il seguente risultato:

I. Gr. 0,4944 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,264 di HgS.
II. » 0,3914 » » » » 0,2066 HgS.
III. » 0,350 di sostanza dettero gr. 0,4239 di CO_2 e gr. 0,1194 di H_2O.
IV. » 0,435 » » 0,5256 CO_2 » 0,1486 H_2O.

Ossia in cento parti:

	Trovato				Calcolato per $CH_2O_2C_6H_3C_3H_5<^{HgC_2H_3O_2}_{OH} = C_{12}H_{14}O_5Hg$
	I.	II.	III.	IV.	
Hg	46,03	45,50			45,66
C			33,03	32,95	32,87
H			3,80	3,79	3,19

Un'altra quantità dello stesso sciroppo si può ricavare dall'evaporazione a bagno maria delle acque madri; ma bisogna poi fargli subire una depurazione sciogliendolo nell'alcool per separarlo da una piccolissima quantità di mercurio che si è prodotta nell'evaporazione, e la parte sciropposa disciolta nell'acqua ha la stessa composizione.

Gr. 0,3972 dettero gr. 0,2076 di HgS:

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{14}O_5Hg$
Hg	45,04	45,66

Se il contatto delle due sostanze dura tre a quattro mesi (dal 23 ottobre al 21 febbraio successivo) oltre al composto aceto-mercurico sciropposo si forma una certa quantità di un composto isomero cristallizzato che si isola nel modo seguente: decantato lo strato acquoso, lo sciroppo viene dibattuto con etere che lo lascia indisciolto, indi decantato l'etere, si scioglie in alcool assoluto, e la soluzione alcoolica filtrata viene addizionata di 15 a 20 volumi di etere secco. Col riposo poco a poco

si deposita un composto cristallino che filtrato, si lava con un po' di etere, si asciuga e si dissecca.

All'analisi dette il seguente risultato:

gr. 0,4534 di sostanza seccata nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,2424 di HgS.
» 0,2758 » » » » » 0,3274 CO_2
e gr. 0,0818 di H_2O.

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{14}O_5Hg$
Hg	46,07	45,66
C	32,34	32,87
H	3,29	3,19

Dalla soluzione eterea-alcolica e dalla soluzione acquosa primitiva si isola il composto aceto-mercurico sciropposo. Le rispettive quantità dei due isomeri variano colla durata del tempo di contatto. In una preparazione fatta durare circa sette mesi (6 aprile 1902 al 20 ottobre) si ottennero gr. 24 di composto cristallino da gr. 84 di safrolo messo a reagire. I due composti aceto-mercurici del safrolo presentano le seguenti proprietà:

Composto solido. — Cristallizza in croste bianche insolubili nell'acqua e nell'etere, solubili nell'alcool specialmente a caldo. Riscaldato in stufa ad acqua comincia ad alterarsi. Sospeso in una soluzione al 25 °/₀ di acido fosforico, e distillato, ridà safrolo riconosciuto al punto di ebollizione determinato col metodo di Siwoloboff e all'odore.

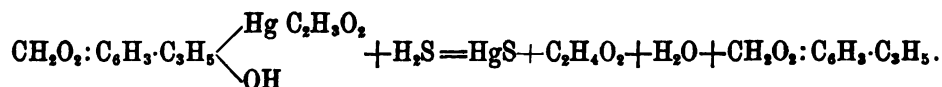
Composto sciropposo. — Di un colore giallognolo poco scorrevole simile allo sciroppo di glucosio, solubile nell'alcool e quasi insolubile nell'etere, poco solubile in un miscuglio di 1 vol. di alcool e 10-12 vol. di etere, solubile nell'acqua calda, pochissimo nella fredda. Decomposto con gas solfidrico ridà safrolo che venne riconosciuto al punto di ebollizione 232° ed all'analisi del prodotto distillato.

gr. 0,3218 di sostanza dettero gr. 0,8798 di CO_2 e gr. 0,1866 di H_2O.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{10}O_2$
C	74,56	74,07
H	6,44	6,17

La decomposizione mediante gli acidi dei composti aceto-mercurici dà quindi luogo ad eliminazione di acqua ed a formazione del safrolo primitivo:

$$CH_2O_2 : C_6H_3 \cdot C_3H_5 \left\langle \begin{matrix} Hg\ C_2H_3O_2 \\ OH \end{matrix} \right. + H_2S = HgS + C_2H_4O_2 + H_2O + CH_2O_2 : C_6H_3 \cdot C_3H_5 .$$

Composti cloro-mercurici del safrolo $CH_2O_2 = C_6H_3 - C_3H_5\langle{}^{HgCl}_{OH}$.

A) *Dal composto aceto-mercurico cristallino.* — Essendo questo composto pochissimo solubile nell'alcool, si sospese in questo veicolo (gr. 20 circa in cm^3. 50-60 di alcool) e si fece bollire per mezz'ora a ricadere colla quantità stechiometrica di cloruro di sodio sciolto nella quantità strettamente necessaria di acqua calda. Si ha come prodotto della reazione una massa molle attaccaticcia bianca che col raffreddamento indurisce e si attacca tenacemente alle pareti del recipiente. Si raccoglie su filtro, si lava con acqua fredda fino ad eliminazione del cloruro di sodio, si asciuga fra carta e si dissecca nel vuoto su acido solforico.

gr. 0,5526 di sostanza bruciata con calce dettero gr. 0,1784 di AgCl.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{11}O_2HgCl$
Cl	7,98	8,56

È una polvere bianca insolubile nell'acqua, pochissimo solubile nell'alcool assoluto bollente,, dal quale si deposita sotto forma di una farina cristallina bianchissima che aderisce fortemente alla parete del recipiente. Riscaldata in tubicino di vetro si decompone con sviluppo di gas, ed annerisce verso 170°.

Idrogenato con zinco ed idrato sodico ridà safrolo riconosciuto al punto di ebollizione (232°), all'indice di rifrazione $n_D^{19} = 1,538$, ed all'analisi:

gr. 0,2987 di sostanza dettero gr. 0,815 di CO_2 e gr. 0,165 di H_2O.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{10}O_2$
C	74,41	74,07
H	6,13	6,17

B) *Dal composto aceto-mercurico sciropposo.* — Gr. 5 di composto si sciolgono nella quantità necessaria di alcool a 95 °/₀ ed alla soluzione bollente si aggiungono gr. 0,405 di cloruro di sodio sciolto nella quantità necessaria di acqua fredda. Si riscalda sino a soluzione completa, e se è necessario si aggiunge alcool, indi si lascia raffreddare. Col raffreddamento cristallizza in begli aghi bianchi il nuovo composto.

L'analisi dette i seguenti risultati:

gr. 0,290 di sostanza seccata nel vuoto dettero gr. 0,1624 di HgS.
» 0,2132 » bruciata con CaO dettero gr. 0,07 di AgCl.
» 0,3238 » dettero gr. 0,3413 di CO_2 e gr. 0,0868 di H_2O.

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{11}ClO_3Hg$
Hg	48,27	48,25
Cl	8,23	8,56
C	28,74	28,95
H	2,97	2,65

Cristallizza dall'alcool in aghi bianchi prismatici duri e splendenti, raggruppati a rosetta. Riscaldato in tubicino di vetro fonde a 138° e col raffreddamento dà una massa vetrosa. Idrogenato parimenti con zinco ed idrato sodico ridà safrolo, riconosciuto al punto di ebollizione (230°-232°), all' indice di rifrazione $N_D^{19} = 1,5282$ ed all'analisi

gr. 0,215 di sostanza dettero gr. 0,5809 di CO_2 e gr. 0,1211 di H_2O.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{10}O_2$
C	73,68	74,07
H	6,26	6,17

Azione dell'acetato mercurico sull'isafrolo.

L'isafrolo venne preparato mediante l'azione dell' alcoolato sodico sul safrolo secondo la prescrizione dell'Angeli (1); si adoperò la porzione che distillava fra 248-250°.

Gr. 20 d'isafrolo vengono agitati con gr. 40 di acetato mercurico sciolti in 160 cm.³ di acqua; si misero a reagire le due sostanze nel rapporto dei loro pesi molecolari. Dopo poco tempo principia il deposito di laminette bianche di acetato mercuroso; si fa completare l'ossidazione alla temperatura ordinaria lasciando la miscela a sè per 15 giorni, durante il quale tempo l'acetato mercuroso si riduce in massima parte a mercurio metallico. Si estrae ripetutamente la massa con etere; distillato il solvente rimane un residuo oleoso che in gran parte si concreta. Colla distillazione in corrente di vapore si elimina l'isafrolo inalterato, e dalla soluzione acquosa rimasta nell'apparecchio distillatore, convenientemente concentrata si deposita col raffreddamento una sostanza cristallina leggermente colorata in giallo. Si ricristallizza dall'etere o dal benzolo, e così depurata dette all' analisi il seguente risultato:

Gr. 0,2307 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico, dettero gr. 0,5159 di CO_2 e gr. 0,1314 di H_2O.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{12}O_4$
C	60,98	61,22
H	6,32	6,12

Tanto dall'etere quanto dal benzolo cristallizza in grossi cristalli bianchi, prismatici, duri, solubili nell'acqua calda, poco nell'acqua fredda, fusibili a 101-102°. Presenta quindi tutti i caratteri del glicole ottenuto dalla Bouschmakin nella ossidazione permanganica.

In una esperienza di ossidazione fatta nelle seguenti precise condizioni, invece di ottenere il glicole si ottenne un prodotto di disidratazione che contiene un carbo-

(1) Gazz. Chim. 23, II, 1893, 101.

nilo perchè dà l'ossima ed il semicarbazone e che, come vedremo in seguito, è un'aldeide.

Gr. 20 di isafrolo vennero messi a reagire colla quantità stechiometrica di acetato mercurico e lasciati per 40 giorni alla temperatura ordinaria ed alla luce diffusa. La temperatura ambiente oscillò intorno a + 27°. Dopo aver estratto con etere l'intiera massa, ed il residuo della distillazione dell'etere sottoposto alla corrente di vapore, si ripiglia con etere il residuo fisso e l'acqua rimasta nel recipiente distillatore. Svaporato il solvente rimase un liquido oleoso, che non cristallizza anche per lungo soggiorno in essicatore. Sottoposto alla distillazione a pressione ridotta passa quasi tutto intorno a 142° a 23 mm. di mercurio.

All'analisi dette il seguente risultato:

I. Gr. 0,3487 di sostanza dettero gr. 0,8452 CO_2 e gr. 0,1799 H_2O.
II. » 0,2426 » » 0,5102 » 0,1414 »

ossia in 100 parti:

	Trovato I.	Trovato II.	Calcolato per $C_{10}H_{10}O_3$	$C_{10}H_{12}O_4$
C	66,10	66,34	67,41	61,22
H	5,76	5,95	5,61	6,12

L'analisi dimostra che il prodotto non è completamente puro, ma contiene forse ancora piccole quantità del glicole che diminuiscono il percentuale del carbonio. Questa sostanza costituisce un olio di color verdognolo, solubile nell'alcool e nell'etere, di odore aromatico.

Reagisce coll'idrossilamina e colla semicarbazide.

Ossima. Gr. 3,7 di sostanza disciolta in alcool metilico si addizionano di una soluzione acquosa di cloridrato di idrossilamina (gr. 1,5) ed acetato sodico (gr. 2) e la soluzione limpida viene riscaldata a ricadere per 3-4 ore. Si distilla in seguito l'alcool e si riprende il residuo con acqua; rimane un olio che col tempo cristallizza.

Si cristallizza dall'alcool acquoso bollente e così si ottiene in aghi prismatici appena colorati in giallognolo che fondono a 89°.

Analisi:

Gr. 0,1958 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero cc. 11,8 di N a 13° e 760 mm.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{11}NO_3$
N	7,12	7,25

Bollita per mezz'ora con acido solforico diluito, si decompone, e la massa, imbrunita, viene estratta con etere. L'etere disseccato con cloruro di calcio, indi distillato, lascia un residuo oleoso colorato in bruno che distilla alla pressione di 30 mm. tra 175-180°. Il distillato ha colore giallognolo e conserva l'odore aromatico.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,2601 di sostanza, dettero gr. 0,636 di CO_2 e gr. 0,1506 di H_2O.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{10}O_3$
C	66,70	67,41
H	5,75	5,61

Anche passando per l'ossima non si potè ottenere il composto $C_{10}H_{10}O_3$ perfettamente depurato.

Semicarbazone. Si ottenne agitando direttamente la sostanza con una soluzione acquosa satura di cloridrato di semicarbazide e di acetato sodico adoperando un leggiero eccesso dei reagenti. Dopo breve tempo il tutto si rapprende in una massa cristallina che si raccoglie su filtro, si lava con acqua fredda e si ricristallizza dall'alcool acquoso bollente.

Cristallizza in belle laminette bianche che fondono a 158°.

Analisi:

Gr. 0,1586 di sostanza dettero cm.^{3} 24 di N a 14° e 759 mm.

Per cento:

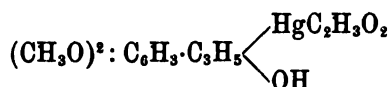
	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{11}N_3O_3$
N	17,77	17,87

V.

Azione dell'acetato mercurico sul metil-eugenolo e metil-isoeugenolo.

(F. Bernardini e L. Balbiano).

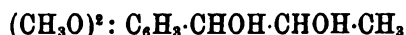
Il metil-eugenolo e il metil-isoeugenolo differenziano fra di loro per avere il primo il radicale C_3H_5 a struttura allilica, il secondo a struttura propenilica, ed il comportamento di queste due sostanze colla soluzione acquosa di acetato mercurico verifica la struttura stabilita dai lavori analitici e sintetici di Tiemann (1). Infatti dal metil-eugenolo si potè ottenere un composto aceto mercurico

$$(CH_3O)^2 : C_6H_3 \cdot C_3H_5 \langle {HgC_2H_3O_2 \atop OH}$$

sciropposo, che lentamente cristallizza in aghi raggiati e che è la miscela di due composti isomeri, i quali si possono separare mediante i cloro-derivati. Si può isolare un composto cloromercurico cristallizzato in piccoli prismetti bianchi, duri, fusibili a 112°-113°, ed in piccola quantità un isomero, che si deposita dapprima sotto forma di una resina

(1) Berl. Ber., t. 15, 1882, pag. 2069.

giallastra, che col tempo indurisce. Non si è potuto nemmeno in questo caso stabilire la forma dell'isomeria, perchè i due composti cloromercurici idrogenati con zinco ed idrato alcalino, ridanno il metil-eugenolo di partenza.

La soluzione acquosa di acetato mercurico esplica azione idrossilante sul metil-isoeugenolo a struttura propenilica, e si potè isolare il glicole

$$(CH_3O)^2 : C_6H_3 \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CH_3$$

nelle due forme stereo-isomere, già ottenute da Makarij Kolokoloff [1] nell'ossidazione permanganica del metil-isoeugenolo. Un isomero fonde a 120-121° e la natura di glicole venne in questo caso confermata dalla reazione dell'isocianato di fenile, mediante il quale si ha il composto di addizione di due mol. d'isocianato, cristallizzato in aghetti bianchi fusibili a 166°-168°. L'altro isomero, che si forma in quantità un po' minore, fonde a 87°,5-88°,5. Il processo idrossilante è però in questo caso accompagnato da altri processi più complicati, che danno luogo alla formazione di molte sostanze resinose, nelle quali si potè constatare una piccola quantità del prodotto di disidratazione del glicole, isolandolo sotto forma di semicarbazone, cristallizzato in aghi fusibili a 176°-177°. Questo semicarbazone è identico, come si vedrà appresso, a quello che si ottiene dall'aldeide, la quale si ha riscaldando direttamente con una piccola quantità di cloruro di zinco il glicole a p. di f. 120°-121°.

Parte sperimentale.

Il metil-eugenolo adoperato venne preparato in laboratorio, e per istabilirne il grado di purezza si verificò il punto di ebollizione, l'indice di rifrazione ed il peso specifico. Le costanti ottenute sono: P. eb. 142°-145° alla pressione di 14 mm.; $N_D^{15} = 1,5367$ ($N_D^{11} = 1,5373$. Gildemeister ed Hoffmann, *Les huiles essentielles*, pag. 200), $d.^{15} = 1,043$ ($d.^0 = 1,0478$).

Si fece una soluzione di gr. 37 di acetato mercurico in 148 cm.^{3} di acqua e si agitò con gr. 20 di metil-eugenolo. Le due sostanze vennero adoperate nei rapporti dei loro pesi molecolari. La reazione ha luogo in breve tempo, perchè il metil-eugenolo si scioglie nella soluzione di acetato mercurico e dopo un contatto di 12 giorni la massa si mantiene limpida; solo accenna ad un deposito lievissimo nero di mercurio, proveniente forse da traccie d'impurezze dell'eugenolo adoperato. In altre preparazioni le sostanze reagenti si lasciarono solo in contatto 24 ore, e si constatò che la reazione era avvenuta completa. La soluzione acquosa, filtrata, venne svaporata a bagno-maria; rimase uno sciroppo colorato leggermente in giallo, che lentamente cristallizza in aghi raggiati, i quali rimangono però sempre bagnati da una sostanza sciropposa. Non si cercò di separare i due composti isomeri aceto-mercurici, e si analizzò la miscela sciropposa dopo averla disseccata fino a costanza di peso nel vuoto sull'acido solforico.

L'analisi dette i seguenti risultati:

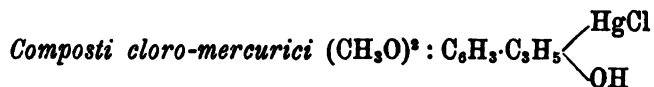
Gr. 0,5947 di sostanza, dettero gr. 0,744 di CO_2 e gr. 0,2162 di H_2O.
» 0,4928 » » » 0,250 di HgS.

(1) Chem. Centralblatt, 1897, I, 915.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $(CH_3O)^2 : C_6H_3\langle^{HgC_2H_3O_2}_{OH}$
C	34,12	34,33
H	4,03	3,96
Hg	43,74	44,08

La sostanza è uno sciroppo insolubile nell'etere, solubile nell'acqua e nell'alcool.

Composti cloro-mercurici $(CH_3O)^2 : C_6H_2 \cdot C_3H_5\langle^{HgCl}_{OH}$

Il composto aceto-mercurico sciolto nella quantità sufficiente di alcool caldo, viene addizionato di una soluzione acquosa e calda di cloruro di sodio o di potassio, contenente le quantità stechiometriche di cloruri corrispondenti ad un peso molecolare. Col raffreddamento si deposita un olio denso, che poco dopo si concreta in una massa cristallina. Mediante ripetute cristallizzazioni dall'alcool si riesce a separare la porzione cristallina più abbondante, da una piccola quantità dell'isomero che dapprima si presenta come una resina pastosa, che a poco a poco indurisce.

La porzione cristallina dette all'analisi il seguente risultato:

Gr. 0,1828 di sostanza, dettero gr. 0,2067 di CO_2 e gr. 0,0629 di H_2O
» 0,4868 » » » 0,2621 di HgS
» 0,4837 » » » 0,1596 di AgCl.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $(CH_3O)^2 : C_6H_2.C_3H_5\langle^{HgCl}_{OH}$
C	30,83	30,64
H	3,82	3,48
Hg	46,42	46,49
Cl	8,16	8,24

Questo composto cristallizza in piccoli prismetti trasparenti, splendenti, duri, al microscopio presentano delle striature longitudinali; pochissimo solubile nell'acqua calda, solubile nell'alcool acquoso: fonde a 112-113°.

La porzione amorfa dette all'analisi il seguente risultato:

Gr. 0,4581 di sostanza dettero gr 0,153 di AgCl
» 0,524 » » » 0,2989 di HgS.

Per cento:

	Trovato	Calcolato
Cl	8,26	8,24
Hg	47,42	46,49

La sostanza conteneva traccie di mercurio libero, perchè aveva un colore giallo-grigiastro e ciò viene comprovato dalla determinazione di mercurio.

Riducemmo nelle stesse condizioni descritte pei composti derivanti dal safrolo e dal metilcavicolo, con zinco e idrato sodico i due composti cloromercurici ed ottenemmo metil-eugenolo, che caratterizzammo al punto di ebollizione, e all'indice di rifrazione. Il metil-eugenolo ripristinato dal composto cloromercurico cristallizzato distilla fra 143-145° a 15 mm.; $N_D^{17} = 1{,}5358$ e contiene

Per cento:

	Trovato	Calcolato
C	73,68	74,15
H	7,82	7,83

Quello ripristinato dal composto cloro-mercurico amorfo, distilla fra 144-145° a 16 mm.; N_D^{17} 1,5336 e contiene:

Per cento: C 73,70 H 7,93.

Metil-iso-eugenolo.

Il metil-iso-eugenolo adoperato distillava alla pressione di 23 mm. tra 157-158°,5; l'indice di rifrazione $N_D^{15,5} = 1{,}5676$; il peso specifico a 15° = 1,069 Eykman dà le seguenti costanti: $D_{11,5} = 1{,}064$; $N_D^{11} = 1{,}568$.

Gr. 20 di metil-iso-eugenolo si agitarono con gr. 38 di acetato mercurico sciolti in 152 cm.^{3} di acqua, cioè nei rapporti dei loro pesi molecolari. Dopo 10 minuti di agitazione principia la separazione di acetato-mercuroso insolubile, che va aumentando man mano che si compie la reazione. Dopo 25 giorni la massa solida depositatasi è grigia per mercurio ridotto; allora si estrasse 10 volte con triplo volume di etere, che lasciò alla distillazione un residuo oleoso, verdognolo, che fu sottoposto alla distillazione in corrente di vapore.

Col vapore d'acqua passò il metil-iso-eugenolo rimasto inalterato, che venne estratto con etere e che rappresenta all'incirca il 30 % della quantità adoperata. Il residuo fisso resinoso venne, insieme colle acque rimaste nel pallone distillatore concentrate, dibattuto con etere. Si separa una sostanza cristallina bianca, che raccolta su filtro, venne cristallizzata dall'alcool bollente; essa rappresenta circa il 5 % del metil-iso-eugenolo adoperato.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,1666 di sostanza seccata nel vuoto su acido solforico, dettero gr. 0,3793 di CO_2 e gr. 0,1159 di H_2O.

Ossia in 100 parti;

	Trovato	Calcolato per $(CH_3O)^2 : C_6H_3 - C_3H_5(OH)^2$
C	62,06	62,26
H	7,73	7,54

Questa sostanza cristallizza dall'alcool in prismi appiattiti splendenti, fusibili a 120-121°; poco solubili nell'acqua fredda, solubili nella calda e nell'alcool. Coll'isocianato di fenile reagisce intervenendo una molecola del composto con due molecole d'isocianato.

Gr. 3,7 del glicole si sospesero in 15 cm.^{3} di benzolo secco e addizionato di gr. 5 di isocianato di fenile, ed il tutto fu introdotto in tubo di vetro che si saldò in seguito alla lampada. Riscaldato il tubo per 8 ore a bagno-maria in piena ebollizione, si ottenne la soluzione della sostanza, ma non il deposito cristallino dell'acido carbammico sostituito. Si riscaldò in seguito per altre 8 ore a 140-145°, ottenendo così un deposito cristallino. All'apertura del tubo non si osservò pressione interna. La sostanza cristallina si ricristallizzò ripetute volte dall'alcool acquoso bollente, finchè si ottenne a punto di fusione costante.

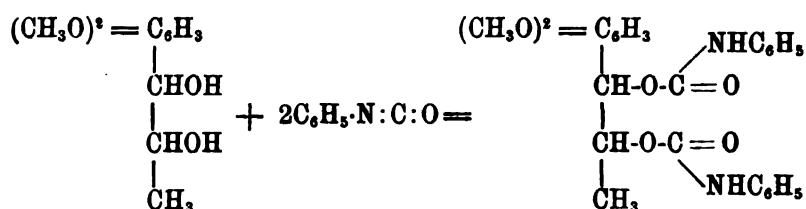
La determinazione dell'azoto dette il seguente risultato:

gr. 0,1634 sostanza dettero cm.^{3} 8.8 di azoto a 19° e 762 mm.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $(CH_3O)^2:C_6H_3(OH)^2(C_6H_5NCO)^2$
N	6,20	6,64

Così rimane dimostrato che il composto ottenuto è un glicole, perchè coll'isocianato di fenile dà l'acido carbammico sostituito, secondo l'equazione

$$\begin{array}{l} (CH_3O)^2 = C_6H_3 \\ \quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\; CHOH \\ \quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\; CHOH \\ \quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\; CH_3 \end{array} + 2C_6H_5{\cdot}N:C:O = \begin{array}{l} (CH_3O)^2 = C_6H_3 \quad\; NHC_6H_5 \\ \quad\quad\quad\quad | \quad\quad\; / \\ \quad\quad\quad\; CH\text{-}O\text{-}C = O \\ \quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\; CH\text{-}O\text{-}C = O \\ \quad\quad\quad\quad | \quad\quad\; \backslash \\ \quad\quad\quad\; CH_3 \quad\;\; NHC_6H_5 \end{array}$$

Questa sostanza cristallizza in aghetti bianchi opachi, raggruppati come l'amianto, insolubili in acqua, poco solubili nell'alcool freddo, di più a caldo. Fonde a 166°-168°

Separato l'etere d'estrazione della parte acquosa, si agitò per disseccarlo con cloruro di calcio fuso. Si ottenne un precipitato bianco, che venne raccolto su filtro, e lavato con un po' d'etere. Asciugato fra carta, e disseccato nel vuoto su acido solforico, rappresenta circa il 4,5 % del metil-isoeugenolo adoperato. Si depurò cristallizzandolo dall'alcool acquoso bollente.

All'analisi dette il seguente risultato:

gr. 0,1509 sostanza dettero gr. 0,3441 CO_2 e gr. 0,0978 H_2O ossia in 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $(CH_3O)^2C_6H_3 - C_3H_5(OH)^2$
C	62,19	62,26
H	7,20	7,54

Cristallizza in bei prismi splendenti intrecciati, solubilissimi nell'acqua calda; col disseccamento nel vuoto diventano opachi. Fonde a 87°,5-88°,5.

Le proprietà delle due sostanze coincidono colle proprietà dei due glicoli stereoisomeri che si ottengono nell'ossidazione permanganica.

La distillazione dell'etere filtrato lasciò come residuo un olio resinoso colorato in rossastro, che conteneva del mercurio, e quindi venne sottoposto all'idrogenazione con zinco ed idrato sodico. Estratto nuovamente con etere, il residuo oleoso ottènuto venne sottoposto alla distillazione a pressione ridotta, senza osservare un punto fisso di distillazione (passa fra 150° e 200° a 6 mm.). Rimane indistillata poca quantità di sostanza peciosa. La parte distillata si separò grossolanamente in una porzione più volatile ed in una meno e le due porzioni vennero saggiate con un leggero eccesso di cloridrato di semicarbazide ed acetato potassico. Dalla porzione più volatile si ebbe una sostanza cristallizzata, mentre dall'altra non si ottenne sostanza depurabile. La sostanza cristallizzata si depurò per successive cristalizzazioni dall'alcool e si ottenne pura per l'analisi.

gr. 0,3782 sostanza dettero cm.³ 5,35 di azoto alla temperatura di 15° e alla pressione di mm. 760.

Per cento:

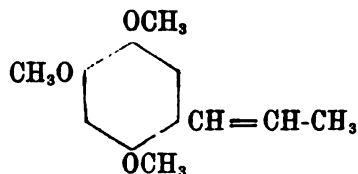
	Trovato	Calcolato per $(CH_3O)^2 : C_6H_3 - C_3H_5 : N\text{-}NH\text{-}CO\text{-}NH_2$
N	16,56	16,73

Questo semicarbazone cristallizza in fini aghi setacei soffici, bianchi, opachi, che fondono a 176°-177° e sono identici al semicarbazone che si ottiene dall'aldeide che si origina, come vedremo in seguito, col riscaldamento del glicole fusibile a 120° con piccola quantità di disidratanti.

VI.

Azione dell'acetato mercurico sull'asarone.

(D. Cirelli e L. Balbiano).

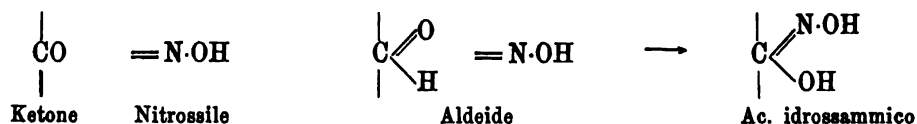
La sintesi dell'asarone effettuata da L. Gattermann e F. Eggers [1] condensando l'aldeide asarilica col propionato sodico ed anidride propionica e sovrariscaldando l'acido ottenuto, dimostra che in questo composto il gruppo C_3H_5 deve avere la struttura propenilica e che esso deve venire rappresentato dallo schema

[1] Berl. Ber. T. 33, 1899, 289.

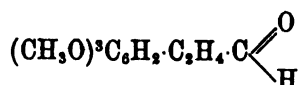
Ed infatti agitato con soluzione acquosa satura di acetato mercurico dà subito riduzione ad acetato mercuroso e fra i prodotti dell'ossidazione riuscimmo ad isolare un composto $C_{12}H_{16}O_4$ che per la composizione si differenzierebbe per una molecola di acqua in meno dal glicole che si prevedeva venisse formato:

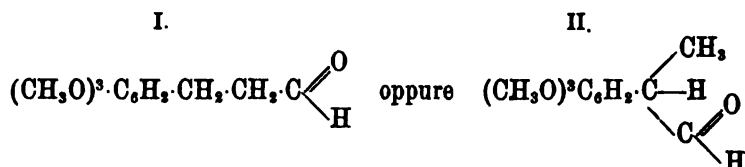
$$(CH_3O)^3 : C_6H_2 \cdot CHOH \cdot CH \cdot OH \cdot CH_3 - H_2O = C_{12}H_{16}O_4$$

Avviene in questo caso la stessa reazione avvenuta per l'isosafrolo, che in determinate condizioni, non potute afferrare per ben stabilirle, dà il prodotto di disidratazione del glicole corrispondente.

Quest'anidride contiene un carbonilo, perchè colla semicarbazide dà un semicarbazone cristallizzato fusibile a 157°-158° ed è quindi un chetone od un'aldeide. Per differenziare a quale di queste due serie di composti appartenga, ricorremmo alla reazione nettamente distintiva suggerita dall'Angeli ed applicata dal Rimini [1], adoperando l'acido benzolsolfinidrossilaminico $C_6H_5SO_2 - N <^{H}_{OH}$ del Piloty. Se il composto in questione è un'aldeide si dovrà ottenere un acido idrossammico, svelabile alla colorazione violetta del sale ferrico, ed alla formazione di un sale ramico, che nella maggior parte dei casi è praticamente insolubile nell'acqua. Se invece il composto è un chetone non avviene reazione mancando l'idrogeno per formare l'acido idrossammico come si vede chiaramente dai seguenti schemi.

$$\underset{\text{Ketone}}{\overset{|}{\underset{|}{CO}}} \quad \underset{\text{Nitrossile}}{= N \cdot OH} \qquad \underset{\text{Aldeide}}{\overset{|}{\underset{|}{C}} \begin{smallmatrix} \nearrow O \\ \searrow H \end{smallmatrix} \quad = N \cdot OH} \quad \longrightarrow \quad \underset{\text{Ac. idrossammico}}{\overset{|}{\underset{|}{C}} \begin{smallmatrix} \nearrow N \cdot OH \\ \searrow OH \end{smallmatrix}}$$

Il nostro composto dette la nota colorazione violetta col sale ferrico e si potè anche separare ed analizzare un sale di rame, il quale è un po' solubile nell'acqua e si separa solo dopo alcuni giorni ed è supponibile che sia in parte idrolizzato. L'anidride del glicole è quindi un'aldeide rappresentata dalla formola:

$$(CH_3O)^3C_6H_2 \cdot C_2H_4 \cdot C \begin{smallmatrix} \nearrow O \\ \searrow H \end{smallmatrix}$$

che, rimanendo fisse le posizioni dei quattro gruppi sostituenti i quattro idrogeni del benzolo, può solo avere le due formole di struttura:

$$\text{I.} \quad (CH_3O)^3 \cdot C_6H_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot C \begin{smallmatrix} \nearrow O \\ \searrow H \end{smallmatrix} \quad \text{oppure} \quad \text{II.} \quad (CH_3O)^3C_6H_2 \cdot \overset{\nearrow CH_3}{C} - H \atop \searrow C \begin{smallmatrix} \nearrow O \\ \searrow H \end{smallmatrix}$$

Da quanto verrà in seguito esposto per consimili composti derivanti dall'anetolo, isosafrolo e metilisoeugenolo per analogia si deve ammettere che il composto derivante dall'asarone abbia la costituzione rappresentata dallo schema I.

[1] Gaz. Chim. Ital. 1901, II. pag. 84.

Parte sperimentale.

L'asarone che ha servito alle nostre ricerche proveniva dalla casa Schimmel di Lipsia, e ci siamo assicurati della sua purezza coll'analisi.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{16}O_3$
C	69,23	69,17
H	7,91	7,76

Il prodotto fondeva fra 61°,5, e 62°,5, mentre l'asarone sintetico fonde a 61°.

Si fece reagire un peso molecolare d'asarone disciolto in benzolo con 2 pesi molecolari di acetato mercurico disciolti nella quantità sufficiente di acqua e precisamente gr. 50 di asarone disciolti in 80 cm.³ di benzolo si agitarono con gr. 153 di acetato mercurico disciolti in 612 cm.³ di acqua. Subito comincia il deposito di acetato mercuroso, che venne riconosciuto ai caratteri fisici e all'analisi.
gr. 0,6078 di sostanza dettero gr. 0,5436 di Hg S

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $HgC_2H_3O_2$
H	77,09	77,23

Si lasciò la miscela per un mese alla temperatura ordinaria, e durante questo tempo la massa aveva assunto una colorazione bruna.

Si estrasse ripetute volte l'intera massa con benzolo; indi distillato il solvente rimase un olio denso colorato in bruno, che sottoposto alla distillazione in corrente di vapore non separò asarone inalterato. Si sottomise allora il residuo fisso estratto con benzolo alla distillazione frazionata a pressione ridotta; passò per la massima parte a 15 mm a 184°, ed una porzione minore fra 184 e 190°, rimanendo nel palloncino una quantità non indifferente di sostanza peciosa nera. La porzione che distilla a 184° ascende all'incirca a gr. 10,5 e la porzione fra 184° e 190° a gr. 5,5. La prima porzione si concretò subito tutta in una massa cristallina, mentre la porzione 184°-190° cristallizzò in parte e rimase un olio denso, che anche per lungo riposo non accennò a cristallizzare. Si separò la parte oleosa dalla cristallina facendo assorbire la prima da mattonella porosa, e si verificò che i cristalli separati avevano le stesse proprietà della prima porzione. Si riunirono perciò insieme e dopo averli premuti fra fogli di carta da filtro per assorbire le ultime porzioni di sostanza oleosa, si rettificarono di nuovo nel vuoto. Alla pressione di 15 mm. distilla tutto a 184°, ed il distillato, leggermente colorato in giallo, si rappiglia in una massa cristallina.

All'analisi dette il seguente risultato:

I. gr. 0,2193 di sostanza secca nel vuoto sull'acido solforico dettero gr. 0,5153 di CO_2 e gr. 0,1451 di H_2O.

II. » 0,3584 di sostanza secca nel vuoto sull'acido solforico dettero » 0,2295 di CO_2 e gr. 0.2295 di H_2O.

Ossia in 100 parti:

	Trovato		Calcolato per $C_{12}H_{16}O_4$
	I.	II.	
C	63,87	64,20	64,23
H	7,61	7,17	7,20

La sostanza si differenzia dunque per un atomo di ossigeno dall'asarone, ed è quindi l'anidride del glicole. Essa cristallizza in aggregati lamellari solubili nell'alcool e nel benzolo, e da queste soluzioni è difficile ottenersi cristallizzata. Distilla alla pressione di 14 mm. a 184° e fonde fra 47° e 48°.

Semicarbazone. $(CH_3O)^3 : C_6H_2 \cdot C_2H_4 \cdot CH:N \cdot NH \cdot CO \cdot NH_2$. — Gr. 1 di sostanza vennero sciolti in alcool ed agitati con una soluzione acquosa di gr. 0,5 di cloridrato di semicarbazide e gr. 0,44 di acetato di potassio. Coll'agitazione si ottiene il semicarbazone sotto forma di un precipitato bianco cristallino, che, raccolto su filtro, lavato con acqua, si ricristallizza dall'alcool. Cristallizza in belle laminette splendenti che fondono a 157°-158°. All'analisi dette il seguente risultato:

gr. 0,1909 di sostanza dettero cm.^{3} 24,6 di N a 18° e 755 mm.

Per cento

Trovato	Calcolato per $C_{13}H_{19}O_4N_3$
14,80	14,97

Reazione Angeli-Rimini. Abbiamo applicato detta reazione nel modo seguente:

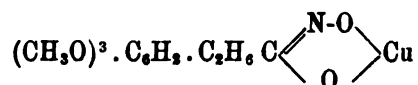
Gr. 1 di composto si sciolse in alcool, indi si aggiunsero cm.^{3} 9,2 di soluzione doppio normale di idrato potassico, ed alla soluzione limpida si addizionò a piccole porzioni gr. 1,54 di acido di Piloty in polvere, agitando e raffreddando. Si abbandonò il tutto alla temperatura ordinaria per 24 ore, indi, aggiunto altri cm.^{3} 4,8 della stessa soluzione alcalina, si distillò l'alcool a bagno maria. Si filtrò la soluzione acquosa diluita, indi alcune goccie si neutralizzarono esattamente con acido cloridrico diluito, e si ottenne col percloruro di ferro la colorazione violetta dell'acido idrossammico. Il rimanente della soluzione venne neutralizzato con acido acetico e trattato con un leggiero eccesso di soluzione satura a freddo di acetato ramico. Dapprima la massa rimane limpida, ma in seguito lentamente comincia a depositarsi un precipitato color verde bottiglia, che dopo tre o quattro giorni abbiamo raccolto su filtro, lavato con acqua e infine con alcool. Di questo precipitato se ne ottenne circa gr. 0,15, perchè è un po' solubile nell'acqua. La determinazione dell'azoto dette il seguente risultato:

Gr. 0,1434 di sostanza seccata nel vuoto su acido solforico dettero cm.^{3} 4 di N a 15° e 760 mm.

Per cento:

	Trovato
N	3, 34

L'analisi dimostra che il composto ramico non è completamente puro, oppure contiene acqua che non si elimina nel vuoto, perchè il composto

$$(CH_3O)^3 . C_6H_2 . C_2H_6 C \langle {}^{N-O}_{O} \rangle Cu$$

richiede N °/₀ 4,43.

Questo composto, come dicemmo, è un po' solubile nell'acqua e la soluzione si colora in violetto colla soluzione diluita di percloruro di ferro; nessun dubbio quindi che sia il sale ramico di un acido idrossammico.

La parte oleosa assorbita dalla mattonella porosa venne riestratta con etere in apparecchio Soxhlet, e colla distillazione dell'etere rimase un olio giallo, che alla distillazione a 15 mm. passò di nuovo alla temperatura di 184°-190. Si ottenne così gr. 2 circa di un liquido giallo chiaro, che non è più cristallizzato, e che all'analisi dette il seguente risultato:

gr. 0,3289 di sostanza dettero gr. 0,738 di CO_2 e gr. 0,2248 di H_2O

Ossia per cento: C 61,13 — H 7,66.

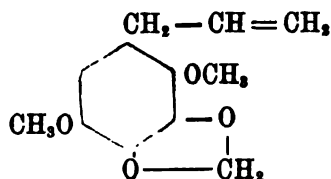
L'analisi dimostra che la sostanza è probabilmente una miscela di glicole $C_{12}H_{18}O_5$ pel quale si calcola C °/₀ 59,97 e H °/₀ 7,50 e di anidride $C_{12}H_{16}O_4$; ma la piccola quantità di sostanza non permise un'ulteriore purificazione.

VII.

Azione dell'acetato mercurico sull'apiolo ed isoapiolo.

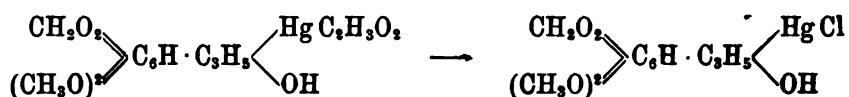
(di G. Mammola, V. Paolini ed L. Balbiano).

L'apiolo è il componente principale dell'essenza dei semi di prezzemolo, *Apium petroselinum*. La sua costituzione venne stabilita specialmente dai lavori di Ciamician e Silber [1] che dimostrarono essere questa sostanza un derivato pentasostituito del benzolo; le ultime ricerche di H. Toms [2] poi stabilirono definitivamente le posizioni dei gruppi sostituenti, ed il seguente schema ne rappresenta la costituzione.

```
         CH₂ — CH = CH₂
           /\
          |  | OCH₃
   CH₃O   |  | — O
           \/     |
           O ——— CH₂
```

(¹) Gazz. chim. 21, pag. 164,

(²) Berl. ber., t. 36, pag. 1714.

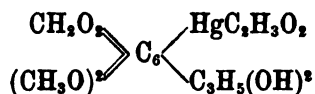
L'isapiolo, isomero scoperto da V. Gerichten [1] fin dal 1876 differenzia dall'apiolo per la struttura del gruppo C_3H_5 che *allile* nell'apiolo, diventa *propenile* nell'isapiolo. Per estendere lo studio della reazione dell'acetato mercurico esperimentammo l'azione della soluzione acquosa di questo reagente sulle due sostanze, e concordemente a quanto si verificò per gli altri composti allilici finora studiati, anche l'apiolo dà un derivato aceto-mercurico, dal quale si ottenne il cloro-derivato corrispondente.

$$\begin{matrix} CH_2O_2 \\ (CH_3O)^2 \end{matrix} > C_6H \cdot C_3H_5 < \begin{matrix} HgC_2H_3O_2 \\ OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} CH_2O_2 \\ (CH_3O)^2 \end{matrix} > C_6H \cdot C_3H_5 < \begin{matrix} HgCl \\ OH \end{matrix}$$

In questo caso non si poterono isolare due forme isomeriche del derivato aceto mercurico, nè il corrispondente cloro-derivato si potè scindere, per cui pare che si formi un solo ed unico composto. Il cloro-derivato idrogenato dà esclusivamente apiolo.

L'isoapiolo dà invece la reazione *idrossilante* e si riuscì ad isolare un glicole

$$\begin{matrix} CH_2O_2 \\ (CH_3O)^2 \end{matrix} > C_6H \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CH_3$$

cristallizzato e fusibile a 120°, che dà un derivato dibenzoilico fusibile a 149°-150°. L'estrazione di questo glicole presenta nel caso speciale qualche difficoltà, perchè l'unico atomo di idrogeno metinico di esso reagisce coll'acetato mercurico e dà un composto [2]

$$\begin{matrix} CH_2O_2 \\ (CH_3O)^2 \end{matrix} > C_6 < \begin{matrix} HgC_2H_3O_2 \\ C_3H_5(OH)^2 \end{matrix}$$

cristallizzato in laminette fusibili con decomposizione a 179° e che, essendo insolubile in acqua, resta mescolato coll'acetato mercuroso e mercurio per cui bisogna ricorrere all'idrogenazione della miscela per isolare il glicole.

Parte sperimentale.

L'apiolo adoperato ci fu fornito dalla Casa Schuchardt di Goerlitz: fondeva fra 30°-30°,5 e distillava a 288°, per cui si ritenne un buon prodotto commerciale, e si adoperò tal quale senza fargli subire alcuna depurazione.

(1) Berl. ber., t. 9, pag. 1477.

(2) Un'analisi fatta sopra un composto non completamente depurato od uno sbaglio di pesata ci fece valutare sull'unica analisi fatta, a 52,16 la percentuale di mercurio che corrispondeva approssimativamente al calcolato per la formula $C_{12}H_{16}O_6(HgC_2H_3O_2)_2$: in seguito si è ripreparato il composto e dalla determinazione del C,H,Hg, si è concluso che la composizione di esso corrisponde alla formula $C_{12}H_{15}O_6HgC_2H_3O_2$. (Vedi Rend. Ac. Lincei 1905, pag. 294 e Berl. ber. T. 36, 3575).

Una soluzione benzolica satura a freddo di apiolo e contenente la grammimolecola della sostanza venne agitata con una soluzione parimenti grammimolecolare di acetato mercurico. Subito si forma un precipitato grumoso bianco, che rimane fortemente attaccato alle pareti del recipiente; la reazione avviene completa in brevissimo tempo ed il composto formatosi non si altera per niente se viene conservato anche durante un mese sott'acqua. Si raccoglie il precipitato su filtro agevolando la filtrazione colla pompa ad acqua. Si lava con acqua, indi asciugatolo, si ricristallizza dall'alcool bollente.

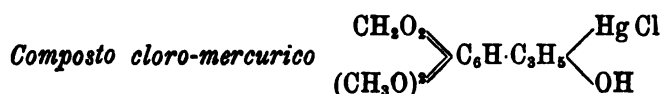
All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,4976 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,2327 di Hg S.
0,3112 » dettero gr. 0,3885 di CO_2 e gr. 0,1054 di H_2O.

Ossia in cento p.

	Trovato	Calc. per $\left.\begin{matrix}CH_2O_2\\(CH_3O)^2\end{matrix}\right>C_6H\text{-}C_3H_5\left<\begin{matrix}HgC_2H_3O_2\\OH\end{matrix}\right.$
Hg	40,30	40,16
C	34,04	33,73
H	3,76	3,61

Il composto aceto-mercurico dell'apiolo cristallizza dall'alcool in mammelloni duri, bianchi, formati da aghetti microscopici raggiati; quasi insolubile nell'acqua, poco solubile nell'alcool freddo, solubilissimo nell'alcool bollente. Fonde fra 114°-115° e col raffreddamento rimane allo stato di vetro trasparente.

Composto cloro-mercurico $\left.\begin{matrix}CH_2O_2\\(CH_3O)^2\end{matrix}\right>C_6H\cdot C_3H_5\left<\begin{matrix}Hg\,Cl\\OH\end{matrix}\right.$

Si ottenne al solito modo mettendo a reagire la soluzione alcoolica del composto aceto-mercurico colla quantità molecolare di cloruro di sodio. Cristallizza dall'alcool in piccoli aghetti bianchi, splendenti, soffici, quasi insolubili nell'acqua, poco solubili nell'alcool freddo, solubili nell'alcool bollente. Fonde a 157°-158° rammollendo a 155°.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,4632 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,2294 di Hg S.
Gr. 0,3476 » » 0,1049 AgCl.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{15}ClO_5Hg$
Hg	42,67	42,15
Cl	7,45	7,47

Dalle acque madri alcooliche non si riuscì a separare alcun altro isomero. L'idrogenazione con zinco ed idrato sodico dà apiolo riconosciuto alle costanti fisiche ed all'analisi.

Isapiolo.

L'isapiolo adoperato fu preparato coll'alcoolato sodico. Gr. 15 di apiolo mescolati con gr. 2 di alcoolato sodico commerciale vennero scaldati a bagno d'olio per

3 ore alla temperatura di 180°, e dopo raffreddamento si distillò il prodotto della reazione in corrente di vapore. L'olio distillato si concreta prontamente ed i cristalli formatisi si premono fra carta per separare una piccola quantità di un olio aderente, indi si ricristallizzano dall'alcool. Si ottenne gr. 10,5 di isapiolo cristalizzato in bei cristalli tabulari fusibili a 54°,5-55°,5.

L'azione dell'acetato mercurico si fece, dopo alcune esperienze d'orientamento, nel seguente modo:

La grammimolecola d'isapiolo, sciolta nella quantità necessaria di benzolo, si mescola colla soluzione acquosa satura di due grammimolecole di acetato mercurico. Coll'agitazione della massa, la reazione avviene subito e comincia a depositarsi l'acetato mercuroso ed il composto aceto-mercurico del glicole. Col tempo l'acetato mercuroso viene ridotto in parte a mercurio metallico, ed il depositato diventa grigio.

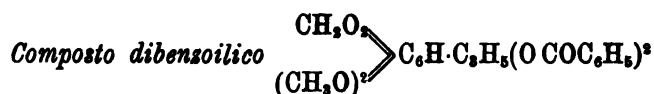
Dopo 21 giorni si lavora, estraendo ripetute volte l'intiera massa con etere. L'etere lavato dapprima con soluzione di carbonato sodico, lascia alla distillazione un residuo, che ricristallizzato dall'alcool, venne riconosciuto essere isapiolo inalterato, e la sua quantità rappresenta circa il terzo di quella sottoposta all'ossidazione. La melma cristallina venne filtrata, e la parte solida spappolata in liscivia di idrato sodico al 20 °/₀ ed addizionata di polvere e truccioli di zinco, riscaldando la miscela per 10 ore a bagno maria, dopo averla tenuta per un giorno a contatto alla temperatura ordinaria ed agitando frequentemente. Dopo si estrae ripetutamente con triplo volume di etere, che lascia alla distillazione un residuo solido cristallino alquanto colorato in giallo. La sostanza si depura cristallizzandola ripetute volte dall'alcool.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,2341 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,4782 di CO_2 e gr. 0,137H_2O ossia in cento parti:

	Trovato	Calc. per $\begin{matrix} CH_2O_2 \\ (CH_3O)^2 \end{matrix}\!\!>C_6H.CHOH.CHOH.CH_3$
C	55,71	56,25
H	6,50	6,50

Il nuovo glicole 1-o-m-diossimetil-p. m. ossimetilen-fenil-1-2-propandiolo cristallizza in begli aghetti soffici, alquanto solubili nell'acqua bollente, solubili nell'alcool caldo, poco nell'etere e nel benzolo. Fonde a 120°.

Composto dibenzoilico $\begin{matrix} CH_2O_2 \\ (CH_3O)^2 \end{matrix}\!\!>C_6H{\cdot}C_3H_5(O\,COC_6H_5)^2$

Si riscalda per 4-5 ore a 140° in tubo chiuso, una miscela di gr. 1 di glicole, gr. 1,8 di anidride benzoica e gr. 2,5 di benzoato sodico secco. Il prodotto della reazione viene trattato a blando calore con soluzione diluita di carbonato sodico, indi estratto con etere. Distillato il solvente rimane un residuo solido, che viene cristallizzato dall'alcool. Il composto dibenzoilico cristallizza in piccoli aghi bianchi che fondono a 149°-150°.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,1873 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero gr. 0,4595 di CO_2 e gr. 0,089 di H_2O. Ossia in 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{26}H_{24}O_8$
C	66,90	67,24
H	5,27	5,19

Composto mercurico. $C_{12}H_{15}O_6HgC_2H_3O_2$.

Gr. 0,5 di glicole sciolto in 50 a 60 cm.[3] di benzolo vengono agitati con una soluzione di acetato mercurico contenente gr. 1,24 di acetato. Le due sostanze messe a reagire sono nel rapporto di 1 p. molecolare di glicole per 2 p. molecolari di acetato.

Dopo 5 a 6 ore di contatto comincia a depositarsi sulle pareti del recipiente delle laminette bianche che vanno man mano aumentando col tempo. Si lascia reagire per 4 giorni, indi si decanta il benzolo, e si raccoglie la sostanza su filtro; lavata con acqua indi con benzolo ed infine disseccata nel vuoto su acido solforico dette all'analisi il seguente risultato:

Gr. 0,399 di sostanza dettero gr. 0,4722 di CO_2 e gr. 0,1224 di H_2O.
Gr. 0,285 di sostanza seccata a 100° dettero gr. 0,3402 di CO_2 e gr. 0,0896 di H_2O.
Gr. 0,2363 » gr. 0,109 di HgS.

Ossia in 100 parti:

	Trovato		Calcolato per $C_{12}H_{15}O_6HgC_2H_3O_2$
	I	II	
C	32,27	32,55	32,68
H	3,41	3,49	3,50
Hg	39,74		38,91

Cristallizza in laminette bianche splendenti formate da tavolette microscopiche sovrapposte, che riscaldate in tubicino di vetro a pareti sottili cominciano a rammollire a 170° e fondono con decomposizione a 179°-180°.

VIII.

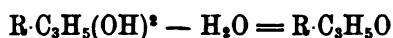
Aldeidi derivanti dalla disidratazione dei glicoli ottenuti coll'ossidazione dei composti propenilici.

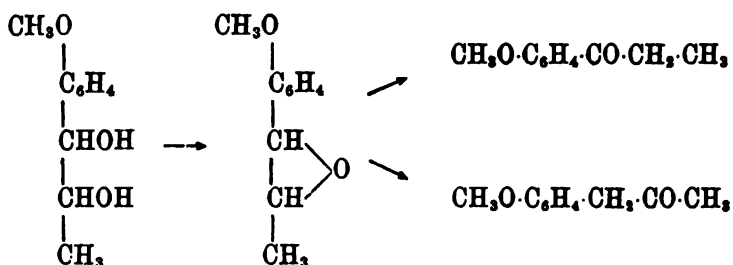
(L. Balbiano e V. Paolini).

È stato avvertito ripetutamente nel corso di questa Memoria, che nell'ossidazione mediante la soluzione acquosa di acetato mercurico dei composti contenenti il gruppo $-C_3H_5$ *propenilico* si ottengono i glicoli corrispondenti, che in condizioni speciali possono eliminare una molecola d'acqua e dare composti anidridici, nei quali bisogna ammettere la presenza del carbonilo :CO, perchè dànno semicarbazoni ed

ossime. In una ossidazione speciale dell'isafrolo si ottenne esclusivamente un composto di tal natura; nell'ossidazione del metil-isoeugenolo si riuscì a separare un semicarbazone che indica la contemporanea formazione di tale anidride, e nell'ossidazione dell'asarone fu il composto principale che si potè isolare allo stato puro. Come è stato detto nell'introduzione di questa Memoria si cercò di preparare tali composti carbonilici direttamente dai glicoli anche nei casi in cui non se n'era osservata la formazione nell'ossidazione, ed erano appunto questi casi, come ad es. l'anetolo, che avrebbero permesso di decifrare la struttura di detti composti. Si studiò l'azione di piccole quantità di disidratanti sui glicoli provenienti dall'ossidazione dell'anetolo, dell'isafrolo e del metil-isoeugenolo, e si riuscì ad ottenere i corrispondenti composti anidridici.

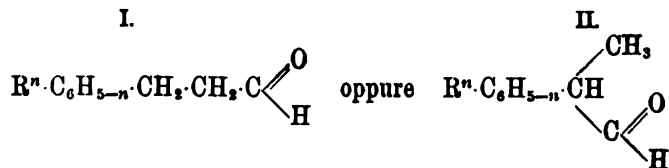
La reazione è generale e possiamo rappresentarla coll'equazione:

$$R{\cdot}C_3H_5(OH)^2 - H_2O = R{\cdot}C_3H_5O$$

La interpretazione più semplice per spiegare questa disidratazione è che si formi prima un composto ad ossido alchilico e che poi si trasformi nella forma desmotropica di chetone, come indicano i seguenti schemi prendendo come esempio il glicole derivante dall'anetolo:

$$\begin{array}{c} CH_3O \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ CHOH \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} CH_3O \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ CH\diagdown \\ |\quad\;\; {>}O \\ CH\diagup \\ | \\ CH_3 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \; CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CO{\cdot}CH_2{\cdot}CH_3 \\ \\ \searrow \; CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH_2{\cdot}CO{\cdot}CH_3 \end{array}$$

Questa supposizione non è stata comprovata dall'esperienza, la quale invece ha dimostrato, che i *composti carbonilici formatosi sono aldeidi*, perchè dànno la reazione Angeli-Rimini coll'acido solfin-idrossilaminico del Piloty che, come si sa, non reagisce coi chetoni, ma esclusivamente colle aldeidi.

Dimostrata la natura aldeidica dei composti di disidratazione si potè per esclusione stabilirne la costituzione.

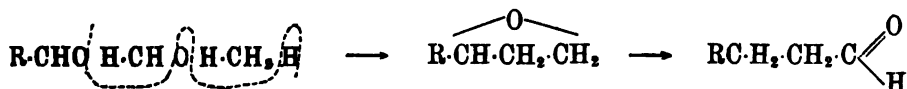
Teoricamente sono prevedibili solo due forme strutturali isomeriche di tali aldeidi:

$$\text{I.}\quad R^n{\cdot}C_6H_{5-n}{\cdot}CH_2{\cdot}CH_2{\cdot}C\begin{smallmatrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{smallmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad \text{II.}\quad R^n{\cdot}C_6H_{5-n}{\cdot}CH\begin{smallmatrix}\nearrow CH_3 \\ \searrow C\begin{smallmatrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{smallmatrix}\end{smallmatrix}$$

e la forma II si manifesta in tutta quella serie di aldeidi che il Bougault [1] preparò coll'ossidazione dell'anetolo ed analoghi a catena laterale propenilica, adoperando come

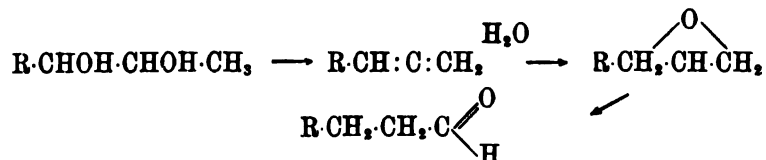
[1] Ann. du Chim. et Phy., serie VII, 25, 1902, 483.

ossidante l'ossido giallo di mercurio e iodio. Ora per i nostri composti, differenzianti nelle proprietà fisiche, nelle proprietà dei semicarbazoni ed ossime, nei prodotti di ossidazione, non rimane che rappresentarli collo schema I.

Il meccanismo dell'eliminazione dell'acqua si può allora spiegare basandosi sulle recenti esperienze di P. Höring [1] coi seguenti schemi:

$$R{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_2H \longrightarrow R{\cdot}\overset{\frown O \frown}{CH{\cdot}CH_2{\cdot}CH_2} \longrightarrow RC{\cdot}H_2{\cdot}CH_2{\cdot}C\begin{smallmatrix}{\nearrow O}\\{\searrow H}\end{smallmatrix}$$

oppure che prima si formi un radicale *diolefinico* che poi si idrolizza

$$R{\cdot}CHOH{\cdot}CHOH{\cdot}CH_3 \longrightarrow R{\cdot}CH{:}C{:}CH_2 \overset{H_2O}{\longrightarrow} R{\cdot}\overset{\frown O \frown}{CH_2{\cdot}CH{\cdot}CH_2}$$

$$\swarrow \quad R{\cdot}CH_2{\cdot}CH_2{\cdot}C\begin{smallmatrix}{\nearrow O}\\{\searrow H}\end{smallmatrix}$$

e si desmotropizza, come le esperienze di Zincke e Breuer [2] hanno dimostrato succedere per l'ossido di feniletilene che dà la fenil-acetaldeide.

Parte sperimentale.

Aldeide del glicole dell'anetolo

Gr. 4 di glicole perfettamente disseccato si addizionano di gr. 0,2 a 0,3 di cloruro di zinco, indi si riscaldano a bagno di glicerina, innalzando lentamente la temperatura. A 98° — 100° il glicole fonde, indi a 130° — 140° ha luogo l'eliminazione di acqua, e ciò spiega come non si sia potuto ottenere coll'isocianato di fenile il composto additivo. Si mantiene la sostanza a detta temperatura per mezz'ora, indi si lascia raffreddare. La sostanza oleosa colorata in giallo rosso che rimane, viene estratta con etere; la soluzione eterea filtrata e lavata con acido cloridrico diluito, indi con acqua, viene seccata con cloruro di calcio fuso, e poi distillato il solvente. Rimane un liquido oleoso che sottoposto alla distillazione a pressione ridotta passa fra 135° — 140° a 12 mm., lasciando indistillata una notevole quantità di sostanze peciose. Si ottiene all'incirca il 50 % del glicole, di prodotto distillato.

Rettificando nuovamente a pressione ridotta il prodotto della prima distillazione passa a 132°-135° a 10 mm.

All'analisi dette il seguente risulato:

I. Gr. 0,2251 di sostanza dettero gr. 0,5945 di CO_2 e gr. 0,1536 di H_2O
II. » 0,2363 » » » 0,6258 » » 0,1604 » »

In cento parti:

	Trovato I	Trovato II	Calcolato $C_{10}H_{12}O_2$
C	72,02	72,22	73,17
H	7,57	7.54	7,32

[1] Berl, ber., t. 38, 1905, pag. 2296.
[2] Berl. ber., t. 11, 1878, pag. 1402.

L'analisi dimostra che il nostro composto contiene ancora un po' di glicole che ne abbassa il percentuale di carbonio, tuttavia anche con lungo soggiorno la sostanza rimane sempre liquida.

L' 1-p-ossimetil-fenilen-3-propanal $CH_3O . C_6H_4 — CH_2 — CH_2 — C\begin{smallmatrix} \nearrow O \\ \searrow H \end{smallmatrix}$ è un liquido leggermente colorato in giallognolo, di un debole odore aromatico non soffocante, insolubile in acqua, solubile nell'alcool e nell'etere; distilla a 10 mm. fra 132-135°.

Semicarbazone. $CH_3O . C_6H_4 . CH_2 . CH_2 . CH : N . NH . CONH_2$. Gr. 0,5 di aldeide, sciolta in alcool, si addizionò di soluzione acquosa satura a freddo di gr. 0.3 di cloridrato di semicarbazide e gr. 0,3 di acetato potassico; agitando la miscela limpida si rapprende tosto in una massa cristallina, che dopo alcune ore si filtra, si lava con acqua, indi si asciuga e si secca nel vuoto sull'acido solforico. Si ottenne gr. 0,61 di semicarbazone mentre la teoria richiede gr. 0,67. Per l'analisi la sostanza si cristallizzò dall'alcool.

Analisi:

gr. 0,161 di sostanza dettero cm³ 26,8 di N a 19° e 760 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato $C_{11}H_{15}N_3O_2$
N	19,13	19,00

La sostanza cristallizza dall'alcool in belle laminette sovrapposte trasparenti e splendenti, insolubile nell'acqua, solubile in tutti i solventi organici. Fonde a 174° (corretto).

Prima di proseguire nella descrizione delle esperienze fatte su questa sostanza dobbiamo ricordare che abbiamo preparato l'isomero di questa aldeide, il 2.p.ossimetil-fenilen-3-propanal $CH_3O \cdot C_6H_4 \cdot CH \begin{smallmatrix} \nearrow CH_3 \\ \searrow C\begin{smallmatrix} \nearrow O \\ \searrow H \end{smallmatrix} \end{smallmatrix}$ — col metodo già indicato del Bougault, e di esso abbiamo preparato pel confronto il semicarbazone che il Bougault non aveva cercato di ottenere.

Le proprietà di questo isomero preparato nell'identico modo descritto e di cui abbiamo verificato la purezza coll'analisi (N % trov. 18,83 calc. 19,00) sono le seguenti:

Cristallizza dall'alcool in piccoli aghi bianchi opachi aggruppati a penna: insolubili nell'acqua, solubili in tutti i solventi organici. Fonde a 134° (corretto).

Come si vede le proprietà fisiche distinguono nettamente i due semicarbazoni isomeri.

Reazione Angeli-Rimini. — Si adoperarono gr. 2 di aldeide disciolta in alcool a 95 %, ed alla soluzione, resa alcalina fortemente con 19 cm³ di potassa doppio normale, si aggiunsero gr. 2,1 del composto idrossilaminico del Piloty polverizzato, agitando e raffreddando.

Dopo 24 ore di riposo alla temperatura ambiente si distillò e si diluì il residuo con acqua, con che si separò una piccola quantità di olio che venne estratto con poco etere, e riconosciuto, convertendolo in semicarbazone, per aldeide inalterata. Il semicarbazone cristallizza nelle laminette caratteristiche e fonde a 174°.

Piccola porzione della soluzione acquosa saturata con acido cloridrico diluito dà la colorazione violetta dell'acido carbammico col percloruro di ferro. Il restante della soluzione, saturato con acido acetico, si trattò con soluzione satura a freddo di acetato di rame: si ebbe precipitato fioccoso, che diventa pulverolento in seguito, il sale di rame di color verde bottiglia. Questo precipitato lavato con acqua, indi con un po' di alcool ed infine con etere venne analizzato col seguente risultato:

gr. 0,1548 di sostanza disseccata a 100° dettero gr. 0,0459 di CuO
» 0,1188 » » » cm³ 5,7 di N a 14° e 764 mm.

Ossia in cento parti:

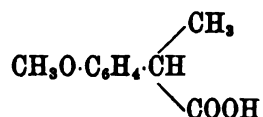
	Trovato	Calcolato per $CH_3OC_6H_4 - C_3H_4\langle^{NO}_{O}\rangle Cu$
Cu	23,77	24,77
N	5,66	5,46

La perdita in rame è causata dal fatto che il sale si decompone con deflagrazione, anche se viene riscaldato lentamente. Esso è un precipitato amorfo di color verde cromo, quasi insolubile nell'acqua, ma un po' solubile nell'alcool, specialmente a caldo; la soluzione alcoolica diventa lievemente opalescente colla diluizione con acqua, ed aggiungendo una goccia di soluzione di cloruro ferrico si ha la caratteristica colorazione violetta.

Ossidazione delle due aldeidi isomere.

L'ossidazione delle due aldeidi si fece alla temperatura ordinaria colla quantità stechiometrica di ossido di argento di recente precipitato e ben lavato, in presenza di idrato sodico, come prescrive il Bougault.

Dall'aldeide proveniente dall'anetolo ottenemmo l'acido p. metossiidratropico

$$CH_3O{\cdot}C_6H_4{\cdot}CH\begin{cases}CH_3\\COOH\end{cases}$$

con tutti i caratteri descritti dal Bougault, e la reazione si compie senza produzione di notevoli quantità di sostanze resinose, Invece l'aldeide proveniente dalla disidratazione del glicole nelle stesse ed identiche condizioni si resinifica quasi completamente e dà piccole quantità di acido anisico. Da gr. 1,64 di aldeide si riuscì a separare gr. 0,24 di acido anisico non completamente depurato perchè era cristallizzato in aghi, leggermente gialli, fusibili a 180°, e che all'analisi dettero, C p °/₀ 63,46, H p °/₀ 5,50, mentre il calcolato è, C p °/₀ 63,15, H = 5,26.

Aldeide del glicole dell'isafrolo.

Il glicole $CH^2O^2 - C_6H_3 - CHOH.CHOH.CH_3$ ottenuto nell'ossidazione acetomercurica dell'isafrolo, riscaldato per un'ora a 110° col decimo del suo peso di cloruro di zinco, elimina una molecola d'acqua e dà l'aldeide corrispondente. Si ripiglia con etere il prodotto greggio: la soluzione eterea si lava con acqua acidulata con acido cloridrico, indi si dissecca con cloruro di calcio fuso e si distilla il solvente. Rimane un liquido denso colorato in giallo rosso che si sottopone alla distillazione a pressione ridotta. Distilla fra 145°-150° alla pressione di 22 mm. e costituisce un liquido leggermente giallo, di odore aromatico penetrante, in tutto simile a quello del prodotto ottenuto direttamente dall'isafrolo.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,2278 di sostanza dettero gr. 0,5568 CO_2 e gr. 0,1214 H_2O.

In cento parti:

	Trovato	Calcolalo per $C_{10}H_{10}O_3$
C	66,65	67,41
H	5,92	5,61

Anche in questo caso il prodotto contiene ancora una piccola quantità di glicole, e la piccola quantità di sostanza che possediamo non permette una completa depurazione. La rendita in prodotto distillante fra 145-150° è all'incirca un terzo del glicole impiegato.

Ossima $CH_2O_2 = C_6H_3 - C_2H_4CH:N.OH$.

Si ottenne al solido modo colla soluzione alcolica dell'aldeide, cloridrato di idrossilamina ed acetato sodico. Cristallizza in aghi prismatici che fondono a 89° ed è identica a quella ottenuta dall'aldeide preparata direttamente dall'isafrolo.

Analisi:

gr. 0,1958 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero cm.³ 11,8 di N a 13° e 760 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{11}NO_3$
N	7,12	7,25

Semicarbazone. $CH_2O_2:C_6H_3 \cdot C_2H_4CH:N \cdot NHCONH_2$.

Preparato nel modo già descritto. Cristallizza in belle laminette bianche del tutto identiche a quelle ottenute dall'aldeide preparata direttamente dall'isafrolo. Fonde a 158°.

Analisi:

Gr. 0,1747 di sostanza secca nel vuoto su acido solforico dettero cc. 26,6 N a 13°, 754 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{13}O_3N_3$
N	17,84	17,87

Reazione Angeli-Rimini.

Gr. 1 di aldeide, si tratta nel modo descritto per l'aldeide dell'anetolo, col composto del Piloty, e dopo distillazione dell'alcool si ottiene una soluzione acquosa alcalina che, neutralizzata con acido cloridrico diluito, dà col percloruro di ferro la colorazione violetta dell'acido idrossammico, e dopo neutralizzazione dell'intiera soluzione con acido acetico, la soluzione acquosa satura a freddo di acetato di rame dà un precipitato verde azzurrognolo, che lavato con acqua, alcool ed etere e disseccato nel vuoto sull'acido solforico dette all'analisi il seguente risultato:

Gr. 0,2037 di sostanza dettero cc. 8,5 di N a 15° e 754 mm.

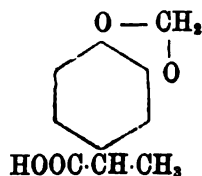
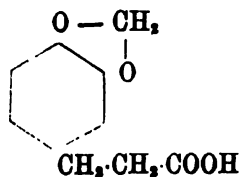
In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $CH_2O_2C_6H_3C_2H_4C{\langle}^{NO}_{O}{\rangle}Cu$
N	4,90	5,17

Si tentò di dosare il rame colla stessa combustione, ma la sostanza deflagra, anche se riscaldata lentamente.

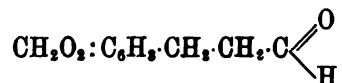
Così rimane dimostrato che l'anidride ottenuta è un'aldeide, e quest'aldeide è isomera a quella ottenuta dal Bougault per ossidazione dell'isafrolo coll'ossido giallo di mercurio e iodio. Infatti l'ossima dell'aldeide del Bougault fonde a 71° mentre la nostra fonde a 89°; inoltre si differenziano nettamente all'ossidazione coll'ossido di argento ed idrato alcalino.

Mentre l'aldeide del Bougault dà l'acido metilen-3.4 diossiidratropico

$O - CH_2$
O
$HOOC{\cdot}CH{\cdot}CH_3$

la nostra aldeide si resinifica in massima parte e si riesce solo ad ottenere piccole quantità di acido (da 1 gr. di aldeide circa gr. 0,01) piperonilico impuro che fondeva fra 220° e 225°. Tentativi di ossidazione con permanganato potassico, adoperandone quantità stechiometriche per riuscire all'acido ossimetilenidrocaffeico di Lorens [1]

[1] Berl. ber., t. 13, 758.

riuscirono infruttuosi: una parte dell'aldeide si resinifica, il resto rimanova inalterato; così pure adoperando come ossidante il misto cromico, si ha lo stesso risultato.

Tentammo di provare la costituzione della nostra aldeide idrogenando la piperonilacroleina $CH_2O_2:C_6H_3\cdot CH:CH\cdot CHO$, ottenuta da Ladenburg e Scholtz [1] condensando il piperonalio coll'aldeide acetica in presenza di idrato sodico, ma anche in questo caso i numerosi tentativi fatti, sia addizionando bromo od acido bromidrico alla piperonilacroleina od al suo semicarbazone e poi idrogenando, fallirono completamente allo scopo; ciònullameno noi assegniamo a quest'aldeide isomera di quella del Bougault lo schema:

$$CH_2O_2:C_6H_3\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{matrix}$$

basandoci sui dati sperimentali seguenti:

1°. Che la sostanza è isomera di quella del Bougault perchè l'ossima è differente.

2°. Che la sostanza è un'aldeide perchè dà la reazione *Angeli-Rimini.*

3°. Che l'isomeria sta nella struttura del gruppo C_3H_5O perchè all'ossidazione abbiamo ottenuto una piccola quantità di acido piperonilico.

Aldeide dal glicole del metil-iso-eugenolo.

Si adoperò soltanto il glicole fondente a 120°-121°. Gr. 5 di detto glicole vennero riscaldati per 4 ore a 150-160° con circa gr. 0,5 di cloruro di zinco. La massa fonde, si colora in bruno e si elimina acqua. Col raffreddamento rimane uno sciroppo vischioso che viene estratto con etere; la soluzione eterea lavata con acqua acidulata con acido cloridrico, indi seccata con cloruro di calcio fuso, lascia, colla distillazione del solvente, un liquido oleoso colorato in rosso-bruno, che distillato a pressione ridotta, passa in massima parte a 145°-149° a 6 mm. Si ottiene così un distillato che rappresenta all'incirca un terzo del glicole adoperato, e che rettificato distilla a 146-147° a 6 mm.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,2428 sostanza dettero gr. 0,601 CO_2 e gr. 0,1571 H_2O

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{14}O_3$
C	67,54	68,04
H	7,18	7,21

Il nuovo composto è un liquido oleoso leggermente colorato in giallo, di odore debolmente aromatico; solubile in alcool ed etere, insolubile in acqua e negli eteri di petrolio leggeri (60-70°). Raffreddato a -15° si mantiene liquido ed anche conservato per più mesi non accenna a cristallizzare.

La sostanza è un'aldeide, perchè dà il semicarbazone, l'ossima, e la reazione Angeli-Rimini.

[1] Berl. ber., t. 27, 2958.

Semicarbazone $(CH_3O)_2 \cdot C_6H_3 \cdot C_2H_4 \cdot CH:N \cdot NH \cdot CO \cdot NH_2$.

Si prepara nel solido modo. Cristallizza dall'alcool in piccoli aghetti bianchi setacei che fondono a 176°-177° e sono identici al semicarbazone del prodotto ottenuto nell'ossidazione diretta del metilisoeugenolo.

Analisi:

Gr. 0,1571 sostanza secca nel vuoto dettero cm^3 22,2 N a 13° e 771 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{17}N_3O_3$
N	16,92	16,73

Ossima $(CH_3O)^2 \cdot C_6H_3\ C_2H_4 \cdot CH \cdot N \cdot OH$.

Si preparò col solito metodo: soluzione nell'alcool metilico dell'aldeide, un leggero eccesso di cloridrato d'idrossilamina e la quantità corrispondente di carbonato sodico. La soluzione limpida si riscaldò per un'ora a ricadere, indi si distillò l'alcool, e si riprese con acqua. Rimase indisciolto uno sciroppo denso che si estrasse con etere. Svaporato il solvente si ottenne un liquido sciropposo, che per lungo soggiorno in essicatore non presentò traccie di cristallizzazione. Si sciolse in miscela di etere ed eteri petrolici (60-70°) e si lasciò evaporare lentamente, ma si ottenne sempre liquido sciropposo. Distilla alla pressione di 3 mm. verso 180°.

All'analisi dette il seguente risultato:

gr. 0,2514 sostanza dettero cm^3 13,8 N a 14° e 764 mm.

Per cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{15}N.O_3$
N	6,49	6,71

Questa sostanza, che la determinazione dell'azoto dimostra sufficientemente pura, si conservò liquida per più mesi, poi cominciò a cristallizzare e si rapprese in una massa di laminette sovrapposte, trasparenti. Ridisciolte in alcool e concentrata la soluzione, rimase liquida, fino a che non si seminò un cristallino; allora si rapprese in una massa di laminette raggiate. Fonde a 62°5-63° (termometro di Auschutz). È insolubile nell'acqua, solubile nell'etere e nell'acool.

Reazione Angeli-Rimini.

Gr. 1 di aldeide si sciolse in poco alcool concentrato ed alla soluzione si aggiunsero cm.³ 8 di soluzione doppio normale di idrato potassico, indi, agitando e raffreddando, gr. 0,81 di composto idrossilaminico di Piloty. Dopo mezz'ora si distillò l'alcool a bagno-maria, si filtrò la soluzione diluita da un po' di sostanza resinosa formatasi e si neutralizzò una piccola porzione della soluzione con acido cloridrico diluito; essa dette col percloruro di ferro un'intensa colorazione rosso-viola caratteristica dell'acido idrossammico. Il resto della soluzione, neutralizzato con acido acetico, dette colla soluzione acquosa satura a freddo di acetato ramico, un precipitato fioc-

coso di color verde-bottiglia, che raccolto su filtro, lavato con acqua, indi con alcool ed infine con etere dette all'analisi, dopo disseccamento a 100° nella stufa ad acqua, il seguente risultato:

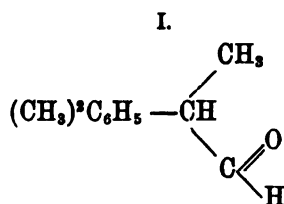
gr. 0,1569 sostanza lasciarono alla calcinazione gr. 0,0432 di CuO.

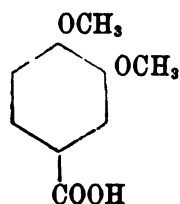
Per cento parti:

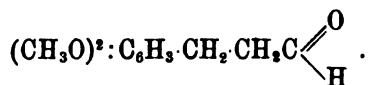
	Trovato	Calcolato per $(CH_3O)^2:C_6H_3.C_2H_4\langle\!\begin{smallmatrix}NO\\O\end{smallmatrix}\!\rangle Cu$
Cu	21,99	22,17

La formazione del sale ramico dell'acido idrossammico ci dimostra che il nostro composto è un'aldeide isomera con quella ottenuta da Bougault per ossidazione del metil-iso-eugenolo coll'ossido giallo di mercurio e iodio. La costituzione dell'aldeide di Bougault è rappresentata dallo schema

I.

$$(CH_3)^2C_6H_5-CH\begin{cases}CH_3\\C\langle\begin{smallmatrix}O\\H\end{smallmatrix}\end{cases}$$

perchè all'ossidazione dà l'acido dimetossi-3-4-idratropico. L'isomeria è stabilita dalle differenze di proprietà fisiche: l'aldeide di Bougault è cristallizzata, fonde a 44° e la sua ossima fonde a 77°. La nostra aldeide distilla a 6 mm. fra 146°-147°, è liquida e dà un'ossima cristallizzata che fonde a 62,5°-63°. All'ossidazione colla quantità stechiometrica di ossido di argento ed idrato sodico si resinifica per la massima parte e si riesce solo ad ottenere traccie (da 1 gr. di aldeide circa gr. 0,02) di un acido cristallizzato che fonde a 178° e che presenta quindi i caratteri dell'acido veratrico.

$$C_6H_3(OCH_3)(OCH_3)COOH$$

il che dimostra che l'isomeria delle due aldeidi è dovuta alla costituzione del C_2H_4 del radicale aldeidico e mentre per quella del Bougault è stabilito lo schema I, per la nostra rimane, per esclusione, lo schema:

$$(CH_3O)^2:C_6H_3\cdot CH_2\cdot CH_2C\langle\begin{smallmatrix}O\\H\end{smallmatrix} .$$

IX.

Azione dell'acetato mercurico sul pinene e canfene.

(V. Paolini, G. Vespignani e L. Balbiano).

I.

s-Pinene.

Il s-pinene adoperato proviene da un'essenza di trementina veneta, ha $d.^{15°} = 0,856$, distilla fra 155°-156° ed ha il potere rotatorio specifico $[\alpha]_D = -40°,71$.

Se si agita una goccia di pinene con una soluzione di acetato mercurico, dopo alcuni minuti comincia a separarsi l'acetato mercuroso e quindi ha luogo la reazione ossidante. Dopo alcuni saggi sulle quantità rispettive di pinene ed acetato mercurico da adoperarsi perchè tutto il pinene venisse trasformato, ci attenemmo alle seguenti: 1 peso molecolare di pinene si fece reagire con 3 p. molec. di acetato mercurico quindi per 25 gr. di pinene si adoperò gr. 174,5 di acetato mercurico sciolti in circa 700 cm^3 di acqua. L'acetato mercuroso, che subito si precipita, diventa dopo un giorno grigiastro per riduzione a mercurio. Si lasciò reagire per 10 a 15 giorni, indi l'intera massa venne distillata in corrente di vapore, operazione che si può anche omettere, perchè tutto il pinene è ossidato colla quantità suindicata di acetato mercurico. Si concentra quindi a blando calore la massa ed il magma residuo viene estratto ripetutamente con etere; l'etere lavato con soluzione di carbonato sodico fino a reazione alcalina, quindi con acqua e disseccato con cloruro di calcio fuso ed infine distillato, lascia, come residuo, un liquido denso, colorato in rosso-bruno, che viene sottoposto alla distillazione a pressione ridotta. Distilla in massima parte a 145° alla pressione di 5 mm. Il distillato rappresenta all'incirca il 70 % del pinene adoperato.

All'analisi dette il seguente risultato:

I.	Gr. 0,2487	sostanza	dettero	gr. 0,6488	CO_2	e gr. 0,2155	H_2O
II.	» 0,231	»	»	» 0,602	»	» 0,2016	»
III.	» 0,229	»	»	» 0,5995	»	» 0,1972	»

Ossia in cento parti:

	Trovato			Calcolato per $C_{10}H_{16}O_2$
	I.	II.	III.	
C	71,12	71,03	71,39	71,43
H	9,62	9,69	9,56	9,52

La determinazione crioscopica del peso molecolare, adoperando come solvente il benzolo, dette il seguente risultato:

Concentrazione	Abbass. temp.	Peso molecolare Trovato	Peso molecolare Calcolato
1,153	0°,33	174	168

Questo composto che, come vedrassi in seguito, è il Δ^{6}(6)ossimenten(2)one, cioè il derivato idrossilato del Δ^{6}menten[2]one che C. Harries (1) ottenne per riduzione dell'idrobromo-carvone, è un liquido di consistenza sciropposa, colorato appena in giallognolo, di odore forte piccante che ricorda quello della canfora e dei terpeni; otticamente inattivo in soluzione benzolica. È un po' solubile nell'acqua, solubilissimo in alcool, etere, benzolo. Bolle alla pressione di 5 mm. a 145°, a 20 mm. a 170°. Peso specifico a 0° riferito all'acqua alla stessa temperatura = 1,069.

Ossima — $C_{10}H_{16}O{\cdot}N\,OH$.

Si preparò col solito metodo adoperando per un peso molecolare di sostanza 2 p. m. di cloridrato d'idrossilamina. Cristallizza dall'alcool in belle laminette splendenti, fusibili a 138°,5 (termom. di Anschutz).

L'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,208 sostanza secca a 100° dettero gr. 0,4966 CO_2 e gr. 0,1743 H_2O.
» 0,1962 dettero cm³. 12,6 N a 13° e 750 mm.
» 0,1482 dettero cm³. 10 N a 13° e 748 mm.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{16}O{:}N.OH$
C	65,10	65,57
H	9,30	9,28
N	7,43 — 7,82	7,65

Semicarbazone $C_{10}H_{16}O{:}N{\cdot}NH{\cdot}CO{\cdot}NH_2$.

Ottenuto adoperando 1 peso molecolare di sostanza e 2 p. molec. di cloridrato di semicarbazide. Cristallizza dall'alcol in begli aghi bianchi aggruppati a ciuffo fusibili a 175°-176° (termom. di Anschutz).

L'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,2138 sostanza secca a 100° dettero gr. 0,4599 CO_2 e gr. 0,1644 H_2O.
» 0,1836 » dettero cm³. 28,2 N a 12° e 762 mm. (2).

ossia in cento p.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{19}N_3O_2$
C	58,78	58,66
H	8,54	8,44
N	18,28	18,66

Colla preparazione di questi due derivati rimane stabilito che un atomo di ossigeno della nuova sostanza è sotto forma di carbonilo. Rimane a definire se il carbonilo è aldeidico o chetonico e siccome il composto non colora l'acido fucsinsolforoso, non si ossida coll'ossido di argento in presenza di alcali, non riduce il liquido di Fehling

(1) Berl. ber. 1901, T 34-1924.
(2) Berl. ber. 1901, t. 34, pag. 1924.

e solo con prolungata ebollizione la soluzione alcalina di argento, non dà la reazione idrossammica di Angeli-Rimini, così debbiamo concludere che il carbonilo è chetonico.

Rimane ora a stabilire la funzione dell'altro atomo di ossigeno. Esso è contenuto nella molecola sotto forma di ossidrile, perchè coll'isocianato di fenile dà il composto di addizione caratteristico.

Azione dell'isocianato di fenile.

Si sciolgono gr. 5 di sostanza in 15 cm³ di benzolo secco e si aggiunge alla soluzione un eccesso di isocianato di fenile (gr. 5) indi si salda alla lampada il tubo. Già alla temperatura ordinaria comincia la reazione, perchè dopo 7 od 8 ore si deposita sulle pareti del tubo una sostanza cristallina formata da prismi aciculari riuniti a rosetta. Si completa la reazione riscaldando per qualche ora (2 a 3) a 140° 150°. Si apre il tubo, senza notare pressione interna ed il contenuto si tratta con etere di petrolio, precipitando con ciò tutto il prodotto di addizione, che ricristallizzato dal benzolo e dall'alcool viene analizzato.

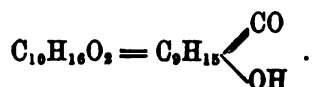
Gr. 0,2061 di sostanza secca a 100° dettero gr. 0,5352 CO_2 e gr. 0,1358 H_2O.
» 0,2262 » dettero cm³. 9,8 N a 13° e 750 mm.

ossia in 100 p.

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{16}O.O.C(:O)NHC_6H_5 = C_{17}H_{21}O_3N$
C	70,82	71,07
H	7,32	7,31
N	5,05	4,87

Il composto idrossammico cristallizza in cristalli bianchi formati da aghi splendenti riuniti a rosetta, insolubili in acqua; fonde a 125° (termom. Anschutz).

Così rimane dimostrata la funzione dei due atomi di ossigeno nel composto

$$C_{10}H_{16}O_2 = C_9H_{15}\begin{cases} CO \\ OH \end{cases}.$$

Ossidazione con permanganato potassico.

Dopo vari tentativi fatti con ossidanti diversi, acido cromico, misto cromico, permanganato in soluzione alcalina od acida, ci attenemmo al seguente procedimento.

Si sospese in acqua 1 p. molecolare di sostanza, indi si acidulò con acido solforico adoperando la quantità stechiometrica di acido corrispondente al permanganato e, tenendo raffreddata con corrente di acqua la massa agitata con agitatore meccanico, si fece sgocciolare una soluzione al 3-5 °/₀ di permanganato in quantità da produrre 3 p. atomici di ossigeno. L'ossidazione è pronta, adoperando circa gr. 15 di sostanza l'operazione richiede dalle 3 alle 4 ore. Il liquido, che odora fortemente di acetone, viene estratto ripetutamente con etere; la soluzione eterea distillata lascia

come residuo uno sciroppo denso colorato in giallo-bruno. Sottoposto alla distillazione a pressione ridotta, distilla in massima parte fra 225°-230° alla pressione di 15 mm. e tosto si rappiglia in una massa cristallina dura, ancora colorata in giallognolo da piccola quantità di resina. Rimane nel matraccio una notevole quantità di sostanze peciose non distillabili. La massa cristallina dura, viene separata da un po' di sostanza sciropposa che vi aderisce, mediante assorbimento su mattonella porosa. Si ripiglia in seguito con acqua calda, si filtra la soluzione da un po' di resina, e si salifica con carbonato di calcio puro e di recente precipitato.

Colla concentrazione a sciroppo della soluzione e successivo raffreddamento si ottiene il sale di calcio cristallizzato. Si può pure precipitare la soluzione acquosa concentrata con alcool assoluto ed etere, ed ottenere il sale cristallizzato in piccoli aghetti bianchi anidri.

All'analisi dette il seguente risultato:

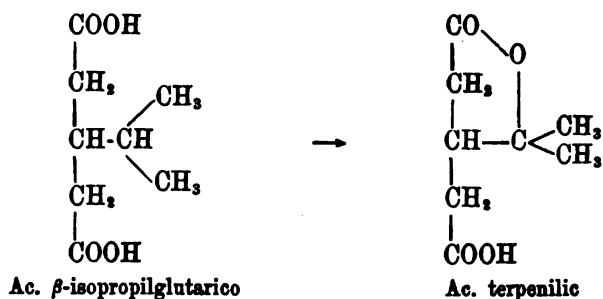
Gr. 0,3518 di sale seccato a 100° dettero alla calcinazione gr. 0,0522 di CaO.
» 0,3424 » » » » 0,0447 »

Per cento:

	Trovato I.	Trovato II.	Calcolato per $(C_8H_{11}O_4)^2Ca$
Ca	10,60	10,53	10,44

L'acido rimesso in libertà dal sale di calcio cristallizza dall'acqua in begli aghi prismatici bianchi, trasparenti, che essiccati all'aria fondono a 59°; invece essiccati sull'acido solforico fondono a 89°: queste proprietà coincidono con quelle dell'acido terpenilico che W. Trevor Lawrence [1] ottenne per sintesi ossidando col misto cromico l'acido β-isopropilglutarico.

$$\begin{array}{l} COOH \\ | \\ CH_2 \quad CH_3 \\ | \quad / \\ CH\text{-}CH \\ | \quad \backslash \\ CH_2 \quad CH_3 \\ | \\ COOH \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} CO\diagdown \\ | \quad O \\ CH_2 \quad | \\ | \quad | \\ CH\text{—}C{<}^{CH_3}_{CH_3} \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOH \end{array}$$

Ac. β-isopropilglutarico — Ac. terpenilic

e l'analisi confermò l'identità.

gr. 0,1824 di sostanza secca nel vuoto dettero gr. 0,3718 CO_2 e gr. 0,1144 H_2O.
» 0,2018 » » » 0,4105 » » 0,1300 »

Ossia in cento parti:

	Trovato I.	Trovato II.	Calcolato per $C_8H_{12}O_4$
C	55,59	55,45	55,81
H	6,98	7,15	6,98

[1] Prooc. Chem. Soc. 15-104-5.

Per confermare sempre più che l'acido in questione sia veramente il terpenilico, se ne preparò il caratteristico sale baritico dell'acido diaterpenilico $C_8H_{12}O_6Ba,2H_2O$. Gr. 1 di acido terpenilico sciolto in poca acqua si neutralizza esattamente, servendosi come indice della fenolftaleina, con acqua di barite, indi si aggiunge un volume eguale a quello adoperato per la saturazione della stessa acqua di barite e si fa bollire a ricadere fino a scolorimento; si lascia svaporare in essicatore la soluzione e si ottiene cristallizzato il sale in bei prismi splendenti.

All'analisi dette il seguente risultato:

gr. 0,2942 di sale secco all'aria perdettero a 160-170° gr. 0,298 H_2O.
» 0,2298 di sale secco all'aria dettero gr. 0,1473 $BaSO_4$

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_8H_{12}O_6Ba,2H_2O$
H_2O	10,13	9,96
Ba	37,72	38,01

La quantità di acido terpenilico che si ottiene coll'ossidazione permanganica ascende al 40 °/₀ della sostanza impiegata.

Il corpo $C_{10}H_{16}O_2$ è un composto non saturo perchè assorbe il bromo. La esperienza si fece anche coll'ossima, senza arrivare a poter isolare il prodotto di addizione in uno stato analizzabile. Se alla grammimolecola del composto sciolta in cloroformio, si aggiunge goccia a goccia una soluzione cloroformica di bromo, si ottiene scoloramento, senza formazione di acido bromidrico, fino a che la quantità di bromo corrisponde ad una molecola. Dalla soluzione cloroformica non si può estrarre nulla di definito e di analizzabile. Lo stesso andamento ha l'azione del bromo sull'ossima.

Anche in queste condizioni la soluzione cloroformica della grammo-molecola dell'ossima assorbe una grammo-molecola di bromo, e coll'evaporazione del solvente si ottiene un residuo vischioso che col calore sviluppa acido bromidrico.

Azione dell'acido solforico diluito.

Il diossipinene bollito con acido solforico diluito si trasforma quasi integralmente in carvacrolo.

Gr. 6 di sostanza si fanno bollire a ricadere per mezz'ora con 100 cm.³ di soluzione acquosa di acido solforico al 20 °/₀, indi la massa si distilla in corrente di vapore, col quale passa il carvacrolo formatosi. Rimane come residuo una piccolissima quantità di resina. Il carvacrolo distillato si estrae con etere, la soluzione eterea disseccata con cloruro di calcio fuso, indi, distillato il solvente, rimangono come residuo gr. 5 di carvacrolo, che distillato passa alla temperatura di 239° (termom. Anschutz).

L'analisi dà il seguente risultato:

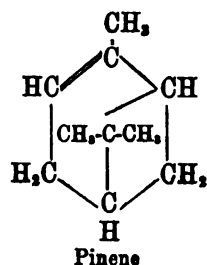
Gr. 0,2408 di sostanza dettero gr. 0,7041 CO_2 e gr. 0,2021 H_2O.

Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{14}O$
C	79,79	80,00
H	9,32	9,33

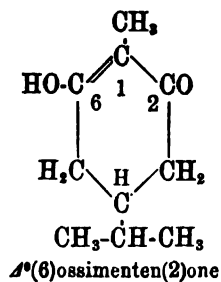
Il carvacrolo venne caratterizzato dalla colorazione verde che assume la sua soluzione alcoolica col percloruro di ferro: dal peso specifico $d^{15°} = 0,980$, dall'indice di rifrazione $n_D^{14°} = 1,5225$ e finalmente si preparò di confronto con un campione di carvacrolo proveniente dalla fabbrica di Kahlbaum di Berlino, che distillava a 232°-233° (temperatura non corretta) il benzoil-derivato col metodo di Baumann. Questi eteri benzoilici si presentano tutti e due liquidi oleosi che distillano alla pressione di 32 mm. fra 212° e 214°.

Il diossipinene $C_{10}H_{16}O_2$ contiene adunque un CO chetonico, un O ossidrilico, è un composto a lacuna perchè assorbe bromo, dà all'ossidazione permanganica acido terpenilico, si trasforma facilmente ed integralmente con eliminazione di una molecola di acqua in carvacrol e deriva per idrolizzazione del pinene pel quale Wagner e Bæyer stabilirono lo schema:

```
          CH3
           C
    HC  //   \  CH
     |  CH3-C-CH3 |
    H2C    |    CH2
       \   C   /
           H
```

Pinene

Tutte queste reazioni e trasformazioni portano, come venne detto nell'introduzione, a stabilire che il composto $C_{10}H_{16}O_2$ è il $\Delta^6(6)$menten(2)one rappresentato dallo schema

```
          CH3
           C
   HO-C // 1  \ CO
      | 6     2 |
     H2C   H   CH2
        \  C  /
      CH3-CH-CH3
```

$\Delta^6(6)$ossimenten(2)one

d- Pinene.

Abbiamo fatto le stesse esperienze col *d*-pinene, che abbiamo estratto da una essenza di trementina russa la quale originalmente aveva il potere rotativo specifico

a 15° $[\alpha]_D = + 14°,65$ e che lavorata secondo il metodo di Flawitzky [1] elevò il potere rotatorio fino a $[\alpha]_D = + 17°,05$. Era quindi una mescolanza di *d* e s-pinene. Da esso procedendo nello stesso modo descritto si ottenne un Δ^6-(6)-menten-(2)-one inattivo, che presenta le identiche proprietà di quello ottenuto dal s-pinene, e l'identità dei due composti venne pure comprovata col semicarbazone, e dal carvacrolo che si ottiene per disidratazione con acido solforico al 20 %. Omettiamo per brevità di descrivere dettagliatamente le esperienze che condussero ai suddetti risultati.

Canfene.

Il canfene adoperato proveniva dalla casa Schimmel di Lipsia, distillava fra 155°-156° e fondeva a 51°.

Un primo tentativo di reazione venne fatto adoperando canfene ed acetato mercurico nei rapporti dei loro pesi molecolari, ma avendo osservato che non tutto il canfene prendeva parte alla reazione, si aumentò la quantità di acetato mercurico e l'esperienza dimostrò che tutto il canfene entrava in reazione quando si adoperava per un peso molecolare di esso, 2 pesi molecolari di acetato mercurico. Gr. 25 di canfene sciolti a freddo in 40-50 cm.^{3} di etere di petrolio (40-50°) si agitarono con gr. 116 di acetato mercurico sciolti in 464 cm.^{3} di acqua. Appena fatta la mescolanza e dibattuta, incomincia la reazione indicata coll'ingiallimento del liquido e deposito sulle pareti di goccioline resinose che vanno raccogliendosi sul fondo e che a poco a poco induriscono cristallizzando. Si lasciò reagire alla temperatura ordinaria per 30 giorni, durante il qual tempo tutta la massa resinosa era diventata dura e cristallina. Si decantò la parte petrolica che alla distillazione lasciò appena traccia di residuo; si raccolse il precipitato su filtro, si lavò con acqua, e dopo averlo asciugato si lasciò digerire ripetutamente con eteri di petrolio; indi si seccò all'aria.

All'analisi dette il seguente risultato:

gr. 0,7988 di sostanza secca nel vuoto su ac. solforico dettero gr. 0,5333 HgS.
» 0,5341 id. id. dettero gr. 0,4905 di CO_2 e » 0,1606 H_2O.

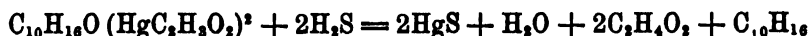
Ossia in cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{16}O(HgC_2H_3O_2)^2$
Hg	59,81	59,70
C	25,03	25,07
H	3,33	3,28

Questo composto canfen-aceto-mercurico cristallizza in belle laminette microscopiche bianche splendenti, inodore, quasi insolubili nell'acqua e nell'alcool. Fonde a 188°-189°.

Da gr. 25 di canfene se ne ottenero gr. 110, mentre la teoria richiedeva gr. 123.

Il composto aceto-mercurico sospeso in acqua acidulata con HCl e decomposto con gas solfidrico ridà canfene secondo l'equazione:

$$C_{10}H_{16}O\,(HgC_2H_3O_2)^2 + 2H_2S = 2HgS + H_2O + 2C_2H_4O_2 + C_{10}H_{16}$$

canfene che venne caratterizzato al p. f. 51° ed al punto di ebollizione 155°-156°.

[1] Berl. Ber., T. 20, 1887, 1956.

Composto cloro-mercurico $C_{10}H_{16}O(HgCl)^2$.

Gr. 10 di composto aceto-mercurico si sospesero in gr. 250 di alcool a 95 °/₀, si addizionarono in seguito di gr. 1,75 di cloruro di sodio sciolto in 250 cm³ di acqua e si fece bollire il tutto a ricadere per 4 o 5 ore. La sostanza non si discioglie, ma modifica notevolmente il suo aspetto diventando più soffice e leggera. Si lascia raffreddare, si raccoglie su filtro, si lava con acqua, si asciuga fra carta e si dissecca nel vuoto sull'acido solforico.

All'analisi dette il seguente risultato:

Gr. 0,8104 sostanza dettero gr. 0,6052 HgS
» 0,4698 » » gr. 0,2099 AgCl.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{16}O(HgCl)^2$
Hg	64,37	64,20
Cl	11,05	11,39

Questo composto clorurato è una polvere micro cristallina bianca, insolubile in tutti i solventi neutri. Riscaldato in tubicino di vetro a pareti sottili diventa pastoso verso 150°, ma non fonde nemmeno a 230°.

Ridotto coll'idrogeno dall'amalgama di sodio, o dall'azione dello zinco ed idrato alcalino, già a freddo si manifesta l'odore caratteristico del canfene; se si scalda la riduzione è completa e distillando si può separare il canfene, che venne caratterizzato dal punto di fusiono 51°, dal punto di ebollizione 155° e dall'analisi.

Gr. 0,261 sostanza dettero gr. 0,8394 CO_2 e gr. 0,2706 H_2O.

Per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{16}$
C	87,71	88,23
H	11,51	11,77

Coll'idrogenazione avviene quindi la reazione rappresentata dall'equazione:

$$C_{10}H_{16}O(HgCl)^2 + 4H = C_{10}H_{16} + H_2O + 2HCl + 2Hg.$$

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 9°, 2° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 5°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-11°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCII

Serie Quinta — Volume V — Fascicolo XII.

LAURETO TIERI

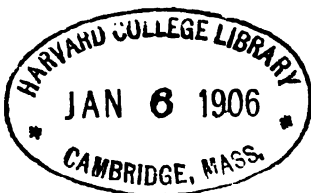
AZIONE DELLE ONDE ELETTRICHE

SUI CICLI D'ISTERESI MAGNETICA

PER TORSIONE E PER TRAZIONE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

RELAZIONE

presentata al Presidente durante le ferie accademiche del 1905, dal Socio BLASERNA, relatore, a nome anche del Socio VOLTERRA, sulla Memoria del dott. LAURETO TIERI, avente per titolo: *Azione delle onde elettriche sui cicli d'isteresi magnetica per torsione e per trazione.*

Il Dott. Laureto Tieri ha presentato una breve Memoria dal titolo: *Azione delle onde elettriche sui cicli d'isteresi magnetica per torsione e per trazione.*

Essa contiene i risultati delle sue accurate indagini sul comportamento di fili di ferro e di nichel, quando siano esposti all'azione di onde elettriche hertziane, mentre percorrono un ciclo magnetico per torsione o per trazione. Vi sono bene definite le condizioni dell'esperienza e alcuni risultati, ottenuti dall'autore, meritano di essere presi in seria considerazione, in quanto presentano differenze talvolta caratteristiche rispetto al comportamento nei cicli ottenuti con variazioni del campo esterno.

La Memoria è condotta con molta cura e diligenza; i Commissarî ne propongono l'inserzione negli Atti Accademici.

Azione delle onde elettriche sui cicli d'isteresi magnetica per torsione e per trazione.
Memoria del dott. LAURETO TIERI.

(con una tavola).

Il Sella, col suo detector magneto-elastico ([1]), studiò come varia il ciclo d'isteresi per torsione e per trazione del ferro e del nichel allorchè vengono lanciate le onde elettromagnetiche in una bobina che circonda un fascio di fili di detti metalli, e quando il primario del rocchetto dell'apparecchio generatore di onde è alimentato da corrente alternata ([2]).

Io ho seguitato gli studî del Sella; e per vedere qual'era l'effetto della prima onda sul fascio di fili di ferro o di nichel, ho alimentato il primario del rocchetto dell'apparecchio generatore di onde con corrente continua generata da alcuni accumulatori. Inoltre, ho studiato il fenomeno per diverse qualità di fili di ferro e di nichel, per torsione e per trazione, e come i cicli vengono perturbati a causa di una magnetizzazione longitudinale o circolare del fascio.

La disposizione usata nelle mie esperienze è quella stessa che adoperò il Sella; cioè un fascio di fili di ferro o di nichel saldati insieme alle due estremità è infilato in una canna di vetro intorno a cui sono disposti due avvolgimenti, di cui l'uno è destinato ad accogliere il passaggio delle onde elettriche e l'altro, l'esterno, è chiuso su un telefono. Un magnetometro posto in corrispondenza dell'estremità superiore del fascio mi accusava le variazioni di magnetizzazione subite dal fascio stesso.

Nell'apparecchio generatore di onde ponevo in comunicazione un polo dell'oscillatore con la terra e l'altro con un'antenna di circa sei metri; analogamente nella bobina dell'onda che circonda il fascio di fili di ferro l'un capo era in comunicazione con la terra, l'altro con un'antenna lunga come l'altra. E per vedere come viene perturbato il ciclo d'isteresi per torsione, o per trazione d'un fascio di fili di ferro o di nichel a causa delle onde elettromagnetiche, ho seguito un metodo analogo a quello tenuto dall'Ascoli per studiare come varia il ciclo magnetico del ferro quando si assoggetta ad un urto o ad una serie di urti ([3]).

Cioè si ciclizza prima il fascio mediante tante torsioni dell'estremità inferiore di esso tra limiti costanti, fino a che il ciclo magnetometrico si chiude e si ricopre. Poscia prendo un punto del ciclo normale; p. es. il punto che si ha torcendo l'estremità inferiore del fascio di 80°, e lancio nella bobina interna del detector una serie di onde: siccome queste hanno la proprietà di produrre una magnetizzazione o una smagnetizzazione nel fascio, questa perturbazione sarà accusata dal magnetometro; e quindi il punto prescelto del ciclo normale subirà uno spostamento. Ripetendo la

([1]) Rend. Accad. dei Lincei, vol. XII, n. 9, 1° sem. 1903.

([2]) *Sul detector magneto-elastico*, Rend. Acc. Lincei, vol. XII, n. 5, 2° sem. 1903.

([3]) Nuovo Cimento, anno 1902, serie V, tomo III, pag. 5.

stessa operazione per ogni punto del ciclo, tenendo presente che bisogna ciclizzare il fascio dopo ogni volta che sono state lanciate delle onde nella bobina interna che lo circonda, a fine di ritornare sempre al ciclo normale, veniamo ad ottenere per punti il ciclo perturbato.

Risultati sperimentali.

PARTE 1ª.

§ 1) Ho adoperato pel detector un fascio di fili di ferro crudo sottoposto all'azione del peso tensore di 2 kg. Il filo di ferro ha il diametro di $^2/_{10}$ di mm. e il fascio conta 43 fili. I cicli ottenuti con tale fascio sono quelli della tabella seguente:

Torsioni	Cicli ottenuti col filo come è venuto dal commercio		Dopo la magnetizzazione circolare del fascio		Dopo la magnetizzazione longitudinale	
	non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato
0	2.2	2.5	3	3.3	6.35	6.5
40	3.1	3.4	3.05	4.1	7.3	7.5
80	4.25	4.45	5	5.25	8.45	8.6
120	5.4	5.9	6.29	6.65	9.45	9.7
160	6.8	7.25	8	8.45	10.95	11.15
180	7.6	8	9	9.4	11.75	11.75
160	7.45	8	9.72	9.2	11.55	11.55
120	7.15	7.4	8.28	8.52	10.95	10.95
80	6.75	6.9	7.8	8	10.32	10.2
40	6.25	6.3	7.3	7.38	9.5	9.3
0	5.8	5.7	6.6	6.6	8.75	8.35
— 40	4.95	4.75	5.7	5.7	7.7	7.1
— 80	3.85	3.65	4.72	4.75	6.6	5.6
— 120	2.9	2.6	3.55	3.55	5.2	3.8
— 160	1.65	1.2	2.35	2	3.6	2
— 180	0.95	0.3	0.9	0.9	2.65	0.8
— 160	1.15	0.85	1.22	1.25	2.8	1.5
— 120	1.3	1.3	1.8	1.75	3.4	2.8
— 80	1.6	1.8	2.15	2.1	4.25	4.05
— 40	2	2.4	2.6	2.55	5.1	5.1
0	2.6	2.9	3.15	3.5	6.2	6.45

(v. tavola fig. 1, 2 e 3) (¹). Nella 1ª colonna di essa tabella sono riportati gli angoli di torsione dell'estremità inferiore del fascio, nella 2ª le deviazioni magnetometriche corrispondenti al ciclo normale o non perturbato; nella 3ª quelle corrispondenti dopo il passaggio delle onde, ovvero quelle corrispondenti al ciclo perturbato; nella 4ª e 5ª

(¹) I cicli sono stati disegnati prendendo come ascisse gli angoli di torsione a cui è stato sottoposto il fascio, e come ordinate le corrispondenti deflessioni del magnetometro. Inoltre, nelle figure il ciclo descritto a linea continua rappresenta il ciclo normale o non perturbato, mentre quello tratteggiato rappresenta il ciclo perturbato.

rispettivamente le deviazioni magnetometriche rispondenti ai cicli non perturbato e perturbato; però dopo una magnetizzazione circolare del fascio, cioè dopo aver fatta passare pel fascio la corrente generata da un accumulatore; in fine nella 6ª e 7ª colonna sono riportate rispettivamente le deviazioni magnetometriche rispondenti ai cicli non perturbato e perturbato, però dopo una magnetizzazione longitudinale del fascio, magnetizzazione ottenuta facendo passar la corrente di un accumulatore in una bobina che circonda il fascio stesso.

Dai precedenti cicli risulta che la magnetizzazione circolare non produce quasi nessuno effetto; mentre la magnetizzazione longitudinale ha per effetto di rendere il fascio meno magnetizzabile a causa delle onde nelle torsioni positive; più magnetizzabile in quelle negative.

§ 2) I cicli seguenti sono stati ottenuti sostituendo al precedente fascio un altro fascio di fili di ferro che differisce da esso solo perchè è ricotto. Il fascio fu ricotto tenendolo disposto perpendicolarmente al meridiano magnetico per ottenerlo bene smagnetizzato. Siccome per questo fascio le deviazioni magnetometriche erano troppo grandi, ho eliminato l'antenna (fig. 4, 5, 6, 7 e 8 della tavola). Nella 2ª colonna della seguente tabella sono riportate le deviazioni magnetometriche corrispondenti al ciclo normale, e nella 3ª quelle che si hanno facendo passare continuamente le onde. Le altre colonne sono analoghe a quelle della tabella precedente.

Torsioni	Ciclo non perturbato	Ciclo perturbato	Ciclo non perturbato e perturbato		Cicli ottenuti dopo la magnetizzazione circolare		Cicli ottenuti dopo la magnetizzazione longitudinale	
			non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato
0	9.65	9.7	12.1	11.8	8.1	8.4	8.6	8.75
40	11.8	11 8	14	13.4	9.85	10	11.3	11.45
80	12.9	11.4	13.4	12.1	10.7	10.6	11.35	11.15
120	10	8	11.2	9.2	9	8.3	10.05	9.35
160	7.1	3.8	7.6	4.9	6.1	5.1	7.4	6.4
180	5.4	2.2	6.1	3	3.85	2.6	5.05	3.9
160	5.5	2.4	6.1	4.4	4.6	4.4	5.55	5.25
120	6.8	3.1	6.55	6	5.55	5.6	7.1	7.05
80	7.4	5.6	7.4	7.05	6.2	6.3	7.6	7.7
40	8.1	6.8	9	8.6	6.8	7	9	9.15
0	9.7	8.1	10.5	10.1	8.5	8.75	10.2	10.45
— 40	11	11.3	12.35	12	9.9	9.95	10.9	10.95
— 80	12.1	10.75	12.8	12.9	10.4	10	11.1	10.7
— 120	10.8	9.1	11.5	9.5	9.17	8.4	9.9	9.05
— 160	7.65	5.3	8.65	6 2	5.6	4.45	6.05	5
— 180	5.9	3.2	6.5	3.8	3	1.65	3.9	2.7
— 160	5.9	3.2	6.5	5	3.6	3.15	4.15	2.65
— 120	6.15	3.8	6.9	6.3	4.25	4.4	4.45	4.45
— 80	7	5.5	7.2	6.9	4.9	5.05	5.4	5.5
— 40	7.9	7.4	8.6	8	6.75	7.05	6	6.13
0	9.6	9.4	12.5	12.2	8.75	9.1	8.25	8.5

Dai precedenti cicli si vede che questo fascio è molto sensibile come detector magneto-elastico. Inoltre, il ciclo della penultima colonna (v. tav. fig. 7) ci dice che esso fascio ha perso molto della sua sensibilità a causa della magnetizzazione circolare; in fine il ciclo dell' ultima colonna (v. tav. fig. 8) ci dice che le condizioni del fascio non sono sensibilmente alterate da una magnetizzazione longitudinale.

§ 3) *Ciclo ottenuto lanciando le onde nel fascio di fili di ferro.* — Si sa che un fascio di fili di ferro funziona da detector magneto-elastico (però molto meno intensamente) anche quando le onde, anzichè lanciarle nella bobina interna, si lanciano nel fascio. Per fare un ciclo in queste condizioni lascio tutto come nel § precedente: però sopprimo la bobina dell'onda e congiungo l'antenna con l'estremità superiore del fascio, l'estremità inferiore del quale la metto in comunicazione con la terra. Il ciclo ottenuto in tal modo ci è dato dalla seguente tabella:

Torsioni	Ciclo		Torsioni	Ciclo	
	non perturbato	perturbato		non perturbato	perturbato
0	25 7	25.7	0	24.1	24
40	35.3	35.5	— 40	29.6	29.6
80	37.9	37.9	— 80	34.1	34.25
120	30.5	30.4	— 120	37	36.9
160	16.1	15.75	— 160	12.8	12.5
180	7.5	7.4	— 180	3.6	3.4
160	8	8	— 160	5.8	5.8
120	11.2	11.2	— 120	9.5	9.5
80	14.2	14.2	— 80	12.9	12.9
40	18.3	18.3	— 40	15.2	15.2
0	24.1	24	0	24.4	24.4

§ 4) *Ciclo ottenuto per trazione.* — Questo ciclo fu ottenuto facendo variare il peso tensore del fascio da 5 kg. a zero e da zero a 5 kg., levando ad uno ad uno e poi mettendo nello stesso modo su un piatto legato all'estremità inferiore del fascio sette pezzi di piombo di ugual peso numerati da 2 a 8. Il peso del piatto è rappresentato col numero 1. Il ciclo così ottenuto è quello della seguente tabella: (v. tav. fig. 9).

pesi	ciclo non perturbato	ciclo perturbato
8	18.8	20.4
7	17.4	17.8
6	16.7	16.4
5	15.7	15
4	14	13.5
3	11.7	11
2	8.9	8.3
1	5.5	5.2
0	1.3	1
1	3.1	3
2	4.33	4.33
3	5.3	5.6
4	7	7.4
5	9.6	10.1
6	12.8	13.4
7	15.3	16.5
8	18.4	20

Come si vede, anche per la trazione le onde hertziane hanno la proprietà di allungare e restringere il ciclo di isteresi.

§ 5) Avendo costruito dei cicli con un fascio di 12 fili di ferro, filo di ferro avente il diametro di $^1/_3$ di mm., ho avuto risultati identici ai precedenti: esso fascio però è meno sensibile del precedente.

§ 6) *Cicli ottenuti con un unico filo di ferro.* — Il filo di ferro adoperato ha il diametro di un millimetro circa ed è stato previamente ricotto mantenendolo perpendicolare al meridiano magnetico. Il ciclo ottenuto è il seguente: (v. tavola, fig. 10).

Torsioni	Ciclo		Torsioni	Ciclo	
	non perturbato	perturbato		non perturbato	perturbato
0	24.5	24.5	0	28.9	28.9
40	14.3	14	— 40	20	19.8
80	8.7	8.5	— 80	13.9	13 7
120	4.3	4.2	— 120	11 2	10.9
160	2	1.7	— 160	9.5	9.2
180	1.3	0.9	— 180	8.25	8.05
160	3.1	3	— 160	10.9	10.8
120	7.2	7	— 120	13.1	12.9
80	16.25	16	— 80	22.7	22.5
40	34.6	34.3	— 40	38.1	37.9
0	28.9	28.9	0	25	25

Ho costruito anche i cicli dopo la magnetizzazione longitudinale e circolare del filo; però non mi è riuscito di ottenerli chiusi. Ciò sarà dovuto al fatto che il filo di ferro non è abbastanza elastico, e che per conseguenza quando si torce di 180°, subisce delle forti deformazioni. Si potrebbe eliminare questo inconveniente facendo i cicli per torsioni minori di 180°. Del resto, benchè essi cicli non siano chiusi ci dicono benissimo che nè la magnetizzazione longitudinale, nè la magnetizzazione circolare del filo di ferro ha un effetto sensibile.

PARTE 2ª.

In questa seconda parte non fo altro che ripetere le precedenti esperienze col nichel.

§ 1) *Cicli ottenuti con un fascio di fili di nichel.* — Il fascio è formato da 19 fili del diametro di $^1/_3$ di mm. ed è stato previamente ricotto come altrove si è detto:

Torsioni	Ciclo non perturbato	Ciclo perturbato	Cicli ottenuti contemporaneamente		Dopo la magnetizzazione longitudinale		Dopo la magnetizzazione circolare	
			non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato
0	4.3	4.9	5.8	5.75	9.4	9.35	6.4	6.35
40	6.7	7.5	7.5	7.35	10.4	10.25	9	8.8
80	9.7	10.6	10.75	10.65	13.5	13.35	12.15	12
120	12.8	15.5	14.5	14.4	18.1	17.9	16	15.7
160	18.4	18.5	16.7	16.6	21.6	21.45	20.45	20.15
180	18.8	18.8	19.1	18.9	24.6	24.45	22	21.85
160	19.7	18.9	19.6	19.6	24.65	24.6	22.4	22.2
120	17.9	17.8	19	19	23.7	23.6	21.3	21.2
80	16.1	16	17.8	17.75	19.1	19.1	18.3	18.2
40	12.3	13.5	12.9	12.85	14.6	14.6	14.1	14.1
0	7.8	9.3	8.3	8.3	12	12	10.9	10.9
— 40	2.9	5.2	4.6	4.45	7.6	7.4	6.5	6.35
— 80	0.6	1.4	2	1.75	4.1	3.9	3.2	3
— 120	1.9	2.7	3.7	3.55	4.5	4.3	3.9	3.7
— 160	4.3	4.8	5.6	5.5	6.8	6.7	6.8	6.75
— 180	7.7	9.2	9.7	9.4	9.4	9.1	8.8	8.5
— 160	7.6	7.7	8.4	8.3	8.3	8.2	8	7.8
— 120	7.2	7.2	7.95	7.95	8.2	8	7.5	7.35
— 80	6.2	6.3	6	6	7.6	7.5	6.7	6.7
— 40	4.6	4.9	5.3	5.25	7.6	7.6	6	6
0	5.2	5.6	5.5	5.45	7.8	7.75	7.4	7.35

Come si vede, la magnetizzazione circolare e la magnetizzazione longitudinale non hanno nessun effetto sensibile [1].

§ 2) Ho ripetuto le precedenti esperienze con un altro fascio di fili di nichel ricotto, composto di 12 fili del diametro di circa $^1/_2$ mm., fascio che funziona molto meglio dell'altro come detector magneto-elastico. I cicli si ricavano dalla seguente tabella:

[1] Della precedente tabella e della tabella che segue (v. pag. 586), sono disegnati sulla tavola soltanto i cicli non perturbato e perturbato ottenuti contemporaneamente (v. tav. fig. 11 e 12).

Torsioni	Ciclo non perturbato	Ciclo perturbato	Cicli ottenuti contemporaneamente	
			non perturbato	perturbato
0	28.4	29.7	29.7	30.1
40	39.6	40.7	40.3	40.8
80	50.7	52.4	52.4	53
120	60.8	64.5	60.8	61.9
160	71.7	74	70.25	71.9
180	75.5	79.4	75	76.8
160	73.9	77.7	72 7	73 7
120	69.3	73.4	68.9	69.05
80	62.8	66 8	62.1	62.1
40	52.6	55.8	52 4	52.4
0	43.1	40	36	35.9
— 40	22.2	23	20.8	20.45
— 80	12	13	10.7	10.45
— 120	7	8.5	6.5	6.4
— 160	5.3	7.1	4 5	4.8
— 180	4.8	6.9	3.9	4.45
— 160	6.2	8.2	4.65	4.75
— 120	9.3	11.5	7.7	7.7
— 80	13.7	16.2	12.15	12.2
— 40	20	22.6	19	19.2
0	28.7	30.1	29.2	29.6

Non ho riportato i cicli ottenuti dopo la magnetizzazione circolare e longitudinale del fascio perchè essi non differiscono sensibilmente dal 3° ciclo della precedente tebella.

§ 3) *Ciclo ottenuto dal precedente fascio per trazione.* — Questo ciclo è stato costruito tenendo lo stesso procedimento tenuto per avere il ciclo per trazione del fascio di fili di ferro; cioè, facendo variare il peso tensore del fascio prima da 5 kg. a zero, levando ad uno ad uno da sopra un piatto legato all'estremità inferiore del fascio sette pezzi di piombo di egual peso numerati da 2 a 8, ed infine levando il piatto il cui peso è rappresentato col numero 1, poi da zero a 5 kg., rimettendo prima il piatto e poscia i pezzi di piombo ad uno ad uno (v. tavola, fig. 13).

pesi	ciclo non perturbato	ciclo perturbato
8	66.7	67
7	63.7	63.75
6	60	60
5	55.9	55.8
4	50.3	50.3
3	42.4	42.3
2	30.9	30.9
1	21.8	21.8
0	0.1	-0.3
1	15.15	15
2	25.9	25.85
3	34.6	34.8
4	41.45	41.65
5	50.7	50.95
6	59.05	59.15
7	63.05	63.15
8	68	68.25

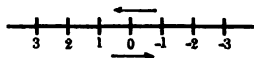
In tutti i casi precedenti ho anche notato che col variare del peso tensore del fascio di fili di ferro o di nichel, non si ha niente di notevole.

Parte 3ª.

Se si osservano i cicli precedenti si vede che in alcuni casi le onde hertziane hanno per effetto di spostare il ciclo di isteresi normale dall'alto al basso, in altri casi dal basso all'alto; o per meglio dire, in alcuni casi le onde aumentano il magnetismo del fascio, in altri casi lo diminuiscono.

Riprendiamo il fascio di fili di ferro (filo del diametro di 1/5 di mm.) ricotto come altrove si è detto, che meglio d'ogni altro funziona da detector magneto-elastico; e come generatore di onde adopero un apparecchio capace di dare delle onde non troppo smorzate. (Ciò si raggiunge riunendo p. es. l'oscillatore al primario d'un trasformatore di Tesla, il cui secondario è riunito per una estremità all'antenna e con l'altra estremità comunica con la terra). La seguente esperienza starebbe a dirci che la causa che determina il precedente fenomeno è la polarità. Indicando con A e B le estremità del primario del rocchetto dell'apparecchio generatore di onde, se il polo negativo degli accumulatori è congiunto con A e il polo positivo con B, si ha una magnetizzazione del fascio; in caso contrario si ha una smagnetizzazione (v. tavola, fig. 14).

Torsioni	Ciclo non perturbato	Cicli perturbati	
		B in comunicazione con + A " " —	B in comunicazione con — A " " +
0	37	39.6	35.5
40	46.9	48.9	44.4
80	43.7	44.2	39.4
120	32	32.2	29.4
160	18	18	15 4
180	11.2	11	8.7
160	12.5	12.4	10
120	15.5	16.8	12.7
80	18.8	20.2	17.1
40	22.8	25.4	21.7
0	31	34	30.2
— 40	39.3	40.2	37
— 80	41.1	41.4	37.3
— 120	33.7	33 7	26.8
— 160	10.5	10 2	7.3
— 180	3.5	3.5	0.4
— 160	4.4	5	1.6
— 120	7.2	8.6	4.3
— 80	11.6	13 5	9.5
— 40	18.3	21.3	17.3
0	34 5	38	33.5

E alla stessa conclusione porterebbero i seguenti cicli ottenuti con lo stesso fascio: i primi due quando il polo + degli accumulatori è in comunicazione con l'estremo A, e il — con l'estremo B; gli altri due quando il polo + degli accumulatori comunica con B e il — con A. Inoltre, pel 1° e pel 3° l'estremità inferiore della bobina delle onde era a terra e la superiore comunicava con l'antenna; pel 2° e pel 4° era a terra l'estremità superiore e l'inferiore comunicava con l'antenna (v. tavola, fig. 15, 16, 17 e 18).

Per semplicità consideriamo solo i cicli che si hanno quando l'estremità superiore della bobina è a terra: per la disposizione + con A — con B si ha una magnetizzazione del fascio di fili di ferro a causa delle onde; mentre per la disposizione + con B e — con A si ha una smagnetizzazione del fascio di fili di ferro.

Inoltre, si verifica sempre il fatto che le deviazioni nel 1° caso sono sempre minori che nel 2°. Ripetendo poi i precedenti cicli mi sono accorto che non si verifica sempre lo stesso fenomeno; cioè con la seconda disposizione si ha sempre una smagnetizzazione del fascio; mentre con la prima disposizione può aversi una magnetizzazione

Angoli di torsione	+ con A ; — con B				+ con B ; — con A			
	estremità inferiore bob. a terra		estremità superiore a terra		estremità inferiore a terra		estremità superiore a terra	
	non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato	non perturbato	perturbato
0	25.4	28.5	25.4	23.4	33.1	32.7	20.1	27.3
40	36.3	38.2	35.8	32	44	42.7	32	38.9
80	34	34.4	34	28.7	41.6	38.8	31.3	36.5
120	25	24.6	23.6	17.5	31	28.2	23	26.8
160	12.7	11.7	12.8	6.5	16.8	14	9.7	14
180	6.4	5.8	7.7	1.7	10.2	7.7	4	8.5
160	7.1	7.5	9.1	4.4	11.3	10.5	5.6	9.7
120	10	10.4	11.9	8.5	15.6	14.9	9.2	11.4
80	13.2	14.8	14.75	14.5	20	19.3	12.9	16.3
40	19.25	21.2	19.85	19.3	23.6	23.7	16.8	21.2
0	28	30.5	28.7	28.5	32.6	32.2	23.4	30.6
— 40	38.8	40 5	38.6	36.5	42.9	41.7	35.8	42.5
— 80	36.7	37	38.1	35.2	43	41.5	34.7	41.2
— 120	24.4	23 7	25.6	21.6	27.2	24.3	22.5	27.8
— 160	10.4	9.85	12.7	8 9	13.5	10.5	8	12.6
— 180	3.2	2.5	7	3.1	6.1	2.7	0.5	5.3
— 160	4.9	5.5	8.2	5.9	7.3	5.2	2.2	6.3
— 120	7.75	8.8	11.1	8.9	10.4	9.3	6	9
— 80	12.2	13 2	15	13	14.7	13.7	10.1	13.17
— 40	17.6	19.3	20 2	18 6	21.3	29.9	15	19 2
0	26.4	29.3	26.2	21.3	32.2	31.9	23	30.5

o una smagnetizzazione di esso. Ciò dipende, come vedremo da quel che segue, dall'intensità delle onde che si adoperano. Osserviamo inoltre, che anche quando avviene una magnetizzazione essa è preceduta da una piccola smagnetizzazione; cioè, appena arriva la prima onda sul fascio, si ha sulla scala una piccola deviazione da destra a sinistra, la quale è subito seguita da una deviazione da sinistra a destra ([1]).

Per ricercare quale è la causa che determina questo fenomeno, per generare le onde adopero una macchina elettrostatica con condensatori, e fo scoccare la scintilla tra le armature interne: le esterne le collego rispettivamente con antenna e terra. Con essa si possono ottenere onde di intensità diverse. Inoltre, per non ripetere ogni volta il ciclo, considero soltanto uno dei punti più sensibili di esso (torsione 60°) e fo le seguenti esperienze:

([1]) Quando sulla scala si hanno le deviazioni da destra a sinistra come indica la freccia superiore, si ha una smagnetizzazione del fascio: quando ←/→ 3 2 1 0 -1 -2 -3 invece si hanno deviazioni da sinistra a destra, si ha una magnetizzazione del fascio.

1°) Distanza tra le palline dello spinterometro della macchina elettrostatica di 1 cm.

a) Polo + della macchina elettrostatica a terra e polo — all'antenna.

Estremità inferiore della bobina dell'onda:

senza antenna . . .	non perturbato	— 15	← 3,5
	perturbato	— 11.5	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 15.5	← 4.3 (¹)
	perturbato	— 11.2	

b) Polo + con l'antenna e — con la terra.

Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 14.7	← 0.6
	perturbato	— 14.1	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 14.9	← 4.2
	perturbato	— 10.7	

2°) Distanza esplosiva di cm. 2,1.

a) Polo + a terra e — con l'antenna.

Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 15	← 5.7
	perturbato	— 9.3	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 15	← 3.6
	perturbato	— 12.6	

b) Polo + con l'antenna e — con la terra.

Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 15	← 1.5
	perturbato	— 13.5	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 15.4	← 6.7
	perturbato	— 8.7	

3°) Distanza esplosiva di 3 cm.

a) Polo + a terra e — con l'antenna.

Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 11.4	← 6.2
	perturbato	— 5.2	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 11.8	← 0.6
	perturbato	— 11.2	

(¹) Le frecce stanno ad indicare in che senso è avvenuto lo spostamento.

b) Polo + con l'antenna e — con la terra.
Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 13.4	← 1.7
	perturbato	— 11 7	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 13.4	← 8.8
	perturbato	— 4.6	

4°) Distanza esplosiva 4 cm.
a) Polo + della macchina a terra e — con l'antenna.
Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 13.9	← 7
	perturbato	— 6.9	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 13.2	→ 3.6
	perturbato	— 16.8	

b) Polo + con l'antenna e — con la terra.
Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 15.1	← 3.7
	perturbato	— 11.4	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 13.7	← 12.4
	perturbato	— 1.3	

5°) Distanza esplosiva cm. 4,6.
a) Polo + della macchina a terra e — con l'antenna.
Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 20.8	← 8.3
	perturbato	— 12.5	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 19.5	→ 5
	perturbato	— 24.5	

b) Polo + della macchina con l'antenna e — con la terra.
Estremità inferiore della bobina

senza antenna . . .	non perturbato	— 20.6	← 4.4
	perturbato	— 16.2	
con l'antenna . . .	non perturbato	— 29.3	← 19
	perturbato	— 10.3	

Avendo ripetuto parecchie volte i precedenti esperimenti ho sempre ottenuto gli stessi risultati. Inoltre, avendo cambiato il fascio di fili, ho ottenuto risultati analoghi ai precedenti. Da quanto precede ne segue che per scintille corte, qualunque sia la polarità dell'antenna, si ha sempre una diminuzione di magnetizzazione del fascio;

per scintille lunghe invece, cioè con molta energia ed onde smorzate, si può avere, scambiando la terra con l'antenna, ora una diminuzione ed ora un aumento della magnetizzazione. Però, quando si ha un aumento di magnetizzazione, esso è sempre preceduto da una diminuzione. Si vede ancora che anche quando le scintille sono lunghe (relativamente alla macchina che adopero) se si sopprime l'antenna nella bobina dell'onda si ha sempre una diminuzione di magnetizzazione del fascio.

Parte 4ª.

Determinazione delle aree dei cicli trovati.

Avendo calcolato le aree dei cicli trovati, ne risulta che le onde elettromagnetiche hanno per effetto di diminuire l'area del ciclo ottenuto per torsione dal ferro o dal nichel. Fa eccezione il caso in cui le onde innalzano, invece di abbassare, il ciclo; o per meglio dire il caso speciale in cui le onde hanno per effetto di aumentare il magnetismo del fascio; nel quale caso l'area del ciclo perturbato è maggiore dell'area del ciclo non perturbato.

CONCLUSIONE.

Riassumendo possiamo dire che:

1°) Quando si lanciano delle onde elettromagnetiche in una bobina che circonda un fascio di fili di ferro o di nikel, esse onde hanno in generale per effetto di smagnetizzarlo in parte, qualunque sia la posizione del fascio allorchè gli si fa descrivere il ciclo di isteresi per torsione.

2°) Nel caso però che le onde non sono molto smorzate, possono avere la proprietà di aumentare la magnetizzazione.

3°) Anche quando si ha un aumento di magnetizzazione del fascio a causa delle onde elettriche, esso è sempre preceduto da una smagnetizzazione.

4°) Variando il peso tensore non varia sensibilmente l'effetto delle onde

5°) La magnetizzazione circolare per alcuni fasci altera, per altri no l'effetto delle onde. La stessa cosa ripetasi per la magnetizzazione longitudinale.

6°) L'area del ciclo perturbato è in generale minore di quella del ciclo non perturbato. Però nel caso che si abbia una forte magnetizzazione del fascio a causa delle onde hertziane, l'area del ciclo perturbato è maggiore di quella del ciclo non perturbato [1].

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Fisico di Roma sotto la direzione dei professori Blaserna e Sella.

STAB. L. SALOMONE ROMA

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 9°, 2° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 5°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCII

SERIE QUINTA — VOLUME V — FASCICOLO XIII.

GIUSEPPE GIANFRANCESCHI

LA VELOCITÀ DEI JONI

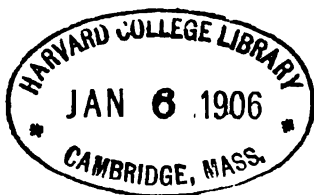
PRODOTTI DA UNA FIAMMA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1905

NB. Con questo fascicolo si chiude il volume V, e viene distribuito l'Indice del volume stesso.

RELAZIONE

dei Soci P. Blaserna (relatore) e V. Volterra, sulla Memoria del dottore Giuseppe Gianfranceschi, intitolata: *La velocità dei joni prodotti da una fiamma,* presentata al Presidente durante le ferie accademiche del 1905.

Il lavoro del dott. Giuseppe Gianfranceschi arreca un largo contributo alla conoscenza della velocità dei joni generati da una fiamma. In una breve introduzione l'autore stabilisce chiaramente le definizioni delle grandezze che compaiono nel lavoro e passa poi ad una classificazione e discussione critica dei metodi sinora seguiti per la misura della velocità specifica dei joni. La discussione di essi lo conduce a seguire il metodo di J. J. Thomson, ma con opportune e non lievi modificazioni, principalmente nel modo di utilizzare i dati forniti dall'esperienza. I risultati delle determinazioni, condotte con molta cura, offrono un vero interesse, sia per la loro precisione, sia perchè sono ben poste in chiaro le circostanze che possono modificare la velocità dei joni. Per queste ragioni i Commissari propongono, che la Memoria dell'autore venga inserita integralmente negli Atti accademici.

La velocità dei joni prodotti da una fiamma.

Memoria del dott. GIUSEPPE GIANFRANCESCHI.

(con una tavola)

PRELIMINARI.

1. Varie specie di velocità dei joni. — Definizioni. — Dimensioni.

I joni si muovono in un'atmosfera gassosa obbedendo alle forze che li sollecitano.

Si ammette che la velocità acquistata da un jone in una certa direzione sia proporzionale alla forza che lo muove in quella direzione. Sicchè se v è la velocità ed F è una forza meccanica qualunque, sarà:

$$1)\qquad v = u\mathrm{F}$$

dove u è una costante indipendente da F ma propria del jone.

Se la forza è di origine elettrica ed è rappresentata da X, nella espressione di v si dovrà ad F sostituire il prodotto $\mathrm{X}\varepsilon$ dove ε è la massa elettrica del jone; sicchè sarà:

$$2)\qquad v = u\mathrm{X}\varepsilon$$

La costante u può chiamarsi la *mobilità* dei joni e rappresenta *la velocità acquistata dai joni sotto l'azione di una forza meccanica unitaria, nella direzione della forza stessa*, difatti dalla 1) si ricava

$$3)\qquad u = \frac{v}{\mathrm{F}}$$

Nella 2) il prodotto $u\varepsilon$ è la costante propria dei joni. Se si chiama con k quel prodotto si ha:

$$4)\qquad k = u\varepsilon = \frac{v}{\mathrm{X}}$$

Tale costante k può chiamarsi la *velocità specifica dei joni* ed è *la velocità acquistata dai joni sotto l'azione di una forza elettrica unitaria, nella direzione della forza* (1).

(1) Nella definizione di k non entra la specie di unità elettriche adoperata per misurare X.

Tanto la u quanto la k saranno in generale diverse per i joni positivi e per i negativi.

Infine la velocità realmente acquistata dai joni per effetto di una determinata forza agente su di essi è ciò che può chiamarsi *velocità effettiva*; la sua espressione sarà data dalla 1) o dalla 2) secondochè la forza è puramente meccanica, o è d'origine elettrica.

Queste tre specie di velocità sogliono essere generalmente distinte da tutti gli autori, quantunque non sempre siano egualmente definite. Così ciò che qui è chiamata *mobilità* è da alcuni chiamata velocità specifica, mentre la k misurata in unità elettromagnetiche è detta velocità assoluta [1]. Presso altri invece mobilità è in generale la velocità acquistata dai joni per effetto di una forza elettrica unitaria, e la u non è considerata [2]. Appare dunque necessario per l'uniformità stabilire una volta le definizioni e le denominazioni.

Dalle formole 1), 3), 4) si ricavano immediatamente le dimensioni delle grandezze v, u, k. La v è una vera velocità e ne ha quindi le dimensioni. Per la mobilità si può osservare che piuttosto che una vera velocità si può considerare come coefficiente, ed allora le sue dimensioni sono:

$$[u] = M^{-1}T \text{ (}^3\text{)}.$$

Anche la velocità specifica è piuttosto un coefficiente; le sue dimensioni dipendono dall'unità in cui è misurata la e. Se questa è data in unità elettrostatiche sarà:

$$[k] = M^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}$$

in unità elettromagnetiche si avrebbe invece:

$$[k] = M^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T$$

2. La corrente generata dal moto dei joni.

I joni sono veicoli di elettricità, il loro moto dunque in una certa direzione produce una vera corrente elettrica in quella direzione. Se un gas jonizzato è sottoposto ad un campo elettrostatico, si avrà un flusso di elettricità, positiva in un senso, negativa nel senso opposto, e quindi una corrente.

Si conviene di chiamare *intensità* di tale corrente in un punto *la somma della quantità di elettricità positiva che in una unità di tempo passa in un senso attraverso l'unità di superficie piana normale alla direzione della forza in quel punto, più quella negativa che passa nel senso opposto.*

(1) Cfr. Riecke. *Beiträge zu der Lehre von der Luftelektrizität.* Ann. d. Ph. 1903 e Lehrbuch der Physik, vol 2°, pag. 365 e segg.

(2) Confronta in generale tutti gli autori francesi

(3) Allo stesso risultato si arriverebbe ricorrendo alla formola nota per u, cioè $u = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu c}$ dove λ è il cammino libero medio, c la velocità con cui questo cammino è percorso, μ la massa materiale del jone. Cfr. Riecke, loc. cit.

Se si chiama con X l'intensità della forza, ε la carica dei joni, k_p e k_n le velocità specifiche dei joni positivi e dei negativi, n_p ed n_n le densità in quel punto, l'intensità della corrente sarà data da:

5) $$i = k_p X n_p \varepsilon + k_n X n_n \varepsilon .$$

Ammettiamo che in un certo spazio si verifichi che

6) $$k_p n_p = k_n n_n$$

ossia che la quantità di elettricità positiva che passa in un senso sia eguale alla negativa che passa nel senso opposto. Allora se in un punto di quello spazio si avesse

7) $$n_p = n_n = n$$

si avrà anche per la 6)

$$k_p = k_n$$

cioè nel campo in cui la 6) è verificata, se la densità dei joni di un certo segno è eguale a quella dei joni di segno opposto si avrà anche una stessa velocità comune ai joni positivi e ai negativi, e sarà anzi una velocità media delle due, sicchè chiamandole con k si avrebbe:

8) $$k = \frac{k_p + k_n}{2}$$

Allora la 5) si ridurrebbe all'altra:

9) $$i = 2nk\varepsilon X$$

dove n e k sono definite dalle 7) e 8).

In generale però non si verifica mai che k_p sia eguale a k_n e quindi la 9) non rappresenta alcun caso reale.

Perciò nei punti in cui si verifica la 6) non sarà esatto scrivere col Thomson:

$$i = n(u_1 + u_2)\varepsilon$$ (¹)

dove u_1 ed u_2 sono velocità effettive corrispondenti a $k_p X$ $k_n X$, o col Rutherford:

$$i = n\varepsilon \frac{UE}{l}$$ (²)

dove U è la somma delle due velocità specifiche, perchè se si distinguono due velocità diverse bisogna anche distinguere due valori di n.

Immaginiamo ora che il campo sia formato da due piatti piani disposti parallelamente l'uno di fronte all'altro e caricati ad una determinata differenza di potenziale.

Se nello spazio compreso fra i due piatti introduciamo un gas jonizzato si produrrà una corrente nella direzione della normale comune ai due piatti.

(¹) Thomson, Cond. of El. tr. gases, n. 22, pag. 32.

(²) Rutherford e Thomson, Ph. M., v. 42, pag. 396.

Consideriamo il caso di uno stato stazionario, e di una differenza di potenziale non molto grande in modo cioè che non dia luogo ad una corrente di saturazione. Allora vi sarà un certo spazio nel campo interno ai due piatti in cui attraverso l'unità di superficie piana normale alla direzione della forza la quantità di elettricità positiva che passa in un senso è eguale a quella negativa che passa nel senso opposto. Allora in questo spazio la 6) è verificata.

Ma non in tutto il campo fra i due piatti possono trovarsi egualmente i joni di ambo i segni.

Nell'avvicinarsi ad un piatto per es. al negativo, i joni di questo segno vanno diminuendo di densità e si andranno accumulando invece i joni positivi. Vi sarà anzi un certo strato aderente al piatto in cui non esistono che joni di un sol segno. In questo spazio la corrente è dunque dovuta tutta ai joni di quella specie. E poichè il valore di i deve essere lo stesso in qualunque sezione normale alla forza essa si misuri e quindi in tutti gli strati successivi normali ad x, così si potrà determinare il numero di joni di un certo segno necessario per produrre da soli quella determinata corrente. Se chiamiamo con q il rapporto delle due velocità k_n e k_p

10) $$q = \frac{k_n}{k_p}$$

nelle vicinanze del piatto positivo sarà:

$$n_n = n\frac{q+1}{q}$$

dove n è quello che verrebbe dato dalla 7) corrispondentemente al valore k della 8); e per il piatto negativo

$$n_p = n\,(1+q).$$

Tenendo conto di questo, la formola $i = n\,\mathrm{UE}$ [1] adoperata a calcolare $\mathrm{U} = k_n + k_p$ con elementi misurati sul piatto non rappresenta il vero fenomeno perchè sul piatto una delle due velocità non entra a produrre la corrente. Ma se si osserva che

$$\mathrm{U} = k_n + k_p = k_n\left(1+\frac{1}{q}\right) = k_p\,(1+q)$$

la formola stessa si può interpretare esattamente attribuendo ad n il fattore che si attribuisce invece a k_n ed a k_p.

All'intelligenza di questi fenomeni è molto utile la rappresentazione grafica. L'asse dei due piatti rappresenti l'asse x di un sistema di coordinate rettilinee (fig. 1), i due piatti visti in profilo determinano le ordinate estreme del diagramma. Per ogni valore di x la parte di ordinata positiva rappresenta la densità dei joni positivi, quella negativa dei joni negativi. Le due curve a e b usciranno tangenzialmente all'asse x dal punto in cui l'asse incontra il piatto dello stesso segno dei joni che rappresentano, ad

[1] Cfr. Rutherford, Ph. M. v. 44, pag. 432.

una certa distanza da tal piatto diventeranno parallele all'asse stesso e poi si innalzeranno in vicinanza del piatto di segno opposto.

Le ordinate massime BM_1 AM_2 non saranno eguali se non quando si avesse $k_n = k_p$. In questa ipotesi anche i due tratti di curva compresi fra i due piani P e P' oltre che paralleli ad x saranno anche ad ugual distanza da esso e attraverso un piano qualunque parallelo ai piatti passerà un egual numero di ioni d'ambo i segni

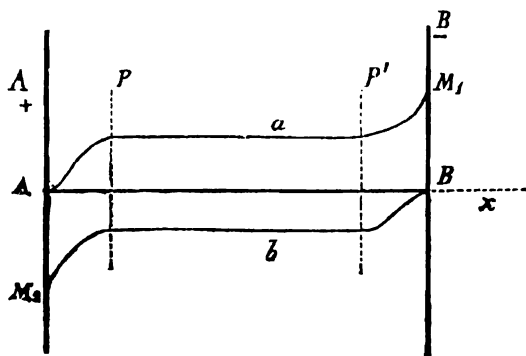



Fig 1.

in senso opposto, e precisamente se i è la corrente, attraverso l'unità di superficie piana passeranno $\frac{i}{2\varepsilon}$ joni di ciascun segno.

Sui piatti invece arriveranno un numero $\frac{i}{\varepsilon}$ di joni di un sol segno.

Se questa ipotesi non si verifica, quei due massimi non sono eguali nè sono egualmente distanti i due tratti paralleli, ma i due numeri di joni e quindi le ordinate corrispondenti saranno inversamente proporzionali alle velocità, dimodochè si abbia sempre

$$n_p \, k_p = n_n \, k_n \, .$$

Questa distribuzione è relativa al caso di una piccola forza elettromotrice. Col crescere di questa il tratto compreso tra P e P' andrà restringendosi e crescerà invece il tratto variabile delle curve, e proporzionalmente crescerà la corrente che arriva sui piatti. Vi sarà un certo valore del potenziale dei piatti per cui il tratto fra P e P' è sparito completamente, e tutti i joni somministrati dalla causa jonizzante vengono assorbiti. Se la forza elettromotrice cresce al disopra di questo valore la corrente che arriva sui piatti non crescerà più perchè sono già esauriti tutti i joni liberi. È il caso della corrente di saturazione. Le due curve a e b (fig. 2) uscite dall'asse x si innalzano continuamente fino a raggiungere il piatto opposto.

Fin qui si è supposto che la causa jonizzante invada tutto il campo, e quindi in tutto il campo siano joni d'ambo i segni.

Se invece la causa jonizzante è limitata ad un certo campo compreso fra i due piani paralleli M ed M' allora al di qua e al di là di questo campo non si trove-

ranno che joni di un sol segno. Sopra un piano qualunque fuori di quel campo la corrente sarà data da joni di una sola specie. La distribuzione sarà analoga alla precedente. Le curve raggiungeranno un massimo appena i joni del segno opposto sono eliminati e si manterranno parallele ad x fino al piatto (fig. 3). Questo è ciò che si pre-

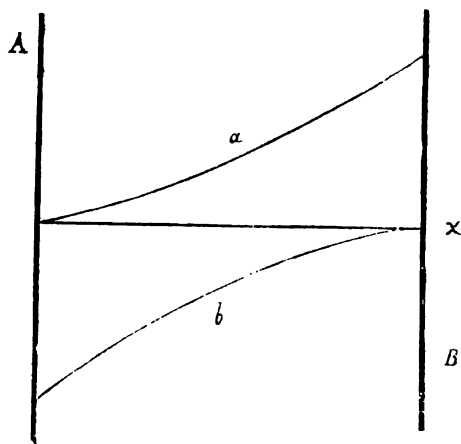



Fig. 2.

vederebbe, ma in pratica l'andamento è più complicato. Sul piano M e sul piano M' le due curve raggiungono un vero massimo dopo il quale tornano ad avvicinarsi

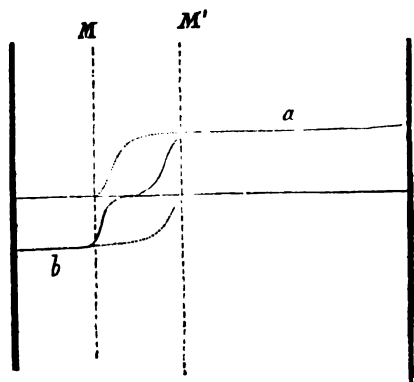
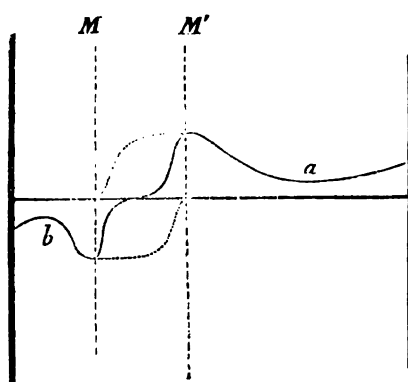



Fig. 3. Fig. 4.

all'asse x (fig. 4) mantenendosi per un tratto più o meno lungo quasi parallele all'asse e tornano ad allontanarsene in vicinanza del piatto.

Questa distribuzione ho potuto verificare molto costantemente nelle mie esperienze.

I.

Metodi di misura.

I varî metodi [1] seguiti per la determinazione della velocità dei joni prodotti da una fiamma si possono ridurre a tre tipi fondamentali. Il primo tipo può comprendere il metodo del sig. Mc Clelland esposto in una sua Memoria pubblicata nel Philosophical Magazine (vol. 46, pag. 29, anno 1898) e quello del sig. H. Mache più recente, pubblicato nel Physikalische Zeitschrift (anno 1903, n. 26, pag. 717); il secondo tipo comprende il metodo suggerito dal signor J. J. Thomson nella sua Memoria pubblicata nel Philosophical Magazine (vol. 47, pag. 253) e applicato alle fiamme e modificato dal signor C. D. Child che ne dà i risultati nel Physical Review (vol. XII, pag. 65); un terzo tipo finalmente può essere costituito dal metodo del signor E. Rutherford, esposto nel Physical Review (vol. XIII, pag. 321) ed adoperato da lui per i joni formantisi alla superficie arroventata di un elettrodo di platino, anzi adoperato già fin da prima dallo stesso Rutherford per la velocità dei ioni prodotti dai raggi ultravioletti (Proc. Camb. Phil. Soc. 1898). Questo metodo veramente non è mai stato applicato direttamente alla determinazione della velocità dei joni prodotti da una fiamma, ma i signori A. Sella e De Rossi nel loro studio sopra il comportamento delle fiamme in un campo alternato, esposto in una Memoria pubblicata nel Nuovo Cimento (N. C. 1902, serie V, tomo IV, pag. 94), hanno determinato la velocità dei joni positivi con criterî al tutto analoghi a quelli del Rutherford.

Primo tipo.

Il gas jonizzato si fa passare entro un condensatore cilindrico di cui una delle armature è un cilindro di lamina metallica, l'altra una bacchetta pure cilindrica disposta lungo l'asse della prima armatura. Mentre il gas cammina per entro allo spazio libero tra le due parti del condensatore i joni vengono attirati dall'una o dall'altra delle armature e tendono a procedere secondo le linee di forza di quel campo, che sono i raggi del cilindro esterno, sicchè la loro traiettoria sarà risultante di due movimenti, quello del gas e quello dovuto al campo.

Da una o più misure combinate della quantità di elettricità arrivata sopra una delle due armature, per es., l'interna, si può conoscere quanto è lo spazio che si è privato di joni di un dato segno nel tempo in cui il gas è passato avanti all'armatura interna, e quindi il cammino percorso dai joni nel senso della forza, e così la velocità media effettiva.

Su questo concetto si fondano i due metodi inclusi in questo primo tipo.

[1] Non mi occupo qui che delle determinazioni fatte in questi ultimi dieci anni, che sono senza dubbio le più interessanti. Un resoconto dei risultati sperimentali ottenuti precedentemente si può trovare o nell'opera di Wiedemann, Lehre von der Elektricität, vol. 4 B, o in una Memoria d'Arrhenius, Wied. Ann. XLII, 1891.

La disposizione del signor Mc Clelland è la seguente. Al disopra di un becco Bunsen sufficientemente grande sta una specie di imbuto metallico destinato a raccogliere la corrente d'aria jonizzata dalla fiamma e guidarla nel cilindro superiore che costituisce l'armatura esterna del condensatore, la cui armatura interna è costituita da una bacchetta B coassiale al cilindro. Questa è caricata ad un potenziale V, mentre la prima è a terra. Se chiamiamo r_1 il raggio del cilindro esterno A, e con r_0 quello della bacchetta B, con v' la velocità ascensionale dell'aria, u la velocità dei joni per un campo unitario, l la lunghezza di B, e ricordiamo che la forza elettrica in un punto alla distanza r dall'asse è data da

$$X = \frac{1}{r} \frac{V}{\log \frac{r_1}{r_0}}$$

in unità elettrostatiche, potremo porre per la velocità effettiva nel senso della forza

$$\frac{dr}{dt} = u \frac{V}{r \log \frac{r_1}{r_0}}$$

da cui integrando

$$\frac{r^2 - r_0^2}{2} = \frac{uV}{\log \frac{r_1}{r_0}} t$$

e se prendiamo $t = T = \frac{l}{v'}$ e chiamiamo con ϱ il valore corrispondente di r, potremo scrivere

$$T = \frac{\varrho^2 - r_0^2}{2} \frac{\log \frac{r_1}{r_0}}{uV}$$

La lunghezza $\varrho - r_0$ rappresenta la massima escursione che i joni possono fare nella direzione della forza nel tempo in cui il gas passa innanzi alla bacchetta B.

Sicchè si può pensare che nel tempo T venga privato di joni di un dato segno un volume cilindrico la cui sezione ha per raggio esterno ϱ e per altezza la lunghezza l della bacchetta.

Allora se n è il numero di joni di un certo segno contenuti nell'unità di volume, la quantità di elettricità depositata su B nel tempo T è data da

$$\pi (\varrho^2 - r_0^2)\, l\, n\, \varepsilon$$

e nell'unità di tempo

$$\pi (\varrho^2 - r_0^2)\, v' n \varepsilon = \frac{2 \pi n \varepsilon l u V}{\log \frac{r_1}{r_0}}$$

Questa quantità si può misurare perchè rappresenta la velocità di scarica del conduttore B. Se aggiungiamo allora al disopra di B un conduttore identico C cari-

cato ad un tal potenziale da assorbire tutti i joni che non sono stati mangiati da B, si vede subito come con due letture all'elettrometro collegato a C, una fatta tenendo B ad un certo potenziale noto, una seconda tenendo B a terra, si possa determinare il valore di ϱ corrispondente a quel potenziale di B. E così nella formola che dava T tutto è noto meno u che si può quindi ricavare immediatamente.

Il signor Mache dispone orizzontalmente il cilindro con i due conduttori e aspira il gas jonizzato facendolo passare nel manicotto compreso fra le due armature del condensatore. Carica poi il primo conduttore B ad un tal potenziale che sia il minimo necessario perchè al secondo conduttore non arrivi niente carica. Per tal valore di V si ha $\varrho = r_1$ e quindi si ricava per u la formola seguente

$$u = \frac{w \log \frac{r_1}{r_0}}{2\pi V l}$$

dove

$$w = \pi v' (r_1^2 - r_0^2)$$

è il volume totale di gas che in un secondo passa fra le armature del condensatore.

Egli dà inoltre una formola correttiva perchè non si riesce mai a far sì che sul secondo conduttore non arrivi niente carica. Tale formola è

$$u = \frac{w \log \frac{r_1}{r_0}}{2\pi l V} \left\{ 1 - \frac{L}{nsv'} \right\}$$

in cui L è la quantità di elettricità pervenuta su C, le altre lettere hanno lo stesso significato di sopra.

Per ciò che riguarda la teoria questi due metodi non recano alcun nuovo contributo. I ioni sono veicoli di elettricità, la loro massa tanto materiale che elettrica costante, la loro distribuzione non altera il campo, la ricombinazione non è considerata.

Queste supposizioni non sono certo conformi alla realtà, nè tutte si possono accettare. La ricombinazione dei ioni non trascurabile in un percorso abbastanza grande, e forse anche la non uniforme distribuzione che si va accentuando appena il gas entra fra le due armature del condensatore devono influire fortemente sui risultati del primo metodo. Questi errori sono meglio eliminati, quantunque non completamente, nel secondo in cui le misure relative al conduttore C non sono che una riduzione a zero.

Ma i risultati sperimentali ottenuti con questi metodi acquistano anche meno importanza quando si pensa al lungo cammino che hanno percorso i joni prima di essere assorbiti dai conduttori ai quali comunicano la loro carica. Si sa come facilmente i joni divengano nuclei di concentrazione, se dunque li sorprendiamo soltanto dopo che hanno fatto un lungo cammino in mezzo all'aria, la loro massa sarà fortemente alterata. Questo difetto si fa specialmente risentire nelle esperienze del Mc Clelland; molto meno in quelle del Mache.

SECONDO TIPO.

Se in un campo limitato dello spazio compreso fra due piatti paralleli caricati ad una certa differenza di potenziale si fa agire una causa jonizzante, nel caso presente la fiamma, al di fuori di quel campo non si troveranno che joni di un sol segno, quello contrario al segno del piatto a cui sta di fronte. Allora in quello spazio in cui si muovono joni di un sol segno la variazione della forza elettrica sarà data da

$$\frac{dX}{dx} = 4\pi n \varepsilon$$

se x è la direzione del campo data dalla normale comune ai due piatti; e la corrente che arriva su uno qualunque degli elettrodi è data da

$$i = unX\varepsilon$$

se u al solito è la velocità acquistata in un campo unitario (unità elettrostatiche).

Da queste due equazioni si ricava

$$X\frac{dX}{dx} = \frac{4\pi i}{u}$$

da cui integrando

$$X^2 = \frac{8\pi i}{u}x + c$$

Se dunque possiamo misurare il valore di X in due punti del campo, ossia corrispondentemente a due valori della x, e conosciamo la corrente i arrivata sopra un piatto, l'ultima equazione ci permette di ricavare la u cercata.

Questo è il metodo proposto dal signor J. J. Thomson.

Il signor Child applica il metodo alla fiamma e propone e segue una semplificazione. Trova difficile il misurare il valore della intensità della forza elettrica in un punto del campo e per evitarlo ricorre ad un'altra formola già nota. Nel caso di joni d'un sol segno la corrente è data da

$$i = un\varepsilon X$$

che si può scrivere

$$i = un\varepsilon\frac{dV}{dx}$$

essendo V il potenziale. D'altra parte

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} = 4\pi n\varepsilon$$

Combinando queste due si ricava

$$2\frac{dV}{dx}\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{8\pi i}{u}$$

da cui integrando

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2=\frac{8\pi i}{u}x+\text{cost}$$

Tale costante è il valore di $\frac{dV}{dx}$ sul piano in cui termina il campo jonizzante, se prendiamo l'origine su quel piano. Il Child dimostra che tale valore è molto prossimo a zero e trascurabile. Allora dall'ultima equazione integrando si ricava

$$V=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8\pi i}{u}}\,x^{\frac{3}{2}}$$

da cui

$$i=\frac{9uV^2}{32\pi x^3}$$

Se allora si prende per x la distanza del piatto dal piano in cui finisce il campo jonizzante e la chiamiamo b, la i corrispondente sarà la corrente arrivata sul piatto. V è la differenza di potenziale tra il piatto e il piano origine. Così nell'ultima formola tutto è noto eccetto la u che si cerca. Si ricava dunque

$$u=\frac{32\pi i b^3}{V}$$

che dà la velocità in funzione della corrente arrivata sul piatto, della distanza del piatto dal lembo estremo del campo jonizzante, e del potenziale del piatto stesso.

In questo modo il Child evita la determinazione del potenziale nel campo tra la fiamma e il piatto, e quella della tangente geometrica alla curva rappresentante quell'andamento che dava $\frac{dV}{dx}$ ossia i valori della forza.

Questo metodo del Thomson evita l'incertezza della definizione di corrente incontrata da altri sperimentatori precedenti e dovuta alla presenza di joni di entrambi i segni. In quei casi i risultati, ritenendo giustificate le supposizioni fatte, aveano dato non già la velocità specifica dei ioni d'un determinato segno, ma la somma delle due velocità specifiche (1).

Coll'artificio del Thomson la corrente che arriva sopra un piatto è tutta dovuta all'elettricità depostavi dai joni d'un sol segno. La distribuzione di tali joni è supposta uniforme e la velocità che si misura è la velocità media nel percorso dal campo jonizzante al piatto.

Dal lato sperimentale il metodo presenta non piccole difficoltà. Nel modo in cui è proposto dal Thomson la prima cosa da determinare è l'intensità della forza

(1) Confronta, Rutherford, Phil. M. 44, pag. 432.

in due punti del campo. Perciò bisogna cominciare dallo studio dell'andamento del potenziale nello spazio tra la fiamma e il piatto. Il continuo agitarsi della fiamma e le variazioni di pressione del gas impossibili ad evitarsi completamente producono variazioni ben forti nel potenziale dei punti interni, specialmente nella porzione media del campo da esplorare, in cui giungono talvolta ad 8 o 10 volta sopra una differenza di potenziale di 100 volta fra gli elettrodi. La determinazione poi della tangente geometrica alla curva dei potenziali in un punto qualunque offre anche più gravi difficoltà, perchè un piccolo errore nella curvatura della linea dei potenziali produce errori forti nella misura della tangente. D'altra parte un errore nella misura della forza ne produce uno solo dieci volte minore nella determinazione della velocità, e in quella misura della forza non è difficile commettere un errore di qualche unità.

La semplificazione seguìta dal Child evita le difficoltà che si incontrano nella misura della forza, ma incorre in un'altra forse anche maggiore: la determinazione della distanza tra la fiamma e il piatto. Teoricamente tale distanza sarebbe quella che passa tra il piatto e il piano ad esso parallelo che limita il campo in cui avviene la jonizzazione e in cui si trovano joni di ambedue i segni. Ora in pratica questo piano non esiste. Non si può certo immaginarlo tangente al lembo luminoso della fiamma, perchè senza dubbio la jonizzazione non si limita alla parte luminosa. Si potrebbe pensare al lembo estremo del campo di convezione della fiamma, apprezzabile o ad occhio, o proiettando la fiamma sopra uno schermo, per es. con una lampada ad arco. Ma prima di tutto tale bordo è instabilissimo e talvolta oscilla di un centimetro o due; inoltre non si può esser certi che i joni d'ambo i segni riempiano tutto quel campo. Infatti se per es. la distanza tra la fiamma ed il piatto è di cinque centimetri o meno, il piatto stesso entra nel campo di convezione della fiamma, eppure non si può pensare che i joni di entrambi i segni siano distribuiti in tutto lo spazio tra la fiamma e il piatto. Ed infine non vi sarà mai un piano di separazione ben determinato, ma il passaggio dall'uno all'altro campo avverrà con continuità.

L'incertezza di tale distanza porta differenze non piccole nella determinazione della velocità, poichè nella formola che dà la v la distanza b entra alla terza potenza.

Fra le due difficoltà, quella cioè che s'incontra nella misura della forza e questa dell'incertezza della distanza del piatto dalla fiamma, credo senza dubbio più forte questa seconda. Con tutto ciò i risultati del Child sono dei più importanti avuti fin qui.

Terzo tipo.

Immaginiamo posta la fiamma jonizzante tra due piatti ad egual distanza da essi, e caricati i due piatti ad un forte potenziale che ad eguali intervalli di tempo cambia di segno.

Durante la persistenza di carica di un certo segno sopra uno dei piatti i joni di segno opposto si muoveranno verso di esso, e durante ogni alternazione una certa quantità di elettricità verrà depositata dai joni sui piatti. E se i joni dei due segni avessero eguale velocità, tanta sarebbe la quantità di elettricità negativa assorbita dai piatti quanta la positiva. Ma poichè i joni positivi sono più lenti arrivano in minor numero sui piatti. Resta quindi nello spazio attorno alla fiamma un eccesso di

joni positivi che produrranno un campo dello stesso segno. È chiaro che tanto più grande sarà il numero di joni positivi che non riusciranno ad arrivare sui piatti, quanto più grande è la distanza fra i piatti stessi. Vi sarà anzi una certa distanza per la quale nessun jone positivo potrà giungere al piatto che lo attiva. Questa distanza corrisponderà alla massima escursione che il jone positivo potrà fare nel senso della forza durante un'alterazione.

Chiamiamo con d questa distanza che rappresenta insieme la massima escursione di un jone positivo e la minima distanza per la quale, con un determinato potenziale V_0, nessun jone positivo può arrivare al piatto. Allora, supponendo il campo uniforme, se u_p è la velocità specifica d'un jone positivo (velocità per un campo elettrostatico unitario) la sua velocità effettiva sarà $u_p \frac{V_0}{d}$ e quindi se T è la durata di mezza alternazione sarà

$$d = u_p \frac{V_0}{d} T \text{ (}^1\text{)}$$

Ma il campo non è uniforme, anzi secondo ciò che s' è visto sopra si ha

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{8\pi i}{u}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

da cui

$$V = \frac{2}{3}\left(\frac{8\pi i}{u}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

e nel caso presente

$$V_0 = \frac{2}{3}\left(\frac{8\pi i}{u}\right)^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}$$

e quindi combinando con la precedente

$$\frac{dV}{dx} = \frac{3}{2} \frac{V_0 x^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}}$$

D'altra parte

$$\frac{dx}{dt} = u \frac{dV}{dx}$$

da cui

$$dt = \frac{dx}{u \frac{dV}{dx}}$$

e servendosi dell'espressione trovata per $\frac{dV}{dx}$

$$dt = \frac{2}{3} \frac{d^{\frac{3}{2}}}{u V_0 x^{\frac{1}{2}}} dx$$

(1) Rutherford, Ph. R. XIII, pag. 321.

e poichè nel tempo T il cammino percorso è appunto d così sarà

$$T = \frac{4}{3} \frac{d^2}{u V_0}$$

da cui

$$u = \frac{4}{3} \frac{d^2}{V_0 T}$$

Così conoscendo la durata di un'alternazione, il potenziale a cui i piatti sono caricati e quella distanza minima d si può determinare la u cercata.

Questo concetto fu per la prima volta esposto dallo Zeleny [1], che però non se ne servì per alcuna determinazione.

Il Rutherford lo espose più tardi nel modo qui riportato e se ne servì per la determinazione dei joni prodotti dai raggi ultravioletti.

Più recentemente i signori Sella e De Rossi se ne servirono per la determinazione della velocità dei joni positivi prodotti da una fiamma. Il concetto da essi seguito è questo. Il campo adoperato è un campo alternato sinusoidale, il gradiente in ogni istante sarà dunque dato da

$$\frac{h}{2l} \operatorname{sen} \nu t$$

se h è la differenza massima di potenziale, l la distanza tra fiamma e piatto e $\nu = \frac{2\pi}{T}$ dove T è la durata di una alternazione intera.

La velocità dei joni sarà dunque

$$\frac{dx}{dt} = u \frac{h}{2l} \operatorname{sen} \nu t$$

Di quì

$$x = \frac{uh}{2 l \nu} (\cos \nu \vartheta - \cos \nu t)$$

L'escursione massima si avrà per $\cos \nu\vartheta = 1$ e $\cos \nu t = -1$ ossia quando i joni partono all'origine dei tempi $\vartheta = 0$ e camminano per un tempo $t = \frac{T}{2}$. In questo caso

$$x = \frac{uh}{l\nu}$$

e se si chiama con d quella escursione massima, sarà

$$d = \frac{uh}{d\nu}$$

da cui

$$u = \frac{\nu d^2}{h}$$

(1) Phil. M. 46, pag. 133.

Il campo si suppone quì non alterato dalla distribuzione dei ioni: il **Rutherford** invece teneva conto di questa distribuzione ma a sua volta trascurava la forma del campo sinusoidale supponendo una brusca alternazione.

I risultati dei suddetti autori sono soddisfacenti quantunque la loro determinazione avesse solo un'importanza secondaria nello studio da essi intrapreso.

II.

Nuova determinazione della velocità dei joni prodotti da una fiamma.

Dallo studio fatto nel capitolo precedente mi sembra si possa concludere che il metodo di Thomson qualora sia possibile eliminare o ridurre le difficoltà accennate, sia quello che ispira maggior fiducia e che è più fecondo di risultati importanti. Mi

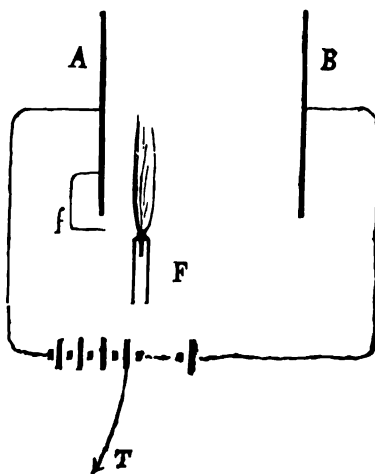



FIG. 5.

sono dunque proposto di riprendere quelle esperienze cercando di apportarvi quelle modificazioni che mi sembravano condurre a risultati più soddisfacenti.

Due piatti di zinco di 20 cm. di diametro, perfettamente isolati, sono disposti parallelamente ad una distanza variabile (fig. 5). Sono collegati ai poli d'una pila d'acqua di cui il punto di mezzo è a terra. Nello spazio fra i due piatti arde una fiamma a gas di piccolo spessore, ma molto allargata e a forma di luna con la concavità in alto, in modo che domini tutto il campo tra i piatti senza entrarvi con la parte luminosa. Era disposta in un piano parallelo ai piatti e a 4 cm. da A, e collegata al piatto stesso con un filo metallico.

Concetto del metodo. — La corrente che arriva sopra un piatto è data dal numero di joni che si trovano in una unità di volume nello strato aderente al piatto,

moltiplicata per la velocità effettiva con cui i joni stessi arrivano. La velocità specifica dei joni a quella distanza dalla fiamma si potrà dunque esprimere mediante la corrente che arriva sul piatto, e la forza e la densità propria dello strato aderente al piatto. Queste tre quantità sono dunque quelle che si devono misurare.

Misure di potenziale. — Per esplorare il potenziale nel campo compreso fra i due piatti ho adoperato o il filo o il getto d'acqua, ma conforme a quanto aveva osservato il Child ho trovato molto più conveniente il secondo modo. Mandavo perciò nello spazio da esplorare un piccolo getto d'acqua obliquamente verso l'alto sicchè prendeva la forma di parabola od anche verticalmente dall'alto in basso sempre però parallelamente ai piatti. La vena d'acqua prende il potenziale del campo non nel punto in cui si stacca dal cannellino, ma più lontano dove comincia a separarsi in goccioline. Il tubo di vetro che portava il getto era raccomandato ad un manicotto di ebanite che faceva scorrere sopra una bacchetta di vetro graduata a fine di determinare con esattezza là distanza del punto esplorato da uno dei piatti. L'acqua poi era collegata all'ago dell' elettrometro, di cui le due coppie di quadranti erano caricate ad una determinata differenza di potenziale. Sullo specchio mandavo la luce d'un filo incandescente la cui immagine si delineava nettamente sulla scala in modo da poter fare le letture con tanta esattezza quanta ne avrei potuta ottenere servendomi del canocchiale. Le misure erano fatte leggendo le deviazioni dell'ago, non come nell'esperienze di Child riportando a zero l'elettrometro collo spostare il punto a terra della pila che caricava i piatti. E ciò perchè non si riesce a portar sempre a zero l'ago esattamente coll'aggiungere o togliere pile ad un piatto per darle all'altro, ma spesso si arriva solo ad un minimo di deviazione sensibilmente diverso da zero.

Le esplorazioni erano fatte generalmente ad ogni centimetro di distanza sull'asse dei due piatti ma spesso nelle vicinanze del piatto B anche a minor distanza. Delle moltissime serie di letture fatte riporto qui alcune come saggio delle esperienze, senza scegliere le migliori.

Per comodità le posizioni del punto esplorato sono determinate contando le distanze dal piatto B di destra. I potenziali sono dati in unità arbitrarie (divisioni della scala).

Nella tavola I sono riportate tre serie di misure: la colonna 1 corrisponde ad una distanza di 20 cm. tra i piatti e quindi di 16 cm. tra la fiamma (piano medio della parte luminosa) e il piatto B. Il piatto A e la fiamma sono caricati negativamente, B allo stesso potenziale di A ma di segno opposto. La colonna 2 è per una stessa distanza dei piatti e della fiamma ma è invertito il segno del potenziale. L'altezza di questo non è diversa dalla precedente, ma è diversa la sensibilità dell'elettrometro. La terza colonna è relativa ad una distanza di 15 cm. tra i due piatti, la fiamma e il piatto A sono negativi, il piatto B positivo.

TAVOLA I.

Distanze da B in cm.	POTENZIALI			Distanze da B in cm.	POTENZIALI		
	1	2	3		1	2	3
0	+ 50	— 120	+ 115	11	— 36	+ 86	fiamma
1	+ 42	— 97	+ 75	12	— 44	+ 95	»
2	+ 33	— 74.5	+ 42	13	— 50	+ 110	— 122
3	+ 23	— 57	+ 9	14	— 52	+ 115	—
4	+ 17	— 36	— 21	15	»	»	— 115
5	+ 7	— 17	— 45	16	fiamma	fiamma	»
6	0	— 5	— 72	17	»	»	—
7	— 6	+ 20	— 93	18	— 52	»	—
8	— 14	+ 35	— 112	19	»	»	—
9	— 26	+ 54	— 122	20	— 50	+ 115	—
10	— 30	+ 74.5	»	—	—	—	—

I risultati della colonna 2 sono riportati in una scala ridotta (3:5) sopra le ordinate del diagramma A ([1]); sulle ascisse sono portate le distanze tra la fiamma e il piatto. Così si ottiene la curva I del diagramma stesso.

Per determinare il valore di $X = \frac{dV}{dx}$ della forza in un punto del campo ossia per un certo valore della x bisognerebbe determinare in quel punto il valore della tangente trigonometrica alla curva I dei potenziali. A questo fine torna più conveniente costruire con le regole note del calcolo grafico la curva derivata prima della curva degli integrali, la quale darà per ogni punto il valore di $\frac{dV}{dx}$. Nel diagramma A la curva II è la derivata prima della I. Finalmente costruendo la derivata prima della curva II si ha la curva III le cui ordinate dànno per ogni punto i valori di $\frac{dX}{dx}$ ossia $\frac{d^2V}{dx^2}$, e quindi valori proporzionali ad n numero dei joni per ogni piano di livello. La curva I dei potenziali ha un massimo all'altezza della fiamma, rassomiglia ad una parabola, ma verso l'ordinata estrema di destra che corrisponde al piatto B il suo raggio di curvatura va leggermente diminuendo. La curva II delle forze parte tangenzialmente all'asse delle ascisse all'altezza della fiamma, ha un primo punto di flesso poco lontano dalla fiamma e in quel primo tratto s'innalza rapidamente.

Un secondo punto di flesso è a metà circa della distanza dalla fiamma e dopo questo la curva va alzandosi un po' più rapidamente nelle vicinanze del piatto. La curva III delle densità raggiunge rapidamente un massimo dopo il quale discende

([1]) Vedi tavola annessa.

con ampia curva fino ad un minimo per risalire alquanto nell'avvicinarsi all'ordinata estrema.

Il primo tratto crescente corrisponde al fatto che i joni di segno opposto vanno separandosi e prendono il sopravvento quelli attirati dal piatto B fino a che questi arrivano ad un massimo. Da allora in poi però non restano distribuiti uniformemente, che anzi quel massimo resta a compensare il campo di joni di segno contrario che si forma dall'altra parte della fiamma.

In vicinanza del piatto B i joni tornano ad accumularsi producendo come un risucchio a cui è dovuto il minimo formatosi nella curva stessa.

L'uso di queste curve oltre presentare un interesse speciale giova molto ad eliminare gli errori che si possono incorrere nella determinazione dei valori di $V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}$ in punti isolati.

Per ciò che riguarda le curve dei potenziali sono degni di osservazione varî fatti. Nello spazio molto vicino alla fiamma il potenziale è sempre alquanto maggiore del potenziale del piatto al quale la fiamma è collegata, in modo che la curva presenta un vero massimo. Questo fatto trova la sua giustificazione nell'altro che nella fiamma la forza elettrica è nulla e quindi ad un punto di zero per la curva delle forze deve corrispondere un massimo per quella de' potenziali.

Tra le curve ottenute con la fiamma positiva e quelle con la fiamma negativa non si riesce a scoprire differenza sensibile. Questo fatto fu già riconosciuto dal Child. Una differenza sensibile invece si verifica tra curve ottenute con una piccola differenza di potenziale fra i piatti e quelle ottenute con un potenziale maggiore. Col crescere del potenziale il massimo nella curva delle densità si raggiunge più presto, e corrispondentemente quella dei potenziali s'innalza con una curva più ristretta e più rapida, mentre se il potenziale è basso quella prima parte della curva è più ampia e sviluppata.

Misure di corrente. Il piatto di destra B è sostituito da un altro piatto B′ di 115 mm. di diametro, difeso da un anello di guardia il cui diametro esterno è di 20 cm. Il piatto B′ è collegato ad un condensatore C e all'elettrometro in multiplo. L'elettricità che arriva su B caricherà il condensatore, e l'elettrometro misurerà questa carica. Il piatto A è caricato con tutta la pila d'acqua. Per impedire che l'anello si carichi ad un potenziale diverso a quello a cui si carica B′, anch'esso è collegato ad un condensatore C′, la cui capacità sta a quella di C come la superficie dell'anello sta a quella del piatto.

L'ago dell'elettrometro è caricato con una pila secca, una coppia di quadranti è a terra, l'altra è collegata a B′.

Il condensatore è una bottiglia, le armature sono perfettamente isolate e difese dall'umidità con carburo di calcio. Per determinarne la capacità lo paragonavo con un condensatore di capacità nota.

La capacità del sistema bottiglia-elettrometro risultò di $5{,}6 \times 10^{-19}$ unità elettromagnetiche assolute, ossia $5{,}6 \times 10^{-4}$ microfaraday.

Finchè la corrente era abbastanza piccola era possibile seguire la carica progressiva del condensatore. Così tenevo dapprima il piatto B′ già collegato al condensatore

e all'elettrometro in comunicazione col suolo, ad un certo istante interrompevo questa comunicazione e leggevo di cinque in cinque secondi o più raramente l'avanzarsi dell'ago sulla scala. Ma quando la corrente era forte, l'ago dell'elettrometro riceveva impulsi tali da non permettere la lettura della carica progressiva. Allora tenevo il condensatore in comunicazione con B′ per un tempo determinato, per es. per cinque secondi, poi interrompevo rapidamente tale comunicazione ed introducevo invece l'elettrometro. L'ago impiegava un certo tempo per prendere la posizione di equilibrio e badavo perciò di fare le correzioni necessarie per la dispersione che durante quel tempo il sistema poteva subire, ma tanto il condensatore che l'elettrometro erano a perfetta tenuta ed era trascurabile la perdita che subivano in quel tempo.

Come saggio delle misure riporto qui una prima serie di determinazioni.

La tavola II è relativa alle condizioni seguenti: il piatto A è caricato con una pila d'acqua che dà 50 Volt, la fiamma è a 4 cm. da A e collegata con esso. Le cifre rappresentano i potenziali acquistati dal condensatore nei tempi successivi, in una scala arbitraria (divisioni della scala).

TAVOLA II.

	Distanza fra i piatti	5″	10″	15″	20″	25″	30″	35″	40″	45″	50″	55″	60″
Fiamma negativa	10 cm.	12	21	29	36.5	43	50						
	11 »	14	25	34	43	49.5	56						
	12 »	4.5	8	11	14	17	20	23	25.7	28.4	31.1	33.6	36
	13 »	2.5	4.5	6.2	7.6	9	10.3	11.5	12.7	13.8	15.2	16.5	18
	14 »	1.5	2.2	3			4						6
Fiamma positiva	10 »	23	37	49	60	70	80						
	11 »	20	32	43	52.5	64	74						
	12 »	4	7.5	10.5	13.3	15.5	18	20	21.8	23.3	25	26.5	28
	13 »	2.2	3.7	5.2	6.5	7.7	8.8	9.9	11	12	13	14	15
	14 »												

La carica acquistata dal sistema non è perfettamente proporzionale ai tempi ma va leggermente diminuendo nei tempi successivi; le cariche positive diminuiscono più delle negative. Perciò nel ridurre all'unità di tempo ho tenuto conto specialmente dei primi cinque secondi.

La tavola III contiene le velocità di carica del condensatore relative all'esperienza della tavola II ossia le cariche corrispondenti all'unità di tempo. Nella colonna 1 le velocità sono espresse in divisioni della scala, nella 2 in Volt.

TAVOLA III.

Distanza fra i piatti	1 Deviazioni dell'ago in 1'' (Divisioni della scala)		2 Accrescimento del pot. in 1'' (Volt)	
	Fiamma negativa	Fiamma positiva	Fiamma negativa	Fiamma positiva
10 cm.	2.40	4.60	0.185	0.354
11 »	2.80	4.0	0.214	0.308
12 »	0.90	0.80	0.069	0.062
13 »	0 50	0.41	0.039	0.034
14 »	0.30	0 26	0.023	0 020

Volendo ora la quantità di elettricità arrivata sul piatto B' in un secondo non c'è che da moltiplicare le cifre della colonna 2 della tavola III per la capità del sistema; e finalmente dividendo per la superficie del piatto B' che era di $\pi (5,7)^2$, si otterrà l'intensità della corrente che arrivava sul piatto.

La tavola IV dà i valori di tale intensità espressa in Ampère, avendo già misurato il potenziale in Volt e la capacità in Faraday.

TAVOLA IV.

Distanza fra i piatti	Intensità della corrente in Amp.	
	Fiamma negativa	Fiamma positiva
10 cm.	1.034×10^{-12}	1.981×10^{-12}
11 »	1.121	1.723
12 »	0.388	0.344
13 »	0.216	0.190
14 »	0.129	0.112

Le curve della figura 6 sono costruite prendendo valori proporzionali a queste correnti.

È singolare che dapprima finchè i piatti sono abbastanza vicini la corrente positiva supera la negativa; entrambe scendono molto rapidamente fra gli undici e i dodici centimetri e poi prendono un andamento regolare rimanendo la positiva minore della negativa, come deve essere per la minore velocità dei joni positivi. Inoltre la corrente negativa dopo il decimo centimetro va crescendo fino ad un massimo, per poi scendere rapidamente. Ciò fa pensare che a quella distanza esistono ancora joni di ambo i segni e che di preferenza restano in quel campo i joni positivi più lenti degli altri. Questo produce anche la superiorità della corrente positiva sulla negativa

in quel campo, sicchè questa ultima non diviene maggiore della prima se non quando lo spazio è libero di joni positivi.

Per distanze superiori ai 14 centimetri, in altre serie di misure relative a differenze di potenziale maggiore, l'andamento delle curve è perfettamente analogo a quello a cui accennano le curve della figura.

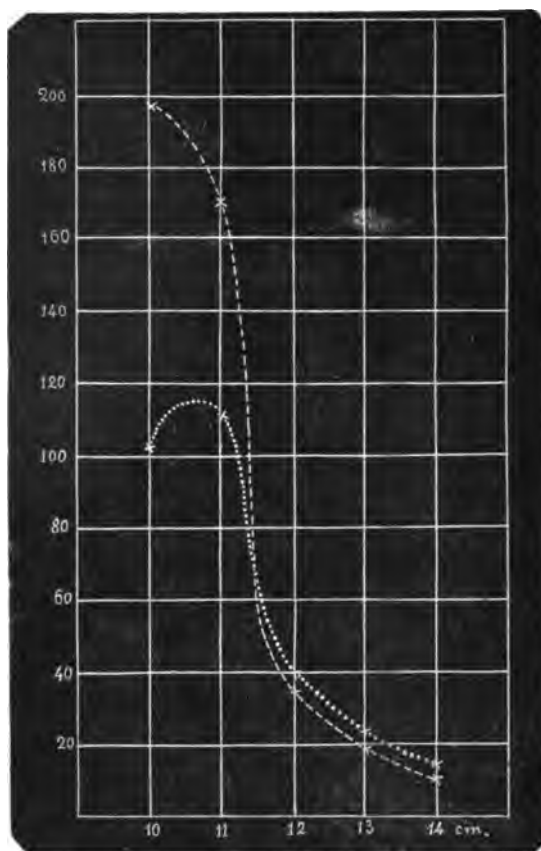



Fig. 6.

Nella tavola V riporto un'altra serie di misure di corrente ottenuta con una differenza di potenziale di 150 Volt per la fiamma negativa.

TAVOLA V.

Distanza fra i piatti	Carica in Volt in 1''	Corrente in Amp. $\times 10^{-12}$
14 cm.	5.83	32.65
16 »	3.33	18.65
18 »	2.33	13.05
20 »	1.66	9.30

Determinazione della velocità. Dalla sola ispezione delle curve che danno la densità dei joni su ciascun piano di livello del campo, si vede come debba essere ben difficile il determinare analiticamente il variare del potenziale e quindi della forza e della densità, e d'altra parte, si comprende, è troppo arbitrario il non tener conto di questa distribuzione dei joni nel campo. Le formole di Thompson e di Child sono appunto fondate sopra un'integrazione estesa a tutto il campo dalla fiamma al piatto, in cui il numero n dei joni si suppone indipendente da x.

Mi sembra però che si possano evitare le difficoltà che insorgono da questa complicata distribuzione dei ioni ricorrendo ad una formola in cui non entrino che elementi misurati sul piatto B.

Si sa che quando la corrente è dovuta a joni di un sol segno, la sua intensità è data da

$$i = kXn\varepsilon$$

cioè dal numero di ioni esistenti nell'ultimo strato aderente al piatto moltiplicato per la velocità effettiva kX e per la carica ε. La formola stessa si può scrivere:

$$i = \frac{k}{4\pi} X \frac{dX}{dx}$$

perchè

$$\frac{dX}{dx} = 4\pi n\varepsilon$$

Ora coll'uso delle curve delle forze e delle densità si può conoscere il valore di X e di $\frac{dX}{dx}$ su qualunque piano di livello del campo; la corrente i si sa misurare, sicchè nell'ultima formola non resta di incognito che k. Si ricava dunque:

$$k = \frac{4\pi i}{X \frac{dX}{dx}}$$

Gli elementi che compariscono in questa formola si riferiscono ad unità elettrostatiche. Riducendo ad unità pratiche si ottiene:

$$k = \frac{12\pi i \, 10^{11}}{X \frac{dX}{dx}}$$

in cui i, X, $\frac{dX}{dx}$ sono i valori che queste grandezze assumono sul piatto B su cui si è misurata la corrente. Questa formola dà il valore k della velocità per gradiente unitario che i joni hanno realmente a quella distanza a cui si trova il piatto dalla fiamma, e non il valore medio di tale velocità in tutto il cammino, come davano le formole precedenti.

Applico questa formola ai risultati della tavola V. Le curve relative a questa serie sono le curve del diagramma B. I potenziali sono riportati sulla ordinata in modo che 1^{mm} della carta vale un Volt. La differenza di potenziale fra i piatti è di 150 Volt. Le ascisse sono disegnate in scala metà in modo che un centimetro è rappresentato da 5 mm. La base di derivazione grafica è un centimetro del foglio che corrisponde perciò a due centimetri veri. Sicchè le ordinate della curva delle forze danno il doppio del valore della forza, e quelle della curva delle densità il quadruplo.

Prendo i valori relativi alla distanza di 20 cm. tra i piatti, ossia di 16 cm. tra fiamma e piatto.

La tavola V dà per la corrente negativa:

$$i_n = 9{,}30 \times 10^{-12}$$

il valore di X sul piatto ossia sull'ordinata estrema della curva II è di $\frac{34}{2}$ e quello di $\frac{dX}{dx}$ è di $\frac{9{,}8}{4}$. Ma poichè i valori di X e di $\frac{dX}{dx}$ che influiscono sul valore della corrente non sono tanto quelli che acquistano sul piatto stesso, ma piuttosto nell'ultimo centimetro precedente al piatto, così prendo il valore medio che quelle grandezze assumono in quell'ultimo tratto, in altri termini i valori nei punti segnati nella carta. Così ottengo

$$X = 16 \qquad \frac{dX}{dx} = 2$$

Sostituendo questi valori nella formola che dà k, ottengo:

$$k_n^{(16)} = \frac{12\pi \times 9{,}30 \times 10^{-1}}{16 \times 2} = 1{,}09 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$$

I ioni negativi dunque alla distanza di 16 cm. dalla fiamma hanno una velocità specifica di 1,09 cm. per secondo per una gradiente di un Volt per centimetro.

Prendendo i risultati relativi alla distanza di 18 cm. tra i piatti, ossia di 14 cm. tra fiamma e piatto, si ha dalla tavola V

$$i = 13{,}05 + 10^{-12}$$

e dalle curve

$$X = 18{,}2 \qquad \frac{dX}{dx} = 2{,}35$$

e sostituendo nella formola di k si ricava:

$$k_n^{(14)} = 1{,}15 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$$

Analogamente per la distanza di 16 cm. e di 14 cm. Così si ha:

TAVOLA VI.

Distanza tra fiamma e piatto	Valore di X	Valore di $\frac{dX}{dx}$	k_n
16 cm .	16.0	2.0	1.09
14 "	18.2	2.35	1.15
12 "	20.0	2.68	1.32
10 "	21.75	2 75	2.06

Per la velocità dei ioni positivi le curve dei potenziali, delle forze e delle densità sono le stesse che per i joni negativi.

Dai risultati della tavola IV si ricava:

$$\frac{k_n}{k_p} = 1,14$$

Da altre serie di esperienze questo rapporto risulta eguale a 1,17.

Finalmente da esperienze eseguite nel mese di aprile di quest'anno, cioè circa un anno dopo quelle riferite sopra, in condizioni in gran parte diverse, ho ottenuto risultati molto ben concordanti coi precedenti. Così per una distanza di 18 cm. tra la fiamma e il piatto, e con distribuzione di potenziale tale da dare per X il valore 7,7 e per $\frac{dX}{dx}$ 0,7, e una corrente di $1,97 \times 10^{-12}$ Ampère il valore di k_n risulta:

$$k_n = 1,37 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$$

In queste stesse condizioni il valore di k_p risulta:

$$k_p = 1,18 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$$

Sicchè si ha ancora:

$$\frac{k_n}{k_p} = 1,17$$

Ciò che non era cambiato, dalla prima serie di esperienze a questa seconda erano le dimensioni della fiamma e la differenza di potenziale tra i piatti. Questi due elementi hanno un coefficiente grande nella velocità dei joni. Una fiamma più grande e più calda sembra liberi dei joni con una massa materiale più piccola e quindi più veloci. Le dimensioni della fiamma da me adoperata erano quelle riportate nella figura (fig. 7).

La differenza di potenziale era ordinariamente dagli 80 ai 100 Volt. Una differenza di potenziale minore fa sì che i joni si muovano con una velocità effettiva

minore e quindi più lungamente restino sospesi nell'aria, e così la loro massa si accresce maggiormente e diminuisce la velocità specifica.

L'influenza degli errori che si possono commettere nella determinazione di X e di $\frac{dX}{dx}$ è presso a poco la seguente. Un errore di una unità nella misura di X produrrebbe quello di $^1/_{20}$ nella determinazione di k. Ad un errore di $^1/_{20}$ in X corrisponderebbe quello di $^1/_8$ circa nel valore di $\frac{dX}{dx}$ e quindi ancora di $^1/_{20}$ in quello di k.

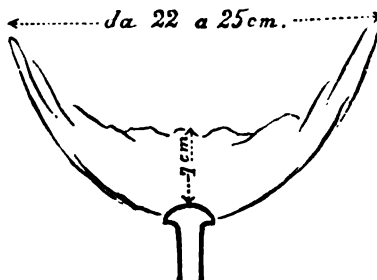



Fig. 7.

Nelle migliori misure da me fatte, l'incertezza per X non ha mai superato $^1/_2$, il che potrebbe portare un errore di $^1/_{50}$ circa nel valore di k. In ogni caso si può ritenere che l'errore nelle misure riportate non raggiunga $^1/_{10}$.

Risultati.

Potenziale. L'andamento del potenziale nel campo tra la fiamma e il piatto è sensibilmente lo stesso per la fiamma positiva e per la negativa. Le curve che danno quell'andamento presentano invece differenze sensibili tra le piccole e le grandi differenze di potenziale. All'altezza della fiamma la curva ha un vero massimo.

Forze. La forza è nulla sulla fiamma, cresce rapidamente fuori di essa, poi si mantiene per un certo tratto quasi costante e torna a crescere rapidamente in vicinanza del piatto.

Densità. Appena al di fuori della fiamma la densità elettrica prodotta dai joni di un sol segno raggiunge un massimo, dopo il quale scende con una curva più o meno ampia verso un minimo, mantenendosi per un certo tratto quasi costante, e torna a crescere vicino al piatto. Lo spazio nel quale si mantiene costante è tanto minore quanto più grande è la differenza di potenziale alla quale sono caricati i piatti.

Velocità dei ioni. Le formole di Thomson e di Child non sembra soddisfino pienamente. Più pratico sembra l'uso della formola:

$$k = \frac{4\pi i}{X \frac{dX}{dx}}$$

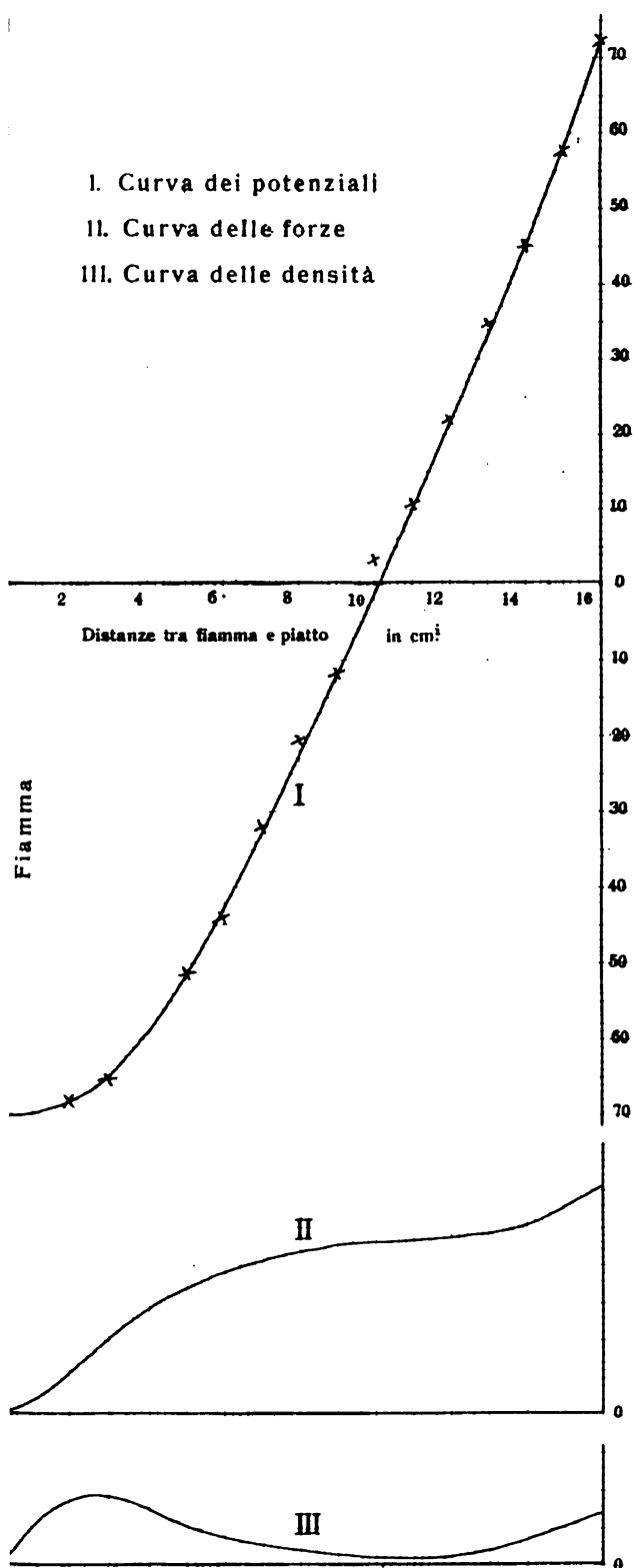
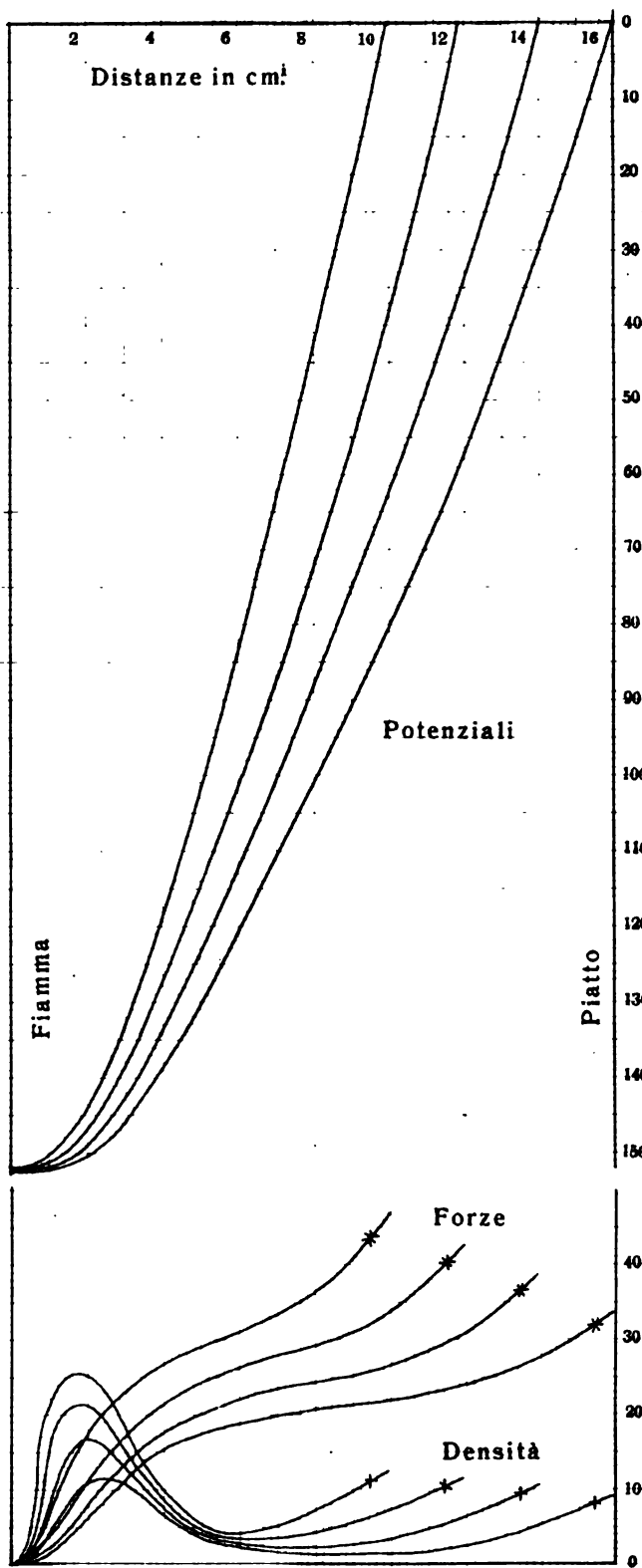
in cui tutti gli elementi si misurano ad un sol punto, e che dà quindi la velocità specifica vera dei joni a quella distanza a cui si misurano X e $\frac{dX}{dx}$, e non la media.

La velocità specifica dei joni dipende:

a) dall'intensità della fiamma;

b) dalla differenza di potenziale fra i piatti;

c) dalla distanza dalla fiamma.

Le cifre ottenute si accordano molto bene con quelle date dal sig. Mache H.; si allontanano alquanto da quelle del sig. Child da una parte, e del sig. Mc Clelland dall'altra. Il valore del rapporto $\frac{k_n}{k_p}$ si accorda pienamente con quello dato dal sig. Mache, e si avvicina molto a quello dello Zeleny.

STAB. L. SALOMONE ROMA

INDICE DEL VOL. V — SERIE 5ª

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc 9°, 2° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 5°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. Vol. V. Fasc. 1°-13°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.º — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*